



Mécanique du Solide

Christophe Coste

► To cite this version:

Christophe Coste. Mécanique du Solide. Licence. MS4 - Mécanique du Solide, Université Paris Diderot, Paris 7, France. 2006, pp.99. cel-01405740

HAL Id: cel-01405740

<https://u-paris.hal.science/cel-01405740>

Submitted on 2 Dec 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

Université Paris 7 – Denis diderot.

MS 4

Mécanique du Solide

C. Coste

Année 2006–2007 (version révisée)

Chapitre 1

Petites oscillations

1.1 Oscillateur harmonique

1.1.1 Equation du mouvement

La dynamique de *l'oscillateur harmonique* est donnée par l'équation différentielle

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \text{où} \quad \ddot{x} \equiv \frac{d^2x}{dt^2} \quad (1.1)$$

où ω est une constante réelle, homogène à l'inverse d'un temps, appelée *pulsation*. Les solutions de cette équation se mettent sous plusieurs formes équivalentes :

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t = x_0 \cos(\omega t + \phi) = X_0 e^{i\omega t} + \overline{X}_0 e^{-i\omega t} \quad (1.2)$$

L'équation différentielle (1.1) étant du second ordre, ses solutions dépendent de deux constantes réelles, déterminées par deux conditions initiales : A et B dans le premier cas, *l'amplitude* x_0 et *la phase* ϕ dans le second, et les deux composantes réelles de la constante complexe X_0 dans le dernier cas ($\overline{Z}$ représente le complexe conjugué de Z , de sorte que $x(t)$ est bien une fonction réelle).

Exercice 1 : Exprimer la paire (A, B) ainsi que la constante complexe X_0 en fonction de l'amplitude et de la phase d'une solution donnée. Calculer x_0 et ϕ sachant qu'initialement $x(t=0) = X$ et $\dot{x}(t=0) = V$.

Un modèle classique décrit par (1.1) consiste en une masse ponctuelle m attachée à un ressort de constante de raideur k , soumise à l'accélération de la pesanteur g (voir Fig. 1.1). Si la longueur à vide du ressort est l_0 , sa longueur à l'équilibre l équilibre le poids de la masselotte :

$$mg = k(l - l_0)$$

Si x est le déplacement de m par rapport à l , le principe fondamental de la dynamique permet d'écrire

$$m\ddot{x} = -k(x + l - l_0) + mg = -kx \quad (1.3)$$

qui est bien (1.1) avec le résultat classique $\omega = \sqrt{k/m}$.

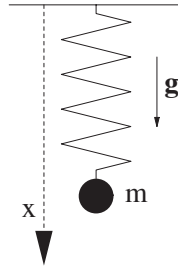


Figure 1.1: Masse suspendue à un ressort

1.1.2 Aspect énergétique

En multipliant par $\dot{x}$ l'équation (1.3), on obtient une intégrale première

$$\underbrace{\frac{1}{2}m\dot{x}^2}_{\text{Energie cinétique } E_c} + \underbrace{\frac{1}{2}kx^2}_{\text{Energie potentielle } E_p} = E_m = Cste, \quad (1.4)$$

qui exprime la conservation de l'énergie mécanique du pendule.

Calculons la moyenne sur une période des composantes de l'énergie mécanique :

$$\langle E_c \rangle = \frac{m}{2} \left(\frac{1}{T} \int_0^T \dot{x}^2 dt \right) = \frac{1}{2} m \omega^2 x_0^2, \quad \langle E_p \rangle = \frac{k}{2} \left(\frac{1}{T} \int_0^T x^2 dt \right) = \frac{1}{2} k x_0^2. \quad (1.5)$$

Comme $\omega = \sqrt{k/m}$, on voit que ces deux énergies sont égales en moyenne.

$$\langle E_c \rangle = \langle E_p \rangle = \frac{1}{2} \langle E_m \rangle \quad (1.6)$$

1.1.3 Linéarisation au voisinage d'une position d'équilibre

Pour un système conservatif constitué d'une particule de masse m dans un potentiel $V(x)$, (1.4) se généralise en

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) \equiv E_0 = Cste. \quad (1.7)$$

Supposons alors qu'il existe une position d'équilibre stable x_0 , soit $V'(x_0) = 0$ (définition de l'équilibre; $V' \equiv dV/dx$) et $V''(x_0) > 0$ (stabilité), comme sur la Fig. 1.2.

Si E_0 est l'énergie mécanique initiale de la particule, celle-ci se déplace entre les positions x_1 et x_2 , intersections de la courbe $V(x)$ avec la droite $E = E_0$. La distance entre cette droite et la courbe donne l'énergie cinétique de la particule, maximale lorsqu'elle passe par le point d'équilibre x_0 . Sans perte de généralité, un changement d'origine permet de faire $x_0 = 0$. Si l'amplitude des oscillations est *petite*, il est légitime de développer le potentiel au voisinage de la position d'équilibre :

$$V(x) = V(0) + \underbrace{V'(0)}_{=0} x + \frac{|V''(0)|}{2} x^2 + \dots \quad (1.8)$$

et l'équation du mouvement devient

$$m\ddot{x} = -V'(x) = -|V''(0)|x + \dots \quad (1.9)$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur, on trouve l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega = \sqrt{|V''(0)|/m}$. C'est bien sûr ce résultat, très général, qui donne son importance à l'équation de l'oscillateur harmonique.

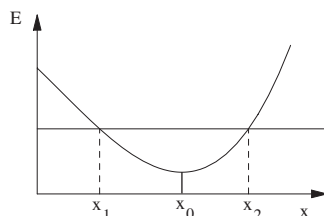


Figure 1.2: Mouvement autour d'un équilibre stable. C'est la configuration typique d'un minimum (éventuellement local) d'énergie potentielle.

La pulsation est indépendante de l'amplitude des oscillations, tant que celle-ci reste assez petite pour qu'il soit légitime de limiter le développement de l'énergie potentielle au terme quadratique. On parle d'*isochronisme des petites oscillations*. *Remarque* : Si l'on était au voisinage d'une position d'équilibre *instable*, il faudrait remplacer (1.8) par

$$V(x) = V(0) - \frac{|V''(0)|}{2}x^2 + \dots \implies m\ddot{x} = |V''(0)|x$$

La solution de cette équation, qui remplace (1.9), n'est plus sinusoïdale. Au contraire, elle croît exponentiellement avec le temps caractéristique $\sqrt{m/|V''(0)|}$. Le signe du terme quadratique du développement de l'énergie potentielle, ou de manière équivalente celui du terme linéaire du développement de la force, permet de conclure quant à la stabilité de la position d'équilibre.

Un exemple classique de linéarisation au voisinage d'une position d'équilibre est le pendule pesant (Fig. 1.3). Il est constitué par une masse ponctuelle m accrochée à une tige rigide sans masse de longueur l . Si on repère la position de m par l'angle θ , son énergie cinétique est $ml^2\dot{\theta}^2/2$, et en prenant l'origine des énergies potentielles à la position d'équilibre stable $\theta = 0$ son énergie potentielle est $mgl(1 - \cos \theta)$. Le système est conservatif, et l'équation du mouvement est donnée par

$$\frac{ml^2}{2}\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos \theta) = E \implies l\ddot{\theta} + g \sin \theta = 0$$

où la deuxième équation est obtenue en dérivant par rapport au temps, et après simplification par $ml\dot{\theta}$. Pour de faibles valeurs de θ , $\sin \theta \approx \theta$ et on retrouve la pulsation du pendule pesant $\omega = \sqrt{l/g}$.

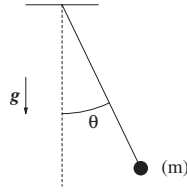


Figure 1.3: Pendule pesant

Exercice 2 : Déterminer la deuxième position d'équilibre du pendule pesant, et démontrer qu'elle est instable.

1.2 Oscillateur harmonique amorti

Le modèle (1.1) est conservatif, comme le montre (1.4). De nombreux systèmes physiques font apparaître une force résistante, proportionnelle à la vitesse, et opposée au mouvement. Dans ce cas, l'équation du mouvement devient

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (1.10)$$

où μ est un coefficient constant, positif, homogène à l'inverse d'un temps (le coefficient 2 est introduit pour simplifier les calculs). La force de frottement est $F_{vis} = -2m\mu\dot{x}$, où m est homogène à une masse si x est homogène à une longueur, comme c'est le cas pour une masse ponctuelle accrochée à un ressort.

Cette force de *frottement visqueux* peut être due à l'influence de la viscosité du fluide environnant le système mécanique, pour des vitesses suffisamment faibles, ou traduire une dissipation par courants de Foucault.

L'équation (1.10) se résout en cherchant des solutions exponentielles $x \propto e^{rt}$. La constante r est alors solution d'une équation du deuxième degré,

$$r^2 + 2\mu r + \omega^2 = 0, \quad (1.11)$$

dont le discriminant réduit est $\Delta = \mu^2 - \omega^2$.

1.2.1 Solution oscillante

Elle est obtenue lorsque l'atténuation est faible. L'équation (1.11) admet deux solutions complexes conjuguées, et la solution générale de (1.10) s'écrit

$$\mu < \omega \quad \implies \quad x(t) = Ae^{-\mu t} \sin\left(\sqrt{\omega^2 - \mu^2}t + \phi\right) \quad (1.12)$$

où l'amplitude A et la phase ϕ sont deux constantes arbitraires.

Le mouvement n'est plus périodique, puisque les oscillations sont exponentiellement atténuées. On dit qu'il est *pseudopériodique*, de pseudopériode

$$T_{O.A.} \equiv \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \mu^2}}. \quad (1.13)$$

Remarquons que la correction à la période provenant du terme d'amortissement est d'ordre μ^2 . Si l'amortissement est faible ($\mu \ll \omega$), la pseudopériode est égale à celle de l'oscillateur non amorti, les oscillations décroissant sur un temps caractéristique bien plus long.

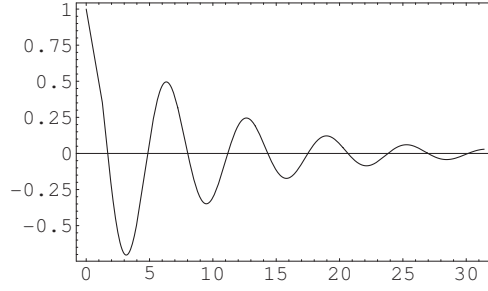


Figure 1.4: Mouvement d'un oscillateur amorti, lâché sans vitesse initiale, pour $\mu = \omega/9$. En abscisse, le temps adimensionné ωt .

On ne peut pas mesurer directement le coefficient μ . Par contre, on peut par exemple repérer les maxima successifs des oscillations, notés x_n , séparés par un intervalle de temps $T_{O.A.}$ égal à la pseudopériode. On appelle *décrément logarithmique* la quantité

$$\delta \equiv \ln \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} \right) = \mu T_{O.A.} = \frac{2\pi\mu}{\sqrt{\omega^2 - \mu^2}} \quad (1.14)$$

On définit de même le *facteur de qualité* de l'oscillateur, défini par

$$Q \equiv 2\pi \frac{\text{énergie maximale stockée}}{\text{énergie perdue par période}} \quad (1.15)$$

Si l'amortissement est assez faible, la relation (1.6) reste à peu près valable. L'énergie mécanique stockée est alors

$$\langle E_m \rangle \approx 2 \times \langle E_c \rangle \approx m \langle \dot{x}^2 \rangle$$

L'énergie dissipée est donnée par le travail, sur une période, de la force de frottement visqueux. Elle vaut

$$\langle E_{diss} \rangle = \int_0^T 2m\mu \dot{x} \times \dot{x} dt = 2m\mu T \langle \dot{x}^2 \rangle$$

On en déduit, puisqu'à cette approximation la période est celle de l'oscillateur non amorti, $T = 2\pi/\omega$,

$$Q = \frac{\omega}{2\mu} = \frac{\pi}{\delta}. \quad (1.16)$$

Le facteur de qualité Q dépend donc très simplement du terme d'amortissement. Son nom vient de ce que souvent on cherche à avoir le moins d'amortissement possible.

1.2.2 Solution aperiodique

Elle est obtenue lorsque l'atténuation est forte. L'équation (1.11) admet deux solutions réelles,

$$r = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega^2} \quad (1.17)$$

La solution générale de (1.10) s'obtient en remplaçant la fonction trigonométrique de (1.12) par une fonction hyperbolique

$$\mu > \omega \quad \implies \quad x(t) = Ae^{-\mu t} \sinh \left(\sqrt{\mu^2 - \omega^2} t + \psi \right) \quad (1.18)$$

où l'amplitude A et la phase ψ sont deux constantes arbitraires.

1.2.3 Amortissement critique

Il reste à considérer le cas où $\mu = \omega$. Dans ce cas, il n'y a qu'une racine double $-\mu$ solution de l'équation caractéristique (1.11). La forme générale de la solution est alors

$$\mu = \omega \quad \Longrightarrow \quad x(t) = (A + Bt)e^{-\mu t} \quad (1.19)$$

où A et B sont deux constantes d'intégration. On dit qu'on est dans le cadre de *l'amortissement critique* car le temps nécessaire pour que l'oscillateur initialement écarté de sa position d'équilibre y revienne est alors minimal. Une illustration en est fournie par la figure Fig. 1.5.

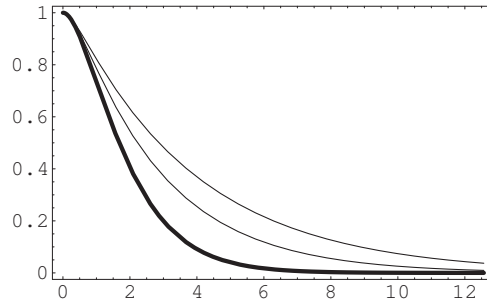


Figure 1.5: Mouvement d'un oscillateur amorti, lâché sans vitesse initiale, en fonction du temps adimensionné ωt , pour $\mu/\omega = 1$ (régime critique, en gras), $\mu/\omega = 1.5$ et $\mu/\omega = 2$ (régimes apériodiques). La décroissance est d'autant plus lente que μ est grand.

Exercice 3 : Déterminer les solutions correspondant aux trois régimes possibles, lorsque l'oscillateur est initialement à la position $x(t = 0) = X_0$, avec une vitesse initiale nulle.

1.3 Oscillateur harmonique forcé

Nous nous intéressons maintenant au cas d'un oscillateur amorti soumis à une force $f(t)$ dépendant du temps :

$$m\ddot{x} + 2m\mu\dot{x} + kx = f(t) \quad (1.20)$$

où $f(t)$ est homogène à une force, et où μ a exactement la même signification (et la même dimension physique, homogène à l'inverse d'un temps) que dans l'étude précédente.

Cette équation est linéaire et du second ordre. Sa solution générale est la somme de la solution de l'équation sans second membre (aussi appelée *équation homogène*), que nous venons de déterminer au paragraphe précédent, et d'une solution particulière. La solution sans second membre consiste en un mouvement qui s'amortit dans le temps : C'est le *régime transitoire* d'établissement du mouvement. Nous n'étudierons en détail que le cas où la force $f(t)$ est sinusoïdale. La solution particulière sera une oscillation sinusoïdale de même fréquence que le forçage, non amortie, qui subsistera après le régime transitoire : C'est le *régime permanent*.

Remarque : Disons quelques mots sur la méthode générale. Soit $x(t) = Ax_1(t) + Bx_2(t)$ la solution générale de l'équation sans second membre. Elle dépend de deux constantes A et B . Une solution particulière de (1.20) se trouve par une généralisation de la méthode de *variation des constantes* classique pour les équations du premier ordre. On considère donc A et B comme des fonctions du temps. On a

$$\dot{x} = \dot{A}x_1 + \dot{B}x_2 + A\dot{x}_1 + B\dot{x}_2$$

On cherche *une* solution, en disposant de *deux* fonctions inconnues A et B . Le problème est donc surdéterminé, et on peut fixer

$$\dot{A}x_1 + \dot{B}x_2 \equiv 0$$

qui constitue une première équation permettant de déterminer les fonctions A et B . On calcule alors

$$\ddot{x} = \dot{A}\dot{x}_1 + \dot{B}\dot{x}_2 + A\ddot{x}_1 + B\ddot{x}_2.$$

En remplaçant dans l'équation de départ, on trouve

$$A(m\ddot{x}_1 + 2m\mu\dot{x}_1 + kx_1) + B(m\ddot{x}_2 + 2m\mu\dot{x}_2 + kx_2) + \dot{A}\dot{x}_1 + \dot{B}\dot{x}_2 = f(t)$$

Les deux termes entre parenthèses sont nuls, puisque x_1 et x_2 sont par définition solutions de l'équation sans second membre. On obtient ainsi la seconde équation permettant de déterminer A et B :

$$\dot{A}\dot{x}_1 + \dot{B}\dot{x}_2 = f(t)$$

La solution générale de ce système d'équations différentielles est :

$$A = \int \frac{-f x_2}{W(x_1, x_2)} dt + \tilde{A}, \quad B = \int \frac{f x_1}{W(x_1, x_2)} dt + \tilde{B}$$

où

$$W(x_1, x_2) \equiv \begin{vmatrix} x_1 & \dot{x}_1 \\ x_2 & \dot{x}_2 \end{vmatrix}$$

et $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ sont deux constantes d'intégration. $W(x_1, x_2)$ est appelé le Wronskien de l'équation différentielle. Les solutions (1.12) et (1.18) ont été données en fonctions de deux constantes arbitraires. On peut aussi définir

$$\begin{cases} x_1 = e^{-\mu t} \sin \sqrt{\omega^2 - \mu^2} t \\ x_2 = e^{-\mu t} \cos \sqrt{\omega^2 - \mu^2} t \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x_1 = e^{-\mu t} \sinh \sqrt{\mu^2 - \omega^2} t \\ x_2 = e^{-\mu t} \cosh \sqrt{\mu^2 - \omega^2} t \end{cases}$$

Je vous laisse vérifier qu'on trouve dans chacun des cas

$$W(x_1, x_2) \equiv x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1 = -C e^{-2\mu t}$$

où $C = m\sqrt{\omega^2 - \mu^2}$ pour le cas pseudopériodique, $C = m\sqrt{\mu^2 - \omega^2}$ pour le cas apériodique et $C = m$ pour le cas critique.

1.3.1 Régime permanent en excitation sinusoïdale

Lorsque $f(t) = F_0 \cos \omega_f t$, il est plus rapide de chercher pour le régime permanent une solution particulière de (1.20) sous la forme

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_f t - \varphi) \quad (1.21)$$

Dans cette convention, une phase φ positive correspond à un *retard de phase* de la réponse par rapport au forçage. Les paramètres seront déterminés en exprimant que cette fonction est bien solution particulière de (1.20).

En reportant cette solution dans l'équation de départ, on obtient

$$(k - m\omega_f^2)x_0 \cos(\omega_f t - \varphi) - 2\mu m\omega_f x_0 \sin(\omega_f t - \varphi) = F_0 \cos \omega_f t \quad (1.22)$$

Une possibilité est alors de tout exprimer en fonction de $\cos \omega_f t$ et $\sin \omega_f t$ (en développant les fonctions trigonométriques). L'équation (1.22) étant vraie à chaque instant, les coefficients de chacune de ces deux fonctions indépendantes doivent être nuls, ce qui fixe les paramètres x_0 et φ . Il est plus rapide de considérer juste les instants où $\omega_f t = \varphi$, et ceux où $\omega_f t - \varphi = \pi/2$. On en déduit

$$\begin{cases} (k - m\omega_f^2)x_0 = F_0 \cos \varphi \\ 2\mu m\omega_f x_0 = F_0 \sin \varphi \end{cases} \quad \text{soit en définitive} \quad (1.23)$$

$$\tan \varphi = \frac{2\mu\omega_f}{\omega^2 - \omega_f^2}, \quad x_0 = \frac{F_0}{m\sqrt{4\mu^2\omega_f^2 + (\omega^2 - \omega_f^2)^2}}$$

où on a introduit la pulsation propre de l'oscillateur *non amorti*, $\omega \equiv \sqrt{k/m}$.

1.3.2 Evolution de la phase et de l'amplitude

La phase est nulle pour $\omega_f = 0$, passe par $\pi/2$ pour $\omega_f = \omega$ puisque la tangente diverge, et tends vers π lorsque $\omega_f \rightarrow \infty$. Son évolution est représentée en Fig. 1.6.

L'amplitude x_0 présente un maximum lorsque le terme sous la racine est minimum. Notons le $D(\omega_f^2)$.

$$\frac{dD}{d\omega_f^2} = 4\mu^2 - 2(\omega^2 - \omega_f^2) = 0 \quad \implies \quad \omega_f^{\text{res}} = \sqrt{\omega^2 - 2\mu^2} \quad (1.24)$$

Deux cas se présentent alors. Si ω_{res} est réelle, soit $\omega > \sqrt{2}\mu$, il y a résonance, l'amplitude valant alors

$$x_0^{\text{res}} = \frac{F_0}{2m\mu\omega\sqrt{1 - \mu^2/\omega^2}} \approx \frac{F_0}{2m\mu\omega} = \frac{F_0}{m\omega^2}Q = x_0(\omega_f = 0) \times Q \quad (1.25)$$

où l'approximation est valable à faible amortissement, et où on a utilisé l'expression du facteur de qualité donnée par l'équation (1.15). On a introduit l'amplitude à fréquence d'excitation nulle, pour bien montrer que le facteur de qualité représente l'amplification de l'oscillateur à la résonance. On définit la *bande passante* comme l'écart en fréquence $\Delta\omega_f$ telle que l'amplitude soit réduite d'un facteur $\sqrt{2}$ (l'énergie est alors divisée par 2). Elle a une expression simple en amortissement très faible,

pour lequel $\omega_f^{\text{res}} \approx \omega$ et $\Delta\omega_f/\omega \ll 1$. Les pulsations sont telles que le terme dans le radical vaut le double de sa valeur à la résonance, et

$$4\mu^2\omega_f^2 + (\omega^2 - \omega_f^2)^2 \approx 8\mu^2\omega^2 \implies (\omega^2 - \omega_f^2)^2 \approx 4\mu^2\omega^2 \implies 2\omega(\omega_f - \omega) \approx \pm 2\mu\omega \quad (1.26)$$

La bande passante vaut donc

$$\frac{\Delta\omega_f}{\omega_f^{\text{res}}} \equiv \frac{\omega_f^+ - \omega_f^-}{\omega_f^{\text{res}}} \approx \frac{2\mu}{\omega} = \frac{1}{Q} \quad (1.27)$$

ce qui donne la signification physique du facteur de qualité, et montre que la résonance est d'autant plus étroite que son maximum est plus élevé.

Dans le cas d'amortissement fort, $\omega < \sqrt{2}\mu$, il n'y a plus de résonance et la courbe d'amplitude est monotone décroissante. Un exemple est représenté en pointillés sur la Fig. 1.6. On notera que le régime d'amortissement fort apparaît avant que l'oscillateur amorti soit en régime apériodique $\omega \leq \mu$.

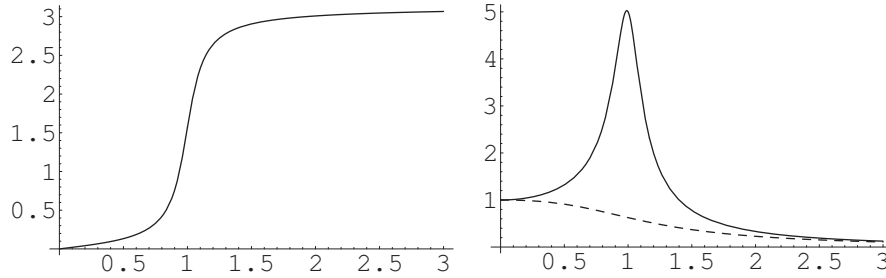


Figure 1.6: Variation de la phase (à gauche) et de l'amplitude (adimensionnée par $F_0/(m\omega^2)$, à droite) d'un oscillateur forcé sinusoidalement, en fonction de ω_f/ω . En traits pleins, évolution de l'amplitude pour $\mu = 0.1\omega$ (amortissement faible) et en traits pointillés pour $\mu = 0.8\omega$. Dans ce cas, on est en amortissement fort et il n'y a pas de résonance. L'évolution de la phase est donnée pour $\mu = 0.1\omega$.

Exercice 4 : En pratique, on force bien souvent un pendule en imposant non pas une force s'exerçant sur la masse, mais le déplacement du point d'attache du ressort. Tracer la courbe d'amplitude $x_0(\omega_f)$ dans ce dernier cas. On reprendra le cas du "peson à ressort", en supposant que le point d'attache du pendule a un mouvement $x_e \cos(\omega_f t)$, et en introduisant un terme d'amortissement proportionnel à la vitesse relative (c'est-à-dire la vitesse dans le référentiel où le point d'attache est immobile; ce choix modélise, par exemple, un amortisseur de voiture).

1.4 Oscillateurs couplés

Nous allons traiter explicitement le cas particulièrement simple représenté sur la Fig. 1.7. Les deux masses m sont identiques, reliées à deux murs rigides par des ressorts identiques de raideurs k , et couplées entre elles par un ressort de raideur K . Leurs déplacements par rapport à leur position d'équilibre seront notés x_1 (resp. x_2) pour la masse de gauche (resp. de droite). On suppose que leur mouvement s'effectue suivant un axe Ox orienté vers la droite, horizontal, on néglige tout frottement ainsi que la gravité.

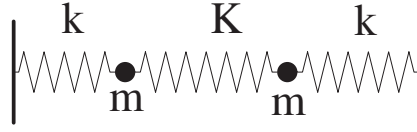


Figure 1.7: Exemple d'oscillateurs couplés, ici par le ressort de raideur K .

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit simplement

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -kx_1 + K(x_2 - x_1) \\ m\ddot{x}_2 = -kx_2 - K(x_2 - x_1) \end{cases} \quad (1.28)$$

En effet, soient l_0 (resp. L_0) la longueur à vide d'un ressort de constante k (resp. K). Au repos, la masse (1) est en $x = l$, la masse (2) en $x = l + L$ (en orientant l'axe des x positivement vers la droite), et l'équilibre de chacune des deux masses se traduit par

$$\begin{cases} (1) : & -k(l - l_0) + K[(L + l) - l - L_0] = 0 \\ (2) : & k[L + 2l - (l + L) - l_0] - K(L + l - l - L_0) = 0 \end{cases}$$

soit

$$k(l - l_0) = K(L - L_0)$$

Les équations dynamiques s'écrivent alors

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k(l + x_1 - l_0) + K[(L + l + x_2) - (l + x_1) - L_0] \\ m\ddot{x}_2 = -K[(L + l + x_2) - (l + x_1) - L_0] + k[L + 2l - (L + l + x_2) - l_0] \end{cases}$$

ce qui, après simplifications (en utilisant en particulier l'équation à l'équilibre) donne bien le système (1.28).

Par analogie avec l'oscillateur à un seul degré de liberté, on peut chercher la solution sous la forme

$$x_i = X_i e^{i\omega t} \quad (1.29)$$

où X_1 et X_2 sont des constantes (complexes) et où la solution physique représente bien sûr la partie réelle de la solution complexe. Si on injecte cette forme de solution dans le système d'équations différentielles (1.28), on obtient un système d'équations algébriques linéaires portant sur les amplitudes :

$$\begin{cases} (K + k - m\omega^2)X_1 - KX_2 = 0 \\ -KX_1 + (K + k - m\omega^2)X_2 = 0 \end{cases} \quad (1.30)$$

Ce système étant homogène, sa solution est identiquement nulle s'il s'agit d'un système de Kramer, c'est-à-dire si son déterminant est nul. Comme nous cherchons précisément une solution non triviale, on va choisir la pulsation ω de telle sorte que le déterminant du système soit nul. L'équation donnant les pulsations possibles est

$$\begin{vmatrix} K + k - m\omega^2 & -K \\ -K & K + k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad \implies \quad K + k - m\omega^2 = \pm K \quad (1.31)$$

et il y a donc deux solutions,

$$\begin{cases} \omega_+ = \sqrt{k/m} \\ \omega_- = \sqrt{(2K + k)/m} \end{cases} \quad (1.32)$$

Les deux fréquences que nous venons de calculer sont appelées *fréquences propres* du système d'oscillateurs couplés¹, et les mouvements correspondants sont les *modes propres* de ce système. Les deux modes propres sont tels que les oscillations du système sont purement harmoniques, à la pulsation correspondante. Dans le cas général, l'oscillation du système couplé présente des battements entre les deux fréquences propres.

Dans ce cas particulier, l'identification des modes propres est particulièrement simple. Lorsque $\omega = \omega_+$, le système (1.30) impose $X_1 = X_2$, tandis que pour $\omega = \omega_-$ on trouve $X_1 = -X_2$. Ces modes sont représentés Fig. 1.8. En valeur absolue, les déplacements des deux masses sont identiques à chaque instant pour les deux modes. Dans le premier les deux masses évoluent en phase. La fréquence propre est celle commune aux oscillateurs non couplés, car le ressort central ne joue aucun rôle. Dans le deuxième, les masses sont à chaque instant en opposition de phase.

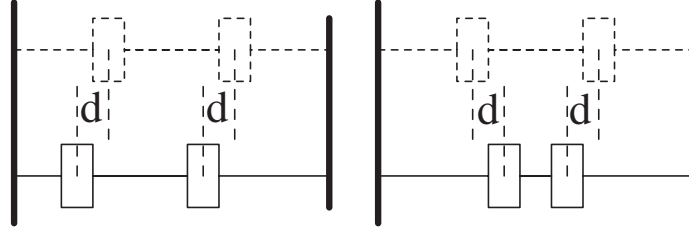


Figure 1.8: Modes propres du système de la Fig. 1.7. Les dessins en pointillés représentent l'état d'équilibre, ceux en traits pleins le mouvement à un instant donné. A gauche, les deux oscillateurs sont en phase, à droite en opposition de phase.

Dans le cas général, la solution est une superposition linéaire des modes propres, soit ici

$$\begin{cases} x_1(t) = A \cos(\omega_+ t + \phi) + B \cos(\omega_- t + \psi) \\ x_2(t) = A \cos(\omega_+ t + \phi) - B \cos(\omega_- t + \psi) \end{cases} \quad (1.33)$$

où A et B sont deux amplitudes réelles, ϕ et ψ deux phases, déterminées par les conditions initiales².

Si par exemple à l'instant $t = 0$ les deux masses sont aux positions $x_1(t = 0) = a$ et $x_2(t = 0) = 0$, lâchées sans vitesse initiale

$$\dot{x}_1(t = 0) = 0 = \dot{x}_2(t = 0), \quad (1.34)$$

le mouvement est donné par

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{a}{2} \cos \omega_+ t + \frac{a}{2} \cos \omega_- t \\ x_2(t) = \frac{a}{2} \cos \omega_+ t - \frac{a}{2} \cos \omega_- t \end{cases} \quad (1.35)$$

¹En Mathématiques, l'équation (1.32) est appelée *équation caractéristique*, et ses racines les *racines caractéristiques*.

² A et B correspondent aux modules des amplitudes complexes X_1 et X_2 , ϕ et ψ à leurs arguments

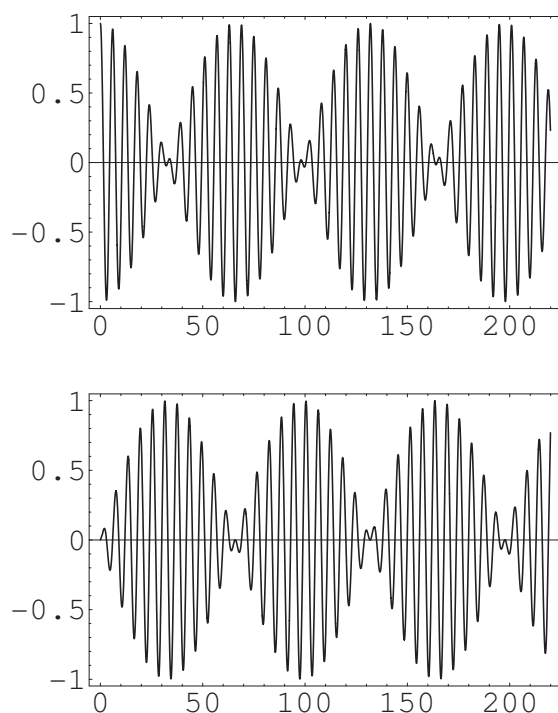


Figure 1.9: Visualisation de la solution (1.35) (x_1 en haut, x_2 en bas). On a pris $K = k/10$, ce qui correspond à un couplage faible, et permet de bien visualiser les battements. En abscisse on porte un temps sans dimension $\tau \equiv \omega_+ t$. Dans ces unités, on a donc $\omega_+ = 1$ et $\omega_- = \sqrt{1.2}$.

Exercice 5 : On considère un système de deux pendules pesants constitué de deux masses ponctuelles m_1 et m_2 situées aux extrémités de deux tiges sans masse de même longueur L . Ces tiges sont solidaires d'un ressort de torsion qui exerce un couple de rappel $-C(\theta_1 - \theta_2)$ (voir Fig. 1.10). Déterminer les fréquences propres et modes propres des petites oscillations. Considérer en particulier le cas $m_1 = m_2 \equiv m$.

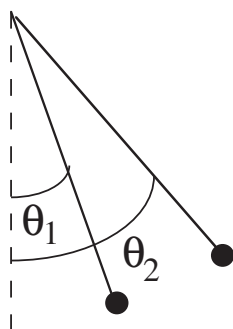


Figure 1.10: Schéma d'un pendule double.

Chapitre 2

Champs de vecteurs. Torseurs

2.1 Rappels

Le but des rappels ci-dessous est essentiellement de fixer du vocabulaire. Aucune démonstration (ou presque!) ne sera fournie, et on ne cherche pas de résultats généraux, puisqu'en Mécanique intervient seul l'espace à trois dimensions.

2.1.1 Espaces vectoriels

Un *espace vectoriel* E (en pratique, $\mathbb{R}^3$) sur un corps K est un ensemble d'objets muni d'une loi d'addition interne $+$, et de la multiplication par un *scalaire*, c'est-à-dire par un élément de K , tel que:

- $+$ est commutative et associative
- $(\exists \mathbf{0} \in E), (\forall \mathbf{u} \in E), \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$
- $(\forall \mathbf{u} \in E), (\exists -\mathbf{u} \in E), \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$
- $(\forall c \in K), (\forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in E^2), c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$
- $(\forall (a, b) \in K^2), (\forall \mathbf{u} \in E), (a + b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}$
- $(\forall \mathbf{u} \in E), 1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

On aura noté que par convention les éléments de l'espace vectoriel, appelés *vecteurs*, sont écrits en **gras**, à la différence des scalaires. Désormais, K sera le corps des réels, $K \equiv \mathbb{R}$.

Si les vecteurs $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ engendrent E , soit si

$$(\forall \mathbf{u} \in E), (\exists (a_1, a_2, \dots, a_n) \in K^n), \mathbf{u} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \dots + a_n\mathbf{v}_n \quad (2.1)$$

et si ils sont linéairement indépendants, c'est-à-dire

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \dots + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \implies \forall i \in [1, n], a_i = 0, \quad (2.2)$$

alors $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ est une *base* de E .

La *dimension* de E est alors n , nombre d'éléments de la base¹. Les scalaires a_i sont les *coordonnées* de $\mathbf{u}$ dans la base considérée.

¹Nous nous limitons implicitement ici au cas des espaces vectoriels de dimension finie. En pratique, d'ailleurs, sauf exception n sera égal à 3, le nombre de dimensions de l'espace physique.

2.1.2 Espaces vectoriels Euclidiens

Un *produit scalaire* sur l'espace vectoriel E est une application

$$\left| \begin{array}{l} E \times E \rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \rightarrow \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \end{array} \right. \quad (2.3)$$

qui possède les propriétés suivantes:

- $\forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in E^2, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
- $\forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in E^3, \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
- $\forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, (\lambda \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \lambda(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (\lambda \mathbf{v})$

On se limitera à des produits scalaires *non dégénérés*, tels que

$$\text{Si } \mathbf{v} \in E, \text{ si } \forall \mathbf{w} \in E, \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0 \text{ alors } \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (2.4)$$

et même *définis positifs* c'est-à-dire tels que

$$\forall \mathbf{v} \in E, \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0 \text{ et si } \mathbf{v} \neq \mathbf{0} \text{ alors } \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} > 0. \quad (2.5)$$

Par exemple, citons le produit scalaire canonique sur le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} \equiv \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

où les x_i (resp. les y_i) sont les coordonnées du vecteur $\mathbf{X}$ (resp. du vecteur $\mathbf{Y}$).

On peut alors définir la *norme* d'un vecteur,

$$\|\mathbf{v}\| \equiv \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}. \quad (2.6)$$

Si deux vecteurs ont leur produit scalaire nul, ils sont dits *orthogonaux*. Si le produit scalaire est non dégénéré, $\mathbf{0}$ est le seul vecteur qui soit orthogonal à tous les autres. S'il est défini positif, $\mathbf{0}$ est le seul vecteur orthogonal à lui même.

On démontre les deux importants résultats suivants:

Théorème : Tout $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de **dimension finie**, muni d'un **produit scalaire défini positif**, (et non réduit au seul vecteur nul!) possède une **base orthonormée** $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ telle que

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$$

où on a introduit le *symbole de Kronecker* δ_{ij} défini par

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \quad (2.7)$$

Théorème : Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie $\dim E = n$, W un **sous-espace vectoriel** de E (c'est-à-dire un ensemble de vecteurs de E invariant sous l'application des lois d'addition des vecteurs et de multiplication par un réel) de dimension $\dim W = r < n$. On définit alors

$$W^\perp \equiv \{\mathbf{v} \in E, \forall \mathbf{u} \in W, \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0\}.$$

$W^\perp$ est appelé *l'orthogonal* de W . C'est un **sous-espace vectoriel** de E , tel que

$$\dim W + \dim W^\perp = \dim E.$$

2.1.3 Espaces affines

Un *espace affine* $\mathcal{E}$ est un ensemble d'objets appelés *points*, tel qu'il existe une *application surjective*

$$\left| \begin{array}{l} \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow E \\ (A, B) \rightarrow \mathbf{AB} \end{array} \right. \quad (2.8)$$

qui possède les propriétés suivantes:

- $\forall (A, B) \in \mathcal{E}^2, \mathbf{AB} = -\mathbf{BA}$
- $\forall (A, B, C) \in \mathcal{E}^3, \mathbf{AC} = \mathbf{AB} + \mathbf{BC}$
- $\forall O \in \mathcal{E}, \forall \mathbf{V} \in E, \exists ! A \in \mathcal{E}, \mathbf{OA} = \mathbf{V}$.

Les points d'un espace affine sont définis dans un *repère* formé d'un point quelconque $O \in \mathcal{E}$, appelé *origine*, et d'une base de l'espace vectoriel associé E .

Dans $\mathbb{R}^3$, que l'on munit aussi facilement d'une structure d'espace affine que d'espace vectoriel, on écrira ces repères $R(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ ou $R(O, x, y, z)$ suivant qu'on utilise les vecteurs de base $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ de $\mathbb{R}^3$ considéré comme un espace vectoriel, où les coordonnées (x, y, z) des points M de $\mathbb{R}^3$ considéré comme un espace affine. Les deux sont possibles, car

$$M(x, y, z) \iff \mathbf{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Une notion importante par la suite est celle de *pointeur*. C'est le couple d'un vecteur $\mathbf{V}$ de E et d'un point A de $\mathcal{E}$, noté $(A, \mathbf{V})$.

Un exemple typique en Mécanique est le couple d'une *force* et de son *point d'application*, tels que les couples

- (point d'attache d'un fil, tension du fil)
- (centre de gravité, poids)
- (charge électrique ponctuelle, force électrostatique due à un champ électrique)

2.1.4 Opérations sur les vecteurs

Produit scalaire

Nous l'avons déjà défini. Rappelons quelques formules valables dans $\mathbb{R}^3$, l'espace vectoriel qui nous intéresse en pratique, muni de la base canonique (la base orthonormée dont on sait qu'elle existe puisqu'un produit scalaire défini positif existe,

et que cet espace vectoriel est de dimension finie 3)

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

Alors si

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}, \quad \|\mathbf{U}\| = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2}, \quad (2.10)$$

et

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = U_1 V_1 + U_2 V_2 + U_3 V_3 = \sum_{i=1}^3 U_i V_i = \|\mathbf{U}\| \|\mathbf{V}\| \cos \theta, \quad (2.11)$$

où dans la dernière expression on a introduit l'angle θ entre les deux vecteurs. Le produit scalaire est nul si les deux vecteurs sont orthogonaux, soit $\theta = \pi/2$.

Produit vectoriel

C'est une opération de l'espace vectoriel dans lui même, définie par

$$\mathbf{U} \wedge \mathbf{V} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} U_2 V_3 - U_3 V_2 \\ U_3 V_1 - U_1 V_3 \\ U_1 V_2 - U_2 V_1 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Une propriété importante est que

$$\|\mathbf{U} \wedge \mathbf{V}\| = \|\mathbf{U}\| \|\mathbf{V}\| \sin \theta \quad (2.13)$$

La norme du produit vectoriel de deux vecteurs a une signification géométrique simple : c'est *l'aire du parallélogramme* construit sur ces deux vecteurs. Le produit vectoriel est nul lorsque les deux vecteurs sont colinéaires ($\theta = 0$).

Nous allons aussi démontrer deux résultats importants.

Théorème : Soit E un espace vectoriel de dimension finie n , muni d'un produit scalaire défini positif, et une application $f : E \rightarrow E$ vérifiant l'une ou l'autre des deux propriétés ci-dessous : $\forall (\mathbf{U}, \mathbf{V}) \in E^2$,

- $\mathbf{U} \cdot f(\mathbf{V}) = \mathbf{V} \cdot f(\mathbf{U})$ (application *symétrique*)
- $\mathbf{U} \cdot f(\mathbf{V}) = -\mathbf{V} \cdot f(\mathbf{U})$ (application *antisymétrique*)

Alors l'application f est **linéaire**.

Soit donc un vecteur $\mathbf{U}$ quelconque de E . Il s'écrit

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^n u_i \mathbf{e}_i$$

sur une base orthonormée (B.O.N.) de E . Alors on peut écrire

$$\begin{aligned} f(\mathbf{U}) &= \sum_{i=1}^n [f(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{e}_i] \mathbf{e}_i \quad (\text{par définition d'une B.O.N.}) \\ &= \sum_{i=1}^n \pm [\mathbf{U} \cdot f(\mathbf{e}_i)] \mathbf{e}_i \quad (\text{par symétrie, +, ou antisymétrie, -}) \end{aligned}$$

cette dernière expression est bien linéaire en $\mathbf{U}$.

Le deuxième résultat s'énonce comme suit.

Théorème : Les **applications antisymétriques** de $\mathbb{R}^3$ sont les applications

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{U} \rightarrow f(\mathbf{U}) = \mathbf{A}_f \wedge \mathbf{U} \end{cases} \quad (2.14)$$

où $\mathbf{A}_f$ est un vecteur, appelé *vecteur dual* de l'application antisymétrique f .

La démonstration utilise le fait qu'une application antisymétrique (donc linéaire) est caractérisée par une matrice antisymétrique. Dans le cas le plus général,

$$f(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au_2 + bu_3 \\ -au_1 + cu_3 \\ -bu_1 - cu_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -c \\ b \\ -a \end{pmatrix}}_{\equiv \mathbf{A}_f} \wedge \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

Finissons ce paragraphe par une formule utile, celle du *double produit vectoriel*.

$$\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (2.15)$$

Elle permet de démontrer un autre résultat, la *division vectorielle*. Si deux vecteurs non nuls $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont orthogonaux,

$$\exists \mathbf{X}, \mathbf{A} \wedge \mathbf{X} = \mathbf{B} \quad \mathbf{X} = -\frac{1}{A^2} \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \quad (2.16)$$

Remarque : Il existe un autre type d'approche pour le produit vectoriel. Si l'on considère l'équation (2.11), on constate que la sommation porte sur l'indice répété i , qui prend nécessairement ses valeurs de 1 à 3 puisque l'espace est de dimension trois. On peut donc définir une notation condensée, dès lors que la dimension de l'espace dans lequel on travaille est fixée une fois pour toute :

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} \equiv U_i V_i = U_j V_j$$

où par convention *la sommation est implicite sur les indices répétés*, et s'étend de 1 à 3. On appelle cette écriture la *convention d'Einstein*. Un indice répété est un indice *muet*, ce qu'on a illustré ici en remplaçant i par j .

Le produit vectoriel s'exprime avec le *tenseur complètement antisymétrique d'ordre 3*. C'est un ensemble de $3 \times 3 \times 3 = 27$ composantes, dépendant de trois indices :

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j, k) \text{ est une permutation paire de } (1, 2, 3), \\ -1 & \text{si } (i, j, k) \text{ est une permutation impaire de } (1, 2, 3), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Je vous laisse vérifier [comparer à la formule (2.12)] que :

$$(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k$$

La formule du double produit vectoriel s'exprime avec le tenseur ϵ_{ijk} :

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}.$$

La sommation s'opère sur l'indice répété k , qui ne figure donc plus dans le membre de droite. Les δ_{il} sont les symboles de Kronecker, vus au § (2.7).

Pour vous familiariser avec ces écritures, démontrons le :

$$\begin{aligned} [\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C})]_i &= \epsilon_{ijk} A_j (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C})_k \quad (\text{définition du produit vectoriel}) \\ &= \epsilon_{ijk} A_j \epsilon_{klm} B_l C_m \quad (\text{définition du produit vectoriel}) \\ &= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) A_j B_l C_m \quad (\text{double produit vectoriel}) \\ &= (A_j C_j) B_i - (A_j B_j) C_i \quad (\text{utilisation des } \delta) \\ &= [(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B}]_i - [(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}]_i \end{aligned}$$

Produit mixte

Le *produit mixte* de trois vecteurs, noté $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$, est défini de la façon suivante:

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) \equiv \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \\ z_A & z_B & z_C \end{vmatrix} \quad (2.17)$$

On montre facilement que :

- C'est un scalaire,
- sa valeur est inchangée par permutation circulaire des vecteurs,
- $|(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})|$ est le volume du parallélépipède construit sur $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$,
- il est *nul* si un des vecteurs est nul, ou si deux des vecteurs sont colinéaires, ou si les trois vecteurs sont coplanaires.

On en déduit que le vecteur $\mathbf{A} \wedge \mathbf{C}$ est orthogonal à la fois à $\mathbf{A}$ et à $\mathbf{C}$. On a ainsi un moyen très pratique de construire une *base orthonormée directe*² de $\mathbb{R}^3$, en prenant $\mathbf{i}$ unitaire, $\mathbf{j}$ unitaire orthogonal à $\mathbf{i}$, et enfin $\mathbf{k} = \mathbf{i} \wedge \mathbf{j}$.

2.1.5 Champs de vecteurs

Par définition, un *champ de vecteur* est une application d'un espace affine $\mathcal{E}$ dans l'espace vectoriel associé E :

$$\left| \begin{array}{l} \mathcal{E} \rightarrow E \\ M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{V}(M) = \begin{pmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (2.18)$$

C'est une notion tout-à-fait fondamentale en physique, indispensable à la description des phénomènes. Citons quelques exemples:

²Cette notion de base *directe* signifie que l'on a choisi une *orientation* de l'espace affine, en choisissant arbitrairement comme orientation positive (ou directe) celle donnée par la règle du tire-bouchon.

– Le champ de vitesse dans un fluide. Par exemple pour un cisaillement pur, près d’une paroi située en $y = 0$ (Fig. 2.1),

$$\mathbf{V}(M) = \lambda y \mathbf{e}_x = \begin{pmatrix} P(y) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

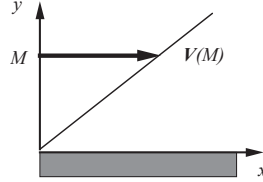


Figure 2.1: Cisaillement pur dans un fluide

– Le champ de gravitation dû à une masse M placée à l’origine, en un point $P(r, \theta, \phi)$ donné en coordonnées sphériques. Ce champ est purement radial

$$\mathbf{g}(P) = -MG \frac{1}{r^2} \mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} P(r) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

– Le champ électrostatique d’un dipôle $\mathbf{p}$ placé comme sur la Fig. 2.2,

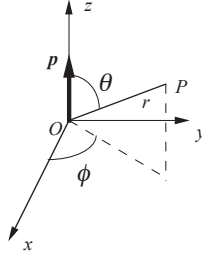


Figure 2.2: Disposition d’un dipôle électrostatique.

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos \theta}{r^3} \mathbf{e}_r + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3} \mathbf{e}_\theta = \begin{pmatrix} P(r, \theta) \\ Q(r, \theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.1.6 Moment d’un vecteur

On définit le *vecteur moment* d’un champ de vecteur $\mathbf{V}(M)$ en un point A , par

$$\mathbf{M}(A, \mathbf{V}(M)) = \mathbf{M}_A(\mathbf{V}(M)) \equiv \mathbf{AM} \wedge \mathbf{V}(M) \quad (2.19)$$

On peut définir aussi le *moment par rapport à un axe*, qui lui est un *scalaire*. Soit donc $\mathbf{e}_\Delta$ un vecteur unitaire sur l’axe Δ . On définit

$$\mathcal{M}_\Delta(\mathbf{V}(M)) \equiv \mathbf{M}(A, \mathbf{V}(M)) \cdot \mathbf{e}_\Delta \quad \text{où} \quad A \in \Delta. \quad (2.20)$$

Cette définition n'aurait aucun sens si elle dépendait du choix du point arbitraire A sur Δ . Soit donc A' un autre point de Δ .

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(A', \mathbf{V}(M)) \cdot \mathbf{e}_\Delta &= (\mathbf{A}'\mathbf{M} \wedge \mathbf{V}(M)) \cdot \mathbf{e}_\Delta \\ &= \underbrace{(\mathbf{A}'\mathbf{A} \wedge \mathbf{V}(M)) \cdot \mathbf{e}_\Delta}_{=0 \quad \text{car} \quad \mathbf{A}'\mathbf{A} // \mathbf{e}_\Delta} + \mathbf{M}(A, \mathbf{V}(M)) \cdot \mathbf{e}_\Delta \end{aligned}$$

ce qui établit le résultat.

2.2 Notion de torseur

2.2.1 Exemples

Plutôt que d'écrire dès le départ la définition d'un torseur, nous allons en voir deux exemples à partir de notions bien connues en Mécanique du point. Les vecteurs seront désormais des éléments de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire canonique, et les point des éléments de l'espace affine $\mathbb{R}^3$.

Moment cinétique

La quantité de mouvement de N particules ponctuelles de masses m_i et de vitesses $\mathbf{v}_i$ est

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \quad (2.21)$$

On définit le moment cinétique σ_K par rapport à un point K quelconque, par

$$\sigma_K \equiv \sum_{i=1}^N \mathbf{K}\mathbf{M}_i \wedge m_i \mathbf{v}_i, \quad (2.22)$$

où les M_i sont les positions des masses ponctuelles. Le moment cinétique est une fonction vectorielle de la position du point K : c'est donc un champ de vecteur.

Calculons maintenant le moment cinétique par rapport à un autre point arbitraire K' .

$$\begin{aligned} \sigma_{K'} \equiv \sum_{i=1}^N \mathbf{K}'\mathbf{M}_i \wedge m_i \mathbf{v}_i &= \sum_{i=1}^N (\mathbf{K}'\mathbf{K} + \mathbf{K}\mathbf{M}_i) \wedge m_i \mathbf{v}_i \\ &= \mathbf{K}'\mathbf{K} \wedge \left(\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \right) + \sigma_K \end{aligned}$$

En identifiant la parenthèse d'après (2.21), on voit apparaître la relation

$$\sigma_{K'} = \sigma_K + \mathbf{P} \wedge \mathbf{K}\mathbf{K}' \quad (2.23)$$

Moment d'un système de forces

Supposons maintenant que sur chaque particule située en M_i s'exerce une force $\mathbf{f}(M_i)$. Le moment en un point K quelconque de ce système de forces est

$$\mathcal{M}_K = \sum_{i=1}^N \mathbf{K}\mathbf{M}_i \wedge \mathbf{f}(M_i). \quad (2.24)$$

Il s'agit à nouveau d'un champ de vecteur.

Comme précédemment, cherchons à calculer ce moment en un autre point K' .

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{K'} &= \sum_{i=1}^N (\mathbf{K}'\mathbf{K} + \mathbf{K}\mathbf{M}_i) \wedge \mathbf{f}(M_i) \\ &= \mathbf{K}'\mathbf{K} \wedge \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{f}(M_i) \right) + \mathcal{M}_K\end{aligned}$$

soit enfin

$$\mathcal{M}_{K'} = \mathcal{M}_K + \mathbf{F} \wedge \mathbf{K}\mathbf{K}', \quad \mathbf{F} \equiv \sum_{i=1}^N \mathbf{f}(M_i) \quad (2.25)$$

où $\mathbf{F}$ est la résultante du système de forces.

Notion de torseur

Les équations (2.23) et (2.25) nous montrent qu'apparaît à chaque fois un champ de vecteur $\mathcal{T}$, application de l'espace affine $\mathcal{E}$ (ici $\mathbb{R}^3$) dans l'espace vectoriel E (ici $\mathbb{R}^3$ aussi), tel qu'il existe un vecteur $\mathbf{R}_{\mathcal{T}}$ appelé *résultante générale*, de sorte qu'on ait

$$\mathcal{T} : \begin{cases} \mathcal{E} \rightarrow E \\ M \rightarrow \mathcal{T}(M) \end{cases}, \quad \forall (M, P) \in \mathcal{E}^2, \quad \mathcal{T}(M) = \mathcal{T}(P) + \mathbf{R}_{\mathcal{T}} \wedge \mathbf{P}\mathbf{M} \quad (2.26)$$

Cette définition peut sembler insatisfaisante, en ce sens qu'elle semble dépendre du choix du point M . Nous verrons au § 2.2.6 qu'il n'en est rien. L'application $\mathcal{T}$ est un *torseur*. On notera $\mathbb{T}$ l'ensemble des torseurs.

Un torseur s'associe naturellement à un ensemble de pointeurs. Soit en effet $\{(A_i, \mathbf{V}_i)\}$ un tel ensemble. Soit O un point quelconque. On peut définir un torseur de résultante $\mathbf{R}$ et de moment $\mathbf{M}(O)$ avec

$$\mathbf{R} \equiv \sum_i \mathbf{V}_i, \quad \mathbf{M}(O) = \sum_i \mathbf{O}\mathbf{A}_i \wedge \mathbf{V}_i. \quad (2.27)$$

La résultante générale et le moment en O sont les *éléments de réduction* en O du torseur.

Autres notations (ajout de janvier 2016)

Un torseur est donné par sa résultante $\mathbf{R}$ et son moment $\mathbf{M}(O)$ en un point quelconque O . Il est donc parfois noté

$$\mathcal{T} = \left\{ \begin{matrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{M}(O) \end{matrix} \right\}_O,$$

voire même directement à partir des coordonnées (X, Y, Z) de la résultante et (L, M, N) du moment en O , ce qui donne

$$\mathcal{T} = \left\{ \begin{matrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{matrix} \right\}_O.$$

2.2.2 Espace vectoriel des torseurs

On montre sans difficulté les résultats suivants:

- La somme de deux torseurs est un torseur, et

$$(\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2)(M) = \mathcal{T}_1(M) + \mathcal{T}_2(M), \quad \mathbf{R}_{\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2} = \mathbf{R}_{\mathcal{T}_1} + \mathbf{R}_{\mathcal{T}_2}$$

- Le produit d'un torseur par un scalaire λ est un torseur, et

$$(\lambda\mathcal{T})(M) = \lambda\mathcal{T}(M), \quad \mathbf{R}_{\lambda\mathcal{T}} = \lambda\mathbf{R}_{\mathcal{T}}$$

- $\mathbb{T}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^6$.
- L'application projection en A , définie par

$$P_A \left| \begin{array}{l} \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \\ \mathcal{T} \rightarrow (\mathbf{R}_{\mathcal{T}}, \mathcal{T}(A)) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{T}$ sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$

2.2.3 Torseurs particuliers

Couples

Les *couples* sont les torseurs de *résultante générale nulle*. L'ensemble des couples est un sous espace vectoriel de $\mathbb{T}$ de dimension 3.

Glisseurs

Un *glisseur* est un torseur $\mathcal{G}$ dont la valeur en au moins un point est nulle. Si A est ce point, et $\mathbf{R}_{\mathcal{G}}$ la résultante de $\mathcal{G}$, alors

$$(\forall M \in \mathbb{R}^3), \quad \mathcal{G}(M) = \mathbf{R}_{\mathcal{G}} \wedge \mathbf{AM} \quad (2.28)$$

Si $\mathbf{R}_{\mathcal{G}}$ est nulle, on a le *torseur nul* (le seul qui soit à la fois couple et glisseur). Sinon, l'ensemble des points $\{M/\mathcal{G}(M) = \mathbf{0}\}$ est la droite Δ passant par A , parallèle à $\mathbf{R}_{\mathcal{G}}$. Elle est appelée *axe central* du glisseur.

Le champ de vecteur $\mathcal{G}(M)$ est *invariant* :

- par *translation* parallèlement à l'axe central Δ
- par *rotation* d'axe Δ
- par *affinité*³ par rapport à Δ

³L'affinité par rapport à Δ est la transformation affine f qui à un point $M \in \mathcal{E}$ fait correspondre $f(M) = M'$ tel que

$$\mathbf{p}(\mathbf{M})\mathbf{M}' = \alpha\mathbf{p}(\mathbf{M})\mathbf{M}$$

où α est une constante réelle, et $p(M)$ est la projection orthogonale de M sur la droite Δ . Si $\alpha = 1$ f est l'identité, si $\alpha = -1$ f est la symétrie par rapport à Δ , si $\alpha = 0$ f est la projection orthogonale sur Δ .

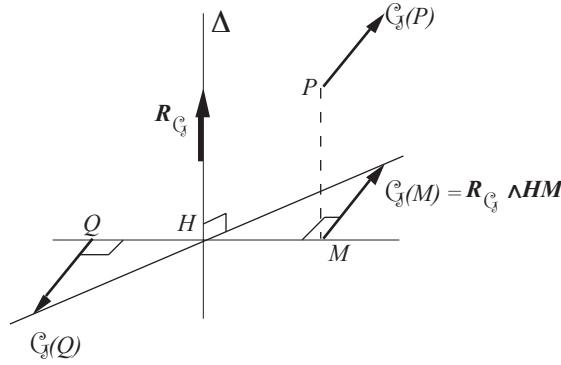


Figure 2.3: Axe central d'un glisseur

Cette propriété d'invariance caractérise le champ de vecteur. Elle signifie que si f est l'une quelconque de ces trois transformations,

$$(\forall M \in \mathcal{E}), \quad \mathcal{G}[f(M)] = f[\mathcal{G}(M)]. \quad (2.29)$$

On notera que l'ensemble des glisseurs *n'est pas* un sous espace vectoriel de $\mathbb{T}$. Par contre, l'ensemble des glisseurs d'axes concourant en A , plus le torseur nul, est un sous espace vectoriel de $\mathbb{T}$.

Théorème : Pour qu'un torseur $\mathcal{T}$ de résultante $\mathbf{R}_{\mathcal{T}}$ non nulle soit un glisseur, il faut et il suffit qu'il existe un point M tel que $\mathbf{R}_{\mathcal{T}} \cdot \mathcal{T}(M) = 0$.

La condition nécessaire est triviale. Montrons la condition suffisante. On sait que la résultante n'est pas le vecteur nul, et on peut supposer que $\mathcal{T}(M)$ non plus (sinon le problème est résolu!). Alors de l'existence de ces deux vecteurs orthogonaux, on déduit de la formule de division vectorielle (2.16)

$$\exists \mathbf{X}, \quad \mathbf{R}_{\mathcal{T}} \wedge \mathbf{X} = \mathcal{T}(M)$$

par ailleurs, on sait qu'on peut trouver un point A tel que $\mathbf{X} = \mathbf{AM}$. On a alors, en utilisant la formule des torseurs (2.26) et l'équation ci-dessus,

$$\mathcal{T}(A) = \mathcal{T}(M) + \mathbf{R}_{\mathcal{T}} \wedge \mathbf{MA} = \mathcal{T}(M) - \mathbf{R}_{\mathcal{T}} \wedge \mathbf{X} = \mathbf{0}$$

ce qui complète la démonstration : A est un point tel que $\mathcal{T}(A) = \mathbf{0}$, et le torseur est un glisseur.

2.2.4 Invariant scalaire

Pour tout torseur $\mathcal{T}$ de résultante $\mathbf{R}_{\mathcal{T}}$, la quantité

$$\mathbf{R}_{\mathcal{T}} \cdot \mathcal{T}(A) \quad (2.30)$$

est un *invariant scalaire*.

Cette quantité est évidemment scalaire, et *invariant* signifie qu'elle ne dépend pas du choix du point A . Vérifions le. Soit B un point quelconque.

$$\mathcal{T}(B) = \mathcal{T}(A) + \mathbf{R}_{\mathcal{T}} \wedge \mathbf{AB} \implies \mathbf{R}_{\mathcal{T}} \cdot \mathcal{T}(B) = \mathbf{R}_{\mathcal{T}} \cdot \mathcal{T}(A)$$

2.2.5 Produit de deux torseurs

Théorème : Soient $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ deux torseurs, M un point quelconque. Le scalaire

$$\mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2 \equiv \mathcal{T}_1(M) \cdot \mathbf{R}_{\mathcal{T}_2} + \mathcal{T}_2(M) \cdot \mathbf{R}_{\mathcal{T}_1} \quad (2.31)$$

est indépendant de M . On l'appelle *produit des deux torseurs*. Deux torseurs de produit nul sont dits *orthogonaux*, un torseur orthogonal à lui même est dit *isotrope*.

Reste à prouver l'indépendance de ce scalaire, que nous noterons $S(M)$, par rapport au point M . Soit P un autre point quelconque.

$$\begin{aligned} S(M) - S(P) &= (\mathcal{T}_1(M) - \mathcal{T}_1(P)) \cdot \mathbf{R}_{\mathcal{T}_2} + (\mathcal{T}_2(M) - \mathcal{T}_2(P)) \cdot \mathbf{R}_{\mathcal{T}_1} \\ &= (\mathbf{R}_{\mathcal{T}_1} \wedge \mathbf{PM}) \cdot \mathbf{R}_{\mathcal{T}_2} + (\mathbf{R}_{\mathcal{T}_2} \wedge \mathbf{PM}) \cdot \mathbf{R}_{\mathcal{T}_1} = 0 \end{aligned}$$

Pour écrire la deuxième ligne, on a utilisé à deux reprises la formule des torseurs (2.26), et la dernière égalité s'obtient en remarquant qu'on somme deux produits mixtes qui diffèrent par une transposition, et donc changent de signe.

Les torseurs isotropes sont les torseurs d'invariant scalaire nul. Ce sont donc les couples, de résultante nulle, et les glisseurs dont le moment est nul en un point. Ce produit scalaire n'est donc pas défini. Il n'est pas non plus positif, puisque le signe de l'invariant scalaire (2.30) est bien sûr quelconque.

2.2.6 Éléments centraux. Décomposition centrale

Ce paragraphe est important, puisqu'il va nous montrer que la définition d'un torseur est intrinsèque, c'est-à-dire qu'elle ne dépend en fait pas du point arbitraire en lequel on se donne son moment.

Soit donc M un point quelconque, $\mathcal{T}$ un torseur de résultante non nulle $\mathbf{R}_{\mathcal{T}}$ (dans le cas contraire, c'est un couple et son moment est le même en tout point, il est donc parfaitement caractérisé). On va le décomposer par projection orthogonale sur $\mathbf{R}_{\mathcal{T}}$

$$\mathcal{T}(M) = \mathcal{C}(M) + \mathcal{G}(M) \quad \text{où} \quad \begin{cases} \mathcal{C}(M) // \mathbf{R}_{\mathcal{T}} \\ \mathcal{G}(M) \perp \mathbf{R}_{\mathcal{T}} \end{cases} \quad (2.32)$$

On a facilement

$$\mathcal{C}(M) = \left(\frac{\mathbf{R}_{\mathcal{T}}}{\|\mathbf{R}_{\mathcal{T}}\|} \cdot \mathcal{T}(M) \right) \frac{\mathbf{R}_{\mathcal{T}}}{\|\mathbf{R}_{\mathcal{T}}\|} = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{T} \circ \mathcal{T}}{\|\mathbf{R}_{\mathcal{T}}\|^2} \mathbf{R}_{\mathcal{T}} \equiv \mathbf{I}. \quad (2.33)$$

Le vecteur $\mathbf{I}$ est manifestement une caractéristique intrinsèque du torseur, indépendant de M . C'est *l'invariant vectoriel* du torseur $\mathcal{T}$. Le champ de vecteur $\mathcal{C}(M)$ est donc constant, uniformément égal à $\mathbf{I}$: C'est un *couple*.

Le torseur $\mathcal{G}$ a donc comme résultante $\mathbf{R}_{\mathcal{T}}$, puisque celle de $\mathcal{C}$ est nulle. Mais alors $\mathbf{R}_{\mathcal{G}} \cdot \mathcal{G}(M) = \mathbf{R}_{\mathcal{T}} \cdot \mathcal{G}(M) = 0$ par définition de $\mathcal{G}$ (2.32)! Donc $\mathcal{G}$ est un *glisseur*. L'axe Δ du glisseur $\mathcal{G}$ est *l'axe central* du torseur $\mathcal{T}$. En tout point P de cet axe, $\mathcal{T}(P) = \mathbf{I}$ qui de ce fait est appelé *moment central* de $\mathcal{T}$.

La Fig. 2.3 se généralise comme ci-dessous Fig. 2.4.

Tout torseur $\mathcal{T}$ est la somme d'un *couple* et d'un *glisseur*, avec moment du couple et résultante du glisseur *parallèles*. On appelle cette somme la *décomposition centrale* du torseur $\mathcal{T}$.

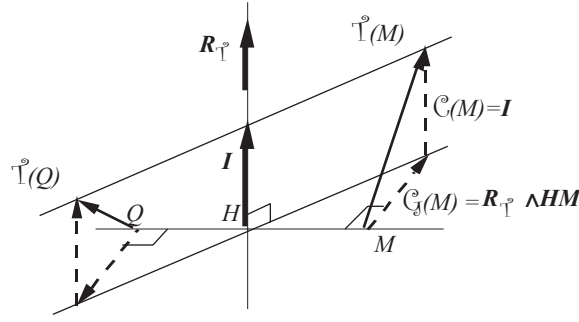


Figure 2.4: Décomposition centrale d'un torseur

2.2.7 Equiprojectivité.

Théorème : Si $\mathcal{T}$ est un torseur, M et P deux points quelconques, les projections orthogonales de $\mathcal{T}(M)$ et $\mathcal{T}(P)$ sur la droite MP sont égales. Réciproquement, tout champ de vecteur ayant cette propriété d'*equiprojectivité* est un torseur.

Pour le sens direct, il suffit d'écrire la formule des torseurs :

$$\mathcal{T}(P) = \mathcal{T}(M) + \mathbf{R}_{\mathcal{T}} \wedge \mathbf{MP} \implies \mathcal{T}(P) \cdot \mathbf{MP} = \mathcal{T}(M) \cdot \mathbf{MP}$$

ce qui assure le résultat.

Pour démontrer la réciproque, soit un champ de vecteur équiprojectif f :

$$\forall (M, P), \quad f(M) \cdot \mathbf{MP} = f(P) \cdot \mathbf{MP}.$$

Soit alors A un point quelconque. Enlevons à chaque membre de cette équation la quantité $f(A) \cdot \mathbf{MP}$. On peut écrire

$$(f(M) - f(A)) \cdot (\mathbf{AP} - \mathbf{AM}) = (f(P) - f(A)) \cdot (\mathbf{AP} - \mathbf{AM})$$

soit

$$(f(M) - f(A)) \cdot \mathbf{AP} = -(f(P) - f(A)) \cdot \mathbf{AM} \text{ car } \begin{cases} f(A) \cdot \mathbf{AP} = f(P) \cdot \mathbf{AP} \\ f(A) \cdot \mathbf{AM} = f(M) \cdot \mathbf{AM} \end{cases}$$

en utilisant deux fois la propriété d'équiprojectivité du champ de vecteur f .

L'étape suivante utilise une astuce d'écriture. Tout point M peut s'écrire $A + \mathbf{AM}$, ce qui n'est qu'une autre façon de dire que les deux points A et M de l'espace affine définissent un vecteur $\mathbf{AM}$ de l'espace vectoriel associé. On a donc démontré

$$(f(A + \mathbf{AM}) - f(A)) \cdot \mathbf{AP} = -(f(A + \mathbf{AP}) - f(A)) \cdot \mathbf{AM}$$

Cette équation montre que la fonction g de l'espace vectoriel dans lui-même (ce n'est donc *pas* un champ de vecteur!) définie par

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{U} \rightarrow g(\mathbf{U}) \equiv f(A + \mathbf{U}) - f(A), \end{cases}$$

est *antisymétrique*. On peut donc lui appliquer le résultat (2.14) et en déduire que

$$\exists \mathbf{R}, \quad g(\mathbf{U}) = \mathbf{R} \wedge \mathbf{U}$$

soit enfin

$$f(M) = f(A) + \mathbf{R} \wedge \mathbf{AM}$$

Le champ de vecteur f est bien un torseur.

2.2.8 Dérivée d'un torseur

Nous aurons à considérer par la suite des torseurs dépendant du temps. On a très envie de définir la dérivée temporelle d'un torseur de la façon suivante :

Théorème : Si M est un **point fixe** (c'est-à-dire indépendant du temps) dans le repère (R) , et $\mathcal{T}$ un torseur fonction du temps donné par sa résultante $\mathbf{R}_{\mathcal{T}}$ et son moment en M $\mathcal{T}(M)$, alors la dérivée temporelle de $\mathcal{T}$ est le torseur $\frac{d\mathcal{T}}{dt}$ de résultante $\mathbf{R}_{d\mathcal{T}/dt} = \frac{d\mathbf{R}_{\mathcal{T}}}{dt}$ et de moment en M : $\frac{d\mathcal{T}}{dt}(M) \equiv \frac{d\mathcal{T}(M)}{dt}$.

Il n'est pas complètement évident que l'on ait ainsi défini un torseur. La définition de la résultante ne pose pas de problème. Par ailleurs, on peut écrire, si P est un autre point fixe quelconque de (R) :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathcal{T}(P)) &= \frac{d}{dt} \underbrace{(\mathcal{T}(M) + \mathbf{R}_{\mathcal{T}} \wedge \mathbf{MP})}_{\tau \text{ est un torseur}} \\ &= \frac{d\mathcal{T}(M)}{dt} + \frac{d\mathbf{R}_{\mathcal{T}}}{dt} \wedge \mathbf{MP} = \frac{d\mathcal{T}}{dt}(M) + \mathbf{R}_{d\mathcal{T}/dt} \wedge \mathbf{MP} = \frac{d\mathcal{T}}{dt}(P) \end{aligned}$$

ce qui établit que le champ de vecteur dérivé ainsi défini est bien un torseur.

Chapitre 3

Cinématique du solide

3.1 Champ de vitesse d'un solide. Torseur cinématique

3.1.1 Vecteur rotation instantanée

Définition : Par *solide*, nous entendrons désormais toujours un solide *indéformable*, ou *parfaitement rigide*.

Les mouvements seront repérés dans un repère (ou *référentiel*) fixe $R(O, X, Y, Z)$ ou $R(O, \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$. Le point O est l'origine du repère. Nous utiliserons des majuscules, que ce soient pour les coordonnées (X, Y, Z) des points ou les vecteurs de base $(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$ du repère fixe (R) .

Au solide est lié un repère, *a priori* mobile, noté $S(C, x, y, z)$ ou $S(C, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. Le point C est son origine, et nous utiliserons systématiquement des lettres minuscules pour les coordonnées et les vecteurs de base du repère lié au solide. Dans ce repère, par définition, tout point M du solide est immobile.

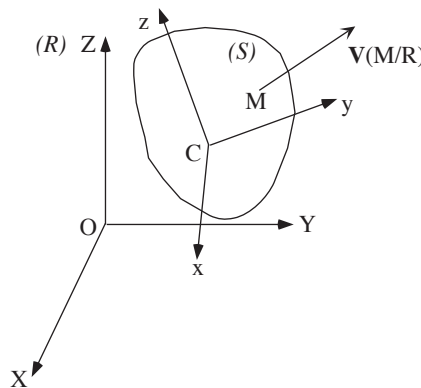


Figure 3.1: Repère fixe et repère lié au solide.

Soient alors deux vecteurs $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$ constants dans (S) . Ils sont donc *a priori* dépendants du temps dans (R) . Par contre, leur produit scalaire est indépendant du temps dans les deux repères, ce qui permet d'écrire

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}) = \frac{d\mathbf{U}}{dt} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{U} \cdot \frac{d\mathbf{V}}{dt} = 0. \quad (3.1)$$

On en déduit que l'application de l'espace vectoriel dans lui-même qui à un vecteur associe sa dérivée par rapport au temps est une application *antisymétrique*. On peut donc appliquer le deuxième théorème du § 2.1.4, qui dit qu'il existe un vecteur noté $\boldsymbol{\Omega}(S/R)$ tel que

$$(\forall \mathbf{U} \text{ constant dans } (S)), \quad \frac{d\mathbf{U}}{dt} = \boldsymbol{\Omega}(S/R) \wedge \mathbf{U}. \quad (3.2)$$

Le vecteur $\boldsymbol{\Omega}(S/R)$ est le *vecteur rotation instantanée* du solide (S) par rapport au repère (R) . On prendra soin d'utiliser cette notation complète pour $\boldsymbol{\Omega}(S/R)$, puisque le mouvement d'un solide est toujours défini relativement à un repère (ou à un autre solide).

Le vecteur rotation est dit *instantané*, car *a priori* il dépend du temps, en norme et en direction.

Exemple : Supposons qu'il existe une droite Δ de direction fixe à la fois dans (R) et dans (S) . Prenons la comme axe OZ et Oz , en confondant O et C . Le vecteur $\mathbf{K}$ est constant dans (R) , donc $d\mathbf{K}/dt = \mathbf{0}$. Par ailleurs, c'est aussi un vecteur constant de (S) , donc $d\mathbf{K}/dt = \boldsymbol{\Omega}(S/R) \wedge \mathbf{K}$. Il existe donc nécessairement une constante réelle λ telle que $\boldsymbol{\Omega}(S/R) = \lambda \mathbf{K}$.

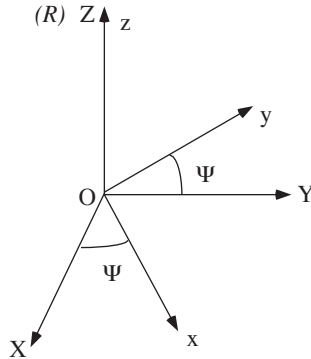


Figure 3.2: Exemple : Rotation autour d'un axe.

Par ailleurs

$$\mathbf{i} = \cos \psi \mathbf{I} + \sin \psi \mathbf{J} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{i}}{dt} = \dot{\psi} (-\sin \psi \mathbf{I} + \cos \psi \mathbf{J}) = \dot{\psi} \mathbf{j}.$$

et $\mathbf{i}$ étant fixe dans (S) ,

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \boldsymbol{\Omega}(S/R) \wedge \mathbf{i} = \lambda \mathbf{k} \wedge \mathbf{i} = \lambda \mathbf{j} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\Omega}(S/R) = \dot{\psi} \mathbf{k} = \dot{\psi} \mathbf{K}.$$

3.1.2 Torseur cinématique

Soient maintenant A et B deux points fixes dans (S) . C'est en particulier le cas pour tout couple de points appartenant au solide¹, puisque celui-ci est indéformable. Le vecteur $\mathbf{AB}$ est donc constant dans (S) , donc d'après (3.2) on peut écrire

$$\frac{d\mathbf{AB}}{dt} = \boldsymbol{\Omega}(S/R) \wedge \mathbf{AB}.$$

¹Ou points matériels. Voir plus loin le § 3.4.1.

Or par ailleurs

$$\frac{d\mathbf{AB}}{dt} = \frac{d\mathbf{OB}}{dt} - \frac{d\mathbf{OA}}{dt} = \mathbf{V}(B/R) - \mathbf{V}(A/R).$$

On aboutit donc à la formule suivante, fondamentale, qui exprime que le champ de vitesse d'un solide indéformable est un torseur, le *torseur cinématique* :

$$\mathbf{V}(B/R) = \mathbf{V}(A/R) + \boldsymbol{\Omega}(S/R) \wedge \mathbf{AB}. \quad (3.3)$$

3.1.3 Éléments de réduction du torseur cinématique. Mouvement hélicoïdal tangent.

Dans ce paragraphe, nous appliquons au cas particulier du torseur cinématique le résultat général du § 2.2.6. Notons pour commencer que le vecteur rotation instantanée est déterminé en principe en écrivant pour les trois vecteurs de base du repère lié au solide que

$$\frac{d\mathbf{e}_i}{dt} = \boldsymbol{\Omega}(S/R) \wedge \mathbf{e}_i,$$

pour $i \in \{x, y, z\}$.

L'*Axe Instantané de Rotation* (AIR) Δ est l'axe central du torseur cinématique. Il est parallèle à $\boldsymbol{\Omega}(S/R)$, et tous ses points sont animés de la même vitesse parallèle à $\boldsymbol{\Omega}(S/R)$ (éventuellement nulle!).

A un instant donné, le mouvement est hélicoïdal, composition d'une rotation autour de l'AIR et d'une translation parallèlement à cet axe. L'axe étant dans le cas le plus général dépendant du temps, on parle de *mouvement hélicoïdal tangent*.

Nous connaissons la direction de l'axe Δ , pour complètement le caractériser il faut trouver un point de cette droite. La connaissance de $\boldsymbol{\Omega}(S/R)$ permet de construire le plan perpendiculaire à Δ , passant par un point P quelconque du solide, dont on suppose la vitesse connue [ce peut être l'origine C de (S) , mais pas nécessairement]. Nous allons déterminer la position du point H , intersection de ce plan avec l'axe.

La formule (3.3) permet d'écrire

$$\mathbf{V}(H/R) = \mathbf{V}(P/R) + \boldsymbol{\Omega}(S/R) \wedge \mathbf{PH}.$$

Le point H étant sur l'axe, sa vitesse est parallèle à $\boldsymbol{\Omega}(S/R)$, ce qui donne

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega}(S/R) \wedge \mathbf{V}(H/R) = \mathbf{0} &= \boldsymbol{\Omega}(S/R) \wedge \mathbf{V}(P/R) + \boldsymbol{\Omega}(S/R) \wedge (\boldsymbol{\Omega}(S/R) \wedge \mathbf{PH}) \\ &= \boldsymbol{\Omega}(S/R) \wedge \mathbf{V}(P/R) - \|\boldsymbol{\Omega}(S/R)\|^2 \mathbf{PH}, \end{aligned}$$

où pour écrire la dernière équation on a développé le double produit vectoriel [équation (2.15)] et utilisé le fait que $\mathbf{PH}$ et $\boldsymbol{\Omega}(S/R)$ sont par hypothèses orthogonaux. On obtient finalement

$$\mathbf{PH} = \frac{\boldsymbol{\Omega}(S/R) \wedge \mathbf{V}(P/R)}{\|\boldsymbol{\Omega}(S/R)\|^2} \quad (3.4)$$

On définit l'*axoïde*, surface engendrée par l'axe Δ au cours du mouvement, dans le référentiel fixe (R) ou dans le référentiel lié au solide (S) (les axoïdes fixes et mobiles n'ont *a priori* aucune raison d'être les mêmes).

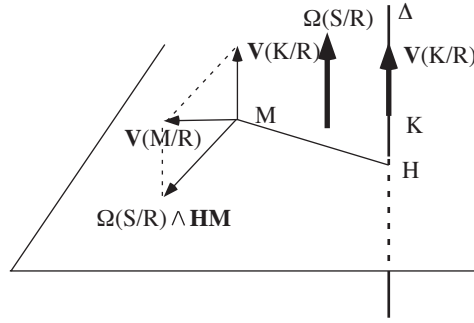


Figure 3.3: Axe instantané de rotation Δ , et construction du champ de vitesse d'un solide pour un point M quelconque.

3.1.4 Champ des accélérations d'un solide

Soient P et M deux points du solide S . Appliquant la formule (3.3), on peut écrire

$$\mathbf{V}(M/R) = \mathbf{V}(P/R) + \boldsymbol{\Omega}(S/R) \wedge \mathbf{PM}.$$

Si nous dérivons les deux membres de cette équation par rapport au temps, et sachant que par définition l'accélération de M dans le référentiel (R) est la dérivée de sa vitesse dans (R) , on a

$$\mathbf{a}(M/R) = \mathbf{a}(P/R) + \dot{\boldsymbol{\Omega}}(S/R) \wedge \mathbf{PM} + \boldsymbol{\Omega}(S/R) \wedge \frac{d\mathbf{PM}}{dt}.$$

Comme $\mathbf{PM}$ est un vecteur constant du solide, on peut lui appliquer le résultat (3.2), ce qui donne le résultat final

$$\mathbf{a}(M/R) = \mathbf{a}(P/R) + \dot{\boldsymbol{\Omega}}(S/R) \wedge \mathbf{PM} + \boldsymbol{\Omega}(S/R) \wedge [\boldsymbol{\Omega}(S/R) \wedge \mathbf{PM}]. \quad (3.5)$$

Cette formule, compliquée et qu'il est sans doute préférable de redémontrer lorsque le cas se présente, donne l'accélération du point M connaissant celle d'un point P quelconque, et le vecteur rotation du solide.

Le troisième terme représente l'accélération axipète. Soit en effet l'axe Δ' passant par P et de direction $\boldsymbol{\Omega}(S/R)$ (Attention! Ce *n'est pas* l'axe instantané de rotation!), et soit H la projection orthogonale de M sur cet axe. Alors $\mathbf{CM} = \mathbf{CH} + \mathbf{HM}$, et

$$\boldsymbol{\Omega}(S/R) \wedge [\boldsymbol{\Omega}(S/R) \wedge \mathbf{PM}] = -\Omega(S/R)^2 \mathbf{HM},$$

qui est orienté en direction de l'axe.

3.2 Changements de référentiels. Composition des mouvements.

Dans ce paragraphe, nous considérerons le référentiel du laboratoire, $R(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ et un repère mobile par rapport à ce référentiel, que nous noterons $T(C, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. Ce repère mobile n'est pas nécessairement lié à un solide, il peut s'agir en pratique d'un repère intermédiaire.

3.2.1 Dérivation d'un vecteur

Soit $\mathbf{W}$ un vecteur mobile à la fois dans (R) et (T) . Ce peut être la position d'un point, sa vitesse, etc..

Si nous exprimons $\mathbf{W}$ dans (T) ,

$$\mathbf{W} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

les coordonnées (x, y, z) dépendent du temps puisque le vecteur est mobile dans (T) , et les vecteurs de base eux-mêmes dépendent du temps dans (R) , donc

$$\left. \frac{d\mathbf{W}}{dt} \right|_R = \underbrace{\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}}_{\equiv d\mathbf{W}/dt|_T} + x \frac{d\mathbf{i}}{dt} + y \frac{d\mathbf{j}}{dt} + z \frac{d\mathbf{k}}{dt}.$$

Les vecteurs de base sont fixes dans (T) , on peut donc leur appliquer la formule (3.2), qui donne

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \boldsymbol{\Omega}(T/R) \wedge \mathbf{i},$$

et de même pour $\mathbf{j}$ et $\mathbf{k}$. On obtient alors en définitive

$$\left. \frac{d\mathbf{W}}{dt} \right|_R = \left. \frac{d\mathbf{W}}{dt} \right|_T + \boldsymbol{\Omega}(T/R) \wedge \mathbf{W} \quad (3.6)$$

De façon parfaitement symétrique, on aurait pu écrire

$$\left. \frac{d\mathbf{W}}{dt} \right|_T = \left. \frac{d\mathbf{W}}{dt} \right|_R + \boldsymbol{\Omega}(R/T) \wedge \mathbf{W}$$

ce qui donne

$$\boldsymbol{\Omega}(T/R) = -\boldsymbol{\Omega}(R/T) \quad (3.7)$$

3.2.2 Composition des rotations

Considérons trois référentiels (R) , (T_1) et (T_2) , et un vecteur $\mathbf{W}$ supposé mobile dans chacun de ces repères. En utilisant le résultat (3.6), on peut écrire

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{W}}_R &= \dot{\mathbf{W}}_{T_1} + \boldsymbol{\Omega}(T_1/R) \wedge \mathbf{W} \\ \dot{\mathbf{W}}_R &= \dot{\mathbf{W}}_{T_2} + \boldsymbol{\Omega}(T_2/R) \wedge \mathbf{W} \\ \dot{\mathbf{W}}_{T_1} &= \dot{\mathbf{W}}_{T_2} + \boldsymbol{\Omega}(T_2/T_1) \wedge \mathbf{W} \end{aligned}$$

ce qui permet d'écrire

$$\dot{\mathbf{W}}_R = \dot{\mathbf{W}}_{T_2} + [\boldsymbol{\Omega}(T_2/T_1) + \boldsymbol{\Omega}(T_1/R)] \wedge \mathbf{W}$$

La comparaison de ce résultat avec la deuxième équation ci-dessus donne la formule de *composition des rotations*,

$$\boldsymbol{\Omega}(T_2/R) = \boldsymbol{\Omega}(T_2/T_1) + \boldsymbol{\Omega}(T_1/R) \quad (3.8)$$

Exemple : Soit une voiture (considérée comme un solide indéformable, liée au référentiel (T_1)) faisant demi tour sur une route horizontale. Dans le référentiel (R) lié à la route, $\boldsymbol{\Omega}(T_1/R) = \omega_a \mathbf{K}$, avec le vecteur $\mathbf{K}$ vertical. Dans (T_1) , une roue (liée au référentiel (T_2)) a un mouvement de rotation d'axe horizontal, $\boldsymbol{\Omega}(T_2/T_1) = \omega_b \mathbf{i}_2$. C'est ce que voit un passager de l'auto. Un piéton sur le bord de la route voit lui pour la roue un vecteur rotation $\omega_b \mathbf{i}_2 + \omega_a \mathbf{K}$.

3.2.3 Composition des vitesses

Soit un point M animé d'un mouvement quelconque dans (T) et (R) . Introduisant le point C , origine de (T) , nous pouvons écrire

$$\mathbf{V}(M/R) = \frac{d}{dt} (\mathbf{OM})|_R = \frac{d}{dt} (\mathbf{OC} + \mathbf{CM})|_R.$$

Pour dériver le vecteur $\mathbf{CM}$, nous utilisons (3.6), et en réorganisant les termes nous obtenons

$$\mathbf{V}(M/R) = \underbrace{\mathbf{V}(M/T)}_{\text{vitesse relative}} + \underbrace{\mathbf{V}(C/R) + \boldsymbol{\Omega}(T/R) \wedge \mathbf{CM}}_{\text{vitesse d'entraînement}}, \quad (3.9)$$

qui est la formule de *composition des vitesses*.

La *vitesse d'entraînement* est celle d'un point M' fixe dans (T) , qui occupe la position de M à l'instant t . Ce point M' est appelé *point coïncident*.

3.2.4 Composition des accélérations

Dérivons par rapport au temps l'équation (3.9). On trouve

$$\mathbf{a}(M/R) = \left. \frac{d\mathbf{V}(M/T)}{dt} \right|_R + \mathbf{a}(C/R) + \left. \frac{d\boldsymbol{\Omega}(T/R)}{dt} \right|_R \wedge \mathbf{CM} + \boldsymbol{\Omega}(T/R) \wedge \left. \frac{d\mathbf{CM}}{dt} \right|_R.$$

En utilisant à nouveau la formule (3.6), on calcule

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\mathbf{V}(M/T)}{dt} \right|_R &= \left. \frac{d\mathbf{V}(M/T)}{dt} \right|_T + \boldsymbol{\Omega}(T/R) \wedge \mathbf{V}(M/T) \\ &= \mathbf{a}(M/T) + \boldsymbol{\Omega}(T/R) \wedge \mathbf{V}(M/T), \\ \left. \frac{d\mathbf{CM}}{dt} \right|_R &= \left. \frac{d\mathbf{CM}}{dt} \right|_T + \boldsymbol{\Omega}(T/R) \wedge \mathbf{CM} \\ &= \mathbf{V}(M/T) + \boldsymbol{\Omega}(T/R) \wedge \mathbf{CM}, \end{aligned}$$

et en injectant ces résultats dans la première expression on obtient la formule de *composition des accélérations*,

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(M/R) &= \underbrace{\mathbf{a}(M/T)}_{\text{accélération relative}} + \underbrace{2\boldsymbol{\Omega}(T/R) \wedge \mathbf{V}(M/T)}_{\text{accélération de Coriolis}} + \\ &+ \underbrace{\mathbf{a}(C/R) + \dot{\boldsymbol{\Omega}}(T/R) \wedge \mathbf{CM} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{CM})}_{\text{accélération d'entraînement}} \end{aligned} \quad (3.10)$$

3.2.5 Référentiel barycentrique

C'est par définition le repère (R_B) , aussi noté (R^*) , d'origine le centre d'inertie G (voir chapitre suivant) et d'axes à tout instant parallèles aux axes du repère fixe. Cela signifie $\boldsymbol{\Omega}(R^*/R) = 0$, et si l'on reporte cette valeur dans (3.9) et (3.10) les formules se simplifient considérablement :

$$\mathbf{V}(M/R) = \mathbf{V}(M/R^*) + \mathbf{V}(G/R) \quad (3.11)$$

$$\mathbf{a}(M/R) = \mathbf{a}(M/R^*) + \mathbf{a}(G/R) \quad (3.12)$$

3.3 Mouvements particuliers du solide.

3.3.1 Translation

Un solide est en *translation* si la vitesse de chacun de ses points est définie par un vecteur unique $\mathbf{V}(t)$ à chaque instant t . Le vecteur rotation du solide est alors nul, et son torseur cinématique est un couple.

Exemple : À un instant donné, chacune des nacelles d'une grande roue est en translation (chacune avec une vitesse différente!).

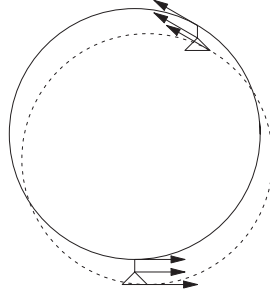


Figure 3.4: Mouvement des nacelles d'une grande roue. Le cercle en trait plein montre la trajectoire du point d'attache des nacelles, celui en traits pointillés la trajectoire d'un autre point.

3.3.2 Rotation autour d'un axe

Un solide est, par rapport à un référentiel (R) , en *rotation autour d'un axe fixe* Δ lorsque deux de ses points A et B sont à chaque instant fixes dans (R) . L'axe de rotation Δ est alors la droite passant par A et B .

Si A et B ne sont pas dans le solide S , mais à distance finie, on dit que l'axe appartient au *solide prolongé*. Cela signifie que A et B sont fixes à la fois dans le référentiel (S) lié au solide et dans (R) . C'est le cas de la figure ci-dessous.

Appelons Δ l'axe de rotation, qui est la droite AB . Définissons alors le référentiel du laboratoire tel que OZ soit confondu avec Δ , et le référentiel lié au solide tel que Oz aussi soit confondu avec Δ . Soit $\theta \equiv (\widehat{OX, Ox})$. On peut écrire

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \frac{d\mathbf{i}}{d\theta} \dot{\theta} = \dot{\theta} \mathbf{j} \equiv \boldsymbol{\Omega}(S/R) \wedge \mathbf{i},$$

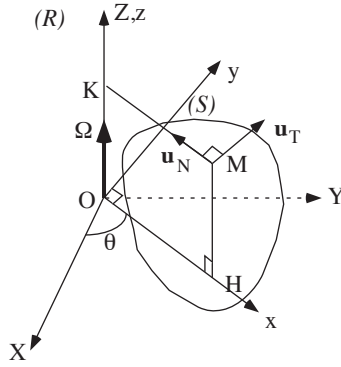


Figure 3.5: Rotation autour d'un axe.

la dernière équation définissant le vecteur rotation instantanée du solide dans (R) . On en déduit

$$\Omega(S/R) = \dot{\theta}\mathbf{k} = \dot{\theta}\mathbf{K} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{C}_O[\dot{\theta}\mathbf{k}, \mathbf{0}]. \quad (3.13)$$

Dans le cas de ce mouvement, on peut donner les éléments de réduction du torseur cinématique $\mathcal{C}_O$ en O , origine du repère fixe. Δ est l'axe central du torseur cinématique. La trajectoire d'un point M n'appartenant pas à Δ est un cercle situé dans un plan perpendiculaire à Δ de centre H , projection orthogonale de M sur Δ , et de rayon $HM \equiv \rho$.

L'accélération du point M se déduit de la formule (3.5),

$$\mathbf{a}(M/R) = \underbrace{\mathbf{a}(O/R)}_{=0} + \dot{\Omega}(S/R) \wedge \mathbf{OM} + \Omega(S/R) \wedge (\Omega(S/R) \wedge \mathbf{OM}),$$

soit en utilisant le repère de Frénet

$$\mathbf{a}(M/R) = \dot{\Omega}(S/R) \wedge \mathbf{KM} - \Omega(S/R)^2 \mathbf{KM} = \rho \ddot{\theta} \mathbf{u}_T + \rho \dot{\theta}^2 \mathbf{u}_N = \frac{dv}{dt} \mathbf{u}_T + \frac{v^2}{\rho} \mathbf{u}_N. \quad (3.14)$$

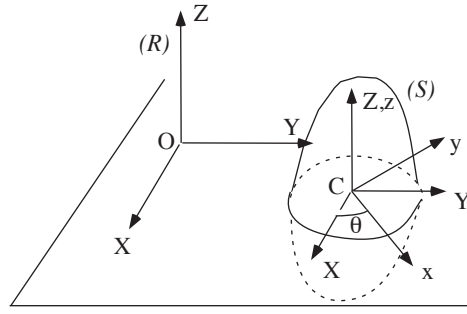
3.3.3 Mouvement plan invariant, ou plan sur plan

C'est par définition le mouvement d'un solide pour lequel *un plan quelconque lié à ce solide reste à tout instant confondu avec un plan du repère fixe*. Il faut bien prendre garde au fait qu'un plan est défini par trois points non alignés.

Comme exemple citons le mouvement d'une règle posée sur un plan, celui d'une roue de vélo suivant une trajectoire rectiligne (le plan contenant la roue, assimilée à un cercle, restant confondu avec un plan contenant la trajectoire), celui d'un cylindre sur un plan incliné (un plan de section du cylindre reste confondu avec un plan orthogonal au plan incliné).

Soit alors Π le plan commun au référentiel fixe $R(O, \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$ et au référentiel lié au solide $S(C, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. Choisissons (R) de telle sorte que $(\mathbf{I}, \mathbf{J}) \in \Pi$. Si le référentiel (S) est choisi de telle sorte qu'à un instant donné $(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \in \Pi$, ces vecteurs resteront à tout instant dans ce plan par définition du mouvement plan invariant. Prenons de même les origines O et C dans le plan Π . Définissons alors $\theta \equiv \widehat{(\mathbf{I}, \mathbf{i})}$. On sait que

$$(\forall M \in \text{solide} \cap \Pi), \quad \mathbf{V}(M/R) \in \Pi$$

Figure 3.6: Mouvement *plan sur plan*.

or

$$\mathbf{V}(M/R) = \mathbf{V}(C/R) + \boldsymbol{\Omega}(S/R) \wedge \mathbf{CM},$$

il est donc nécessaire d'avoir $\boldsymbol{\Omega}(S/R) \perp \Pi$. On en déduit

$$\boldsymbol{\Omega}(S/R) = \dot{\theta} \mathbf{K} = \dot{\theta} \mathbf{k}. \quad (3.15)$$

Notons I l'intersection entre l'axe central Δ du torseur cinématique et Π . Par définition de l'axe central, on sait que $\mathbf{V}(I/R)$ est parallèle à Δ . Par ailleurs $I \in \Pi$ et par définition du mouvement plan sur plan $\mathbf{V}(I/R) \in \Pi \perp \Delta$: On a donc nécessairement

$$\mathbf{V}(I/R) = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(M/R) = \boldsymbol{\Omega}(S/R) \wedge \mathbf{IM}. \quad (3.16)$$

Le mouvement est donc à tout instant une rotation pure autour du point I , qui est appelé *centre instantané de rotation* (en abrégé, CIR).

La position de I peut être déterminée de deux manières différentes :

- Soit on connaît deux vecteurs vitesses $\mathbf{V}(M/R)$ et $\mathbf{V}(M'/R)$ *non parallèles*. Le CIR est alors à l'intersection des deux perpendiculaires en M et M' à ces vecteurs.
- Soit on utilise la formule générale (3.4), qui donne ici

$$\mathbf{MI} = \frac{\boldsymbol{\Omega}(S/R) \wedge \mathbf{V}(M/R)}{\|\boldsymbol{\Omega}(S/R)\|^2} \quad (3.17)$$

On appelle *base* la trajectoire du CIR dans le repère fixe (R) , et *roulante* sa trajectoire dans le repère lié au solide (S) .

3.3.4 Rotation autour d'un point fixe. Angles d'Euler

Remarque : Les angles d'Euler ne figurent plus (en 2005) au programme des concours ENSI Deug. Ce paragraphe n'est donc pas à savoir par coeur, mais il fournit un excellent exemple de composition des rotations!

Soit donc O le point fixe commun au référentiel fixe et au solide, qui sera pris comme origine des deux référentiels. On passe du référentiel fixe au référentiel lié au solide par trois rotations successives.

(a) Rotation d'angle ψ autour de l'axe OZ . ψ est l'angle de *précession*.

$$R(O, \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}) \longrightarrow T(O, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{K})$$

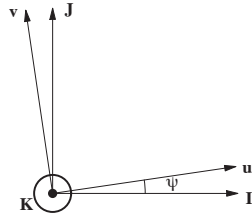


Figure 3.7: Angles d'Euler. Définition de l'angle de précession.

(b) Rotation d'angle θ autour du vecteur $\mathbf{u}$. θ est l'angle de *nutaton*.

$$T(O, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{K}) \longrightarrow T'(O, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{k})$$

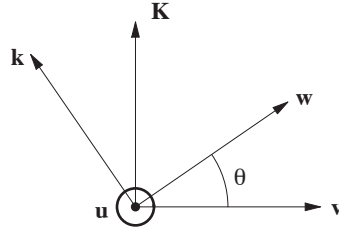


Figure 3.8: Angles d'Euler. Définition de l'angle de nutation.

(c) Rotation d'angle ϕ autour de l'axe Oz . ϕ est l'angle de *rotation propre*.

$$T'(O, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{k}) \longrightarrow S(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$$

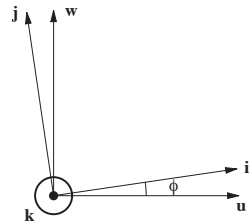


Figure 3.9: Angles d'Euler. Définition de l'angle de rotation propre.

La représentation tridimensionnelle des trois angles est fournie par la Fig. 3.10. Lorsqu'on cherche à exprimer le vecteur rotation du solide, en utilisant (3.8), on trouve

$$\Omega(S/R) = \dot{\psi}\mathbf{K} + \dot{\theta}\mathbf{u} + \dot{\phi}\mathbf{k}$$

qui n'est exprimé naturellement dans aucune base orthonormée. Nous verrons en cinétique qu'il est toujours indispensable d'exprimer le vecteur rotation dans la base du référentiel lié au solide. En utilisant

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{w} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{w} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix},$$

on trouve

$$\Omega(S/R) = \begin{pmatrix} (\dot{\psi} \sin \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi) \mathbf{i} \\ (\dot{\psi} \sin \theta \cos \phi - \dot{\theta} \sin \phi) \mathbf{j} \\ (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \mathbf{k} \end{pmatrix}$$

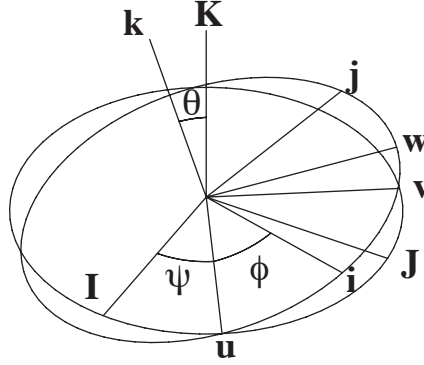


Figure 3.10: Représentation tridimensionnelle des angles d'Euler.

Exemple : La roue avant d'un vélo, le cycliste amorçant un virage, vue dans le référentiel barycentrique (en translation par rapport au référentiel fixe). Le cycliste tourne le guidon (précession), il incline le vélo à l'intérieur du virage (nutation) et la roue tourne autour de son axe (rotation propre).

3.3.5 Degrés de liberté d'un solide

Définition : Le nombre de *degrés de liberté* est égal au nombre de variables indépendantes nécessaires à la localisation complète du système.

La position d'un point est donnée par ses trois coordonnées. Il a donc trois degrés de liberté. S'il est astreint à rester dans un plan, il est soumis à une équation de contrainte (l'équation du plan dans l'espace) et n'a plus que deux degrés de liberté. Un système de N points a donc $3N$ degrés de liberté, si aucune contrainte particulière n'intervient.

La position d'un solide est complètement déterminée si l'on caractérise un référentiel lié au solide. Il faut pour cela spécifier une origine C et trois points M_1 , M_2 et M_3 , soit *a priori* $4 \times 3 = 12$ degrés de liberté. Mais il faut tenir compte des contraintes de rigidité! Trois équations imposent que les distances CM_i sont constantes, et trois autres fixent les angles $\widehat{M_iCM_j}$: Il ne reste que $12 - 2 \times 3 = 6$ degrés de liberté.

Une fois définis les angles d'Euler, c'est évident. Les six degrés de liberté du solide sont les coordonnées d'un point arbitraire C , et les trois angles d'Euler. Nous avons vu au tout début de ce chapitre que le champ de vitesse d'un solide est un torseur, défini par 6 paramètres indépendants.

3.4 Mouvements de deux solides en contact.

3.4.1 Point de contact

Soient deux solides S et S' en mouvement par rapport à un référentiel (R) . A l'instant t , ils sont en contact au *point fictif* I , *coïncidant* à cet instant avec les

points matériels I_S et $I_{S'}$, appartenant respectivement à S et S' .

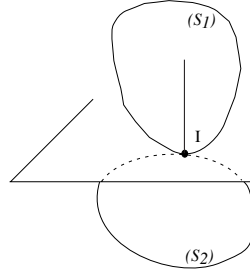


Figure 3.11: Contact entre deux solides.

Il est important de bien comprendre cette définition. Un point matériel est, par définition, un point lié à (ou "appartenant à") un solide. Le point I_S (resp. $I_{S'}$) suit donc le mouvement du solide S (resp. S'). Le point de contact est fictif car ce n'est pas un point matériel : à l'instant t , il est situé à la position géométrique commune de I_S et $I_{S'}$.

Les trajectoires de I , I_S et $I_{S'}$ dans (R) sont *a priori* différentes. Considérons à titre d'exemple une roue de vélo roulant sans glisser en ligne droite. Le point de contact I décrit cette droite. Le point I_R appartenant à la route est immobile, sa trajectoire est donc réduite à un point. Enfin, le point I_V lié à la roue décrit une cycloïde (voir Fig. 3.12).

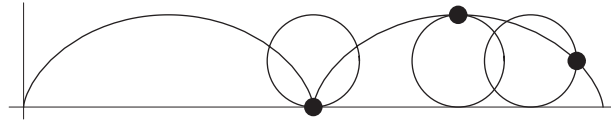


Figure 3.12: Mouvement d'une roue de vélo. Le point en gras appartient à la roue, et décrit une cycloïde. Les points de rebroussement de la cycloïde (tous les nombres entiers de tours de la roue sur elle-même) indiquent quand le point considéré est en contact avec la route

3.4.2 Glissement

Par définition, la *vitesse de glissement* de S par rapport à S' est

$$\mathbf{V}_g(S/S') \equiv \mathbf{V}(I_S/R) - \mathbf{V}(I_{S'}/R) \quad (3.18)$$

On montre sans difficulté, en utilisant la loi de composition des vitesses (3.9) entre les référentiels (R) et (S') ,

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_g(S/S') &= \mathbf{V}(I_S/S') + \mathbf{V}(C'/R) + \boldsymbol{\Omega}(S'/R) \wedge \mathbf{C}'\mathbf{I}_S \\ &\quad - \underbrace{[\mathbf{V}(I_{S'}/S') + \mathbf{V}(C'/R) + \boldsymbol{\Omega}(S'/R) \wedge \mathbf{C}'\mathbf{I}_{S'}]}_{=0}, \end{aligned}$$

soit compte-tenu du fait que I , I_S et $I_{S'}$ sont confondus,

$$\mathbf{V}_g(S/S') = \mathbf{V}(I_S/S'). \quad (3.19)$$

La vitesse de glissement est contenue dans le plan tangent en I , commun aux deux solides (sans quoi ils se séparent ou s'interpénètrent).

Exprimer une *condition de non glissement* (CNG) revient à imposer

$$\mathbf{V}_g(S/S') = \mathbf{0}. \quad (3.20)$$

3.4.3 Roulement et pivotement

De façon similaire, on peut définir une *vitesse angulaire relative* de deux solides :

$$\boldsymbol{\Omega}(S/S') = \boldsymbol{\Omega}(S/R) + \boldsymbol{\Omega}(R/S') = \boldsymbol{\Omega}(S/R) - \boldsymbol{\Omega}(S'/R).$$

On la décompose en une composante normale au plan tangent aux deux solides et une composante tangentielle, qui représentent respectivement la vitesse angulaire de *pivotement* et de *roulement*.

$$\boldsymbol{\Omega}(S/S') = \underbrace{\boldsymbol{\Omega}_n(S/S')}_{\text{pivotement}} + \underbrace{\boldsymbol{\Omega}_t(S/S')}_{\text{roulement}}. \quad (3.21)$$

3.5 Application : Le Bissel.

Un solide composite est constitué d'un essieu C_1C_2 de longueur $2l$, de centre G , et de deux roues assimilées à des disques de rayon R , de centres respectifs C_1 et C_2 , chacune mobile indépendamment dans un plan perpendiculaire à C_1C_2 . Ce solide, ensemble d'un essieu et de deux roues, est appelé un *bissel*.

Lors du mouvement du solide, les roues restent toujours en contact avec le plan horizontal XOY . On repère la position de G par ses coordonnées $(X, Y, Z = R)$, et la direction de l'essieu par l'angle θ qu'il fait avec l'axe OX . Les positions de chacune des roues sont repérées respectivement par des angles ψ_1 et ψ_2 . On définit le repère intermédiaire (T) de centre G , de base $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{K})$.

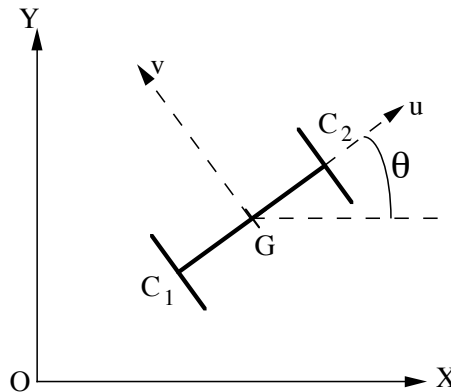


Figure 3.13: Essieu mobile sans glissement.

Le système comporte trois solides, l'essieu et les deux roues. Le repère (T) est lié à l'essieu.

Le vecteur rotation de chaque roue résulte de la composition de la rotation de la roue autour de l'essieu, ainsi que de la rotation de l'essieu dans le référentiel fixe. On a donc

$$\boldsymbol{\Omega}(R_{1,2}/R) = \dot{\psi}_{1,2}\mathbf{u} + \dot{\theta}\mathbf{K}. \quad (3.22)$$

Notons I un des points de contact roue/plan, I_R (resp. I_P) le point de la roue (resp. du plan) coïncidant avec I à un instant donné. La condition de non-glissement (CNG) se traduit par $\mathbf{V}(I_R/R) = \mathbf{V}(I_P/R)$. Le plan étant fixe, $\mathbf{V}(I_P/R) = \mathbf{0}$ et il faut $\mathbf{V}(I_R/R) = \mathbf{0}$.

Pour alléger les notations, nous noterons désormais I_i le point de la roue i ($i = 1, 2$) en contact avec le sol. Pour chaque roue,

$$\mathbf{V}(I_i/R) = \mathbf{V}(C_i/R) + \boldsymbol{\Omega}(R_i/R) \wedge \mathbf{CI} \quad (3.23)$$

$$= \mathbf{V}(C_i/R) + (\dot{\psi}_i \mathbf{u} + \dot{\theta} \mathbf{K}) \wedge (-R\mathbf{K}) = \mathbf{V}(C_i/R) + R\dot{\psi}_i \mathbf{v}, \quad (3.24)$$

puisque le champ de vitesse de chacune des roues est un torseur. Les centres des roues C_i appartiennent aussi au solide "essieu", dont le vecteur rotation est $\dot{\theta} \mathbf{K}$. On a donc

$$\mathbf{V}(C_i/R) = \mathbf{V} + \dot{\theta} \mathbf{K} \wedge \mathbf{GC}_i = \mathbf{V} + \dot{\theta} \mathbf{K} \wedge (\pm l \mathbf{u}) = \mathbf{V} \pm l \dot{\theta} \mathbf{v}, \quad (3.25)$$

le signe $+$ (resp. $-$) étant à prendre pour C_2 (resp. C_1).

Si l'on injecte l'équation (3.25) dans (3.24), les conditions de non-glissement donnent,

$$\mathbf{V} - (l\dot{\theta} - R\dot{\psi}_1) \mathbf{v} = 0, \quad (3.26)$$

$$\mathbf{V} + (l\dot{\theta} + R\dot{\psi}_2) \mathbf{v} = 0. \quad (3.27)$$

De ces équations, on déduit très simplement

$$\mathbf{V} = -\frac{R}{2}(\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2) \mathbf{v}. \quad (3.28)$$

La vitesse de G , milieu de l'essieu, est donc orthogonale à l'essieu.

Il est toujours bon de vérifier les formules trouvées dans un cas intuitivement simple. Supposons que les roues tournent dans le sens trigonométrique à la même vitesse angulaire. Alors, s'il n'y a pas glissement, la vitesse de G est selon $-\mathbf{v}$. Le signe trouvé est donc correct.

Cette vitesse est nulle si les roues tournent à la même vitesse angulaire, mais en sens contraires : $\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2 = 0$. Dans ce cas, le mouvement du bissel est en effet une rotation pure autour de G .

On trouve aussi facilement $\dot{\theta}$ en retranchant (3.26) à (3.27), ce qui donne

$$\dot{\theta} = \frac{R}{2l}(\dot{\psi}_1 - \dot{\psi}_2). \quad (3.29)$$

Pour vérifier ce résultat, faisons tourner la roue (2) dans le sens trigonométrique ($\dot{\psi}_2 > 0$), la roue (1) restant immobile. L'essieu doit tourner dans le sens contraire du sens trigonométrique, ce qui est effectivement le cas puisque (3.29) prédit $\dot{\theta} < 0$.

Pour annuler la rotation de l'essieu, il faut que les deux roues tournent dans le même sens à la même vitesse angulaire. Dans ce cas le bissel est effectivement en translation pure.

Chapitre 4

Compléments mathématiques

4.1 Courbes planes

Une courbe plane $\{M \in \Gamma\}$ est définie dans un repère orthonormé direct $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ du plan euclidien sous forme paramétrique par les coordonnées $(x(t), y(t))$ du point M . Le *repère de Frénet* est un repère orthonormé direct $(M, \mathbf{t}, \mathbf{n})$ défini par

$$\mathbf{t} \equiv \frac{d\mathbf{OM}}{ds}, \quad \mathbf{t} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{ds} \\ \frac{dy}{ds} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

$$\mathbf{n} \equiv \frac{d\mathbf{t}}{d\phi} = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

où ds est défini par

$$ds \equiv \epsilon \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}, \quad \epsilon = \pm 1. \quad (4.3)$$

Le coefficient ϵ permet de traiter les cas des courbes décrites par t croissant ($\epsilon = +1$) aussi bien que décroissant ($\epsilon = -1$). Le vecteur $\mathbf{t}$ est tangent à la courbe, $\mathbf{n}$ lui est orthogonal.

Le *rayon de courbure* R et le *centre de courbure* C sont quant à eux définis par (pour des courbes décrites respectivement à t , x et θ croissants):

$$R \equiv \frac{ds}{d\phi}, \quad \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{\mathbf{n}}{R}, \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\frac{\mathbf{t}}{R}. \quad (4.4)$$

La courbe est localement tangente à un cercle de centre C et de rayon R . Le rayon de courbure s'exprime par:

$$R = \frac{\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \right]^{3/2}}{\frac{dx}{dt} \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \frac{d^2x}{dt^2}} \quad (4.5)$$

Le cas d'une courbe donnée par $y = f(x)$ se ramène au précédent par

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} \quad (4.6)$$

Je vous laisse vérifier qu'on trouve alors pour (4.5) la formule

$$R = \frac{[1 + f'(x)^2]^{3/2}}{f''(x)} \quad (4.7)$$

Le cas d'une courbe en coordonnées polaires $r = f(\theta)$ se ramène lui aussi au précédent par

$$\begin{cases} x = f(\theta) \cos \theta \\ y = f(\theta) \sin \theta \end{cases} \quad (4.8)$$

et on trouve alors

$$R = \frac{[r(\theta)^2 + r'(\theta)^2]^{3/2}}{r(\theta)^2 + 2r'(\theta)^2 - r(\theta)r''(\theta)} \quad (4.9)$$

Quelques exercices pour vous entraîner:

- 1) Vérifier que le rayon de courbure d'un cercle est constant, égal à son rayon.
- 2) Tracer la parabole $y = x^2$ et trouver le point pour lequel le rayon de courbure R est minimum. Vérifier que le résultat est conforme à l'intuition, et porter le cercle de rayon R sur le dessin.
- 3) Trouver les lieux des extrema de rayon de courbure pour l'ellipse (vue en TD) décrite par

$$\begin{cases} x = 2a(1 + \cos \omega t) \\ y = a \sin \omega t \end{cases}$$

4.2 Intégrales multiples

4.2.1 Introduction

A titre d'exemple, posons nous le problème du calcul de la masse d'un corps de volume (Ω) inhomogène, dont on connaît la masse volumique $\rho(x, y, z)$. Pour cela, on le décompose par la pensée en N éléments de volume $(\Delta\Omega_1), (\Delta\Omega_2), \dots (\Delta\Omega_N)$ et l'on choisit un point M_i dans chaque élément $(\Delta\Omega_i)$. Alors la masse totale vaut à peu près

$$m(\Delta\Omega) \approx \sum_{i=1}^N \rho(M_i) \Delta\Omega_i$$

Cette quantité n'est qu'approchée car tant que les volumes $\Delta\Omega_i$ restent *finis* la densité ne peut y être considérée comme constante. Si maintenant on fait tendre la taille des volumes élémentaires vers 0, et leur nombre N vers l'infini, la somme converge¹ vers une limite finie donnée par l'intégrale triple:

$$m(\Delta\Omega) = \int_{(\Omega)} \rho(M) d\Omega = \iiint_{(\Omega)} \rho(x, y, z) dx dy dz$$

Une bonne partie de la difficulté des calculs vient de la détermination des *bornes d'intégration*, et éventuellement du choix des "bonnes" coordonnées à utiliser (voir § suivant). Un cas simple (mais en *aucune* façon général!) se produit lorsqu'une coordonnée est limitée à un intervalle constant, et que le domaine d'intégration

¹Sous réserve que la fonction soit intégrable, en pratique bornée sur le domaine fini (Ω) .

s'exprime comme une fonction de cette coordonnée. Plus précisément, à 2D, on peut avoir un domaine compris entre deux fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$, avec $x \in [a, b]$. Alors

$$\iint_{(\Omega)} \rho(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \rho(x, y) dy \right) dx$$

Le terme entre parenthèses se ramène après calcul à une fonction de x seulement, qu'il suffit d'intégrer. A 3D, la généralisation de ce résultat est

$$\iiint_{(\Omega)} \rho(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} \rho(x, y, z) dz \right) dy \right] dx$$

Exemple 1 Calcul de l'aire du domaine limité par les courbes $y = 2 - x^2$ et $y = x$. (en grisé sur la Fig. 4.1 ci-dessous)

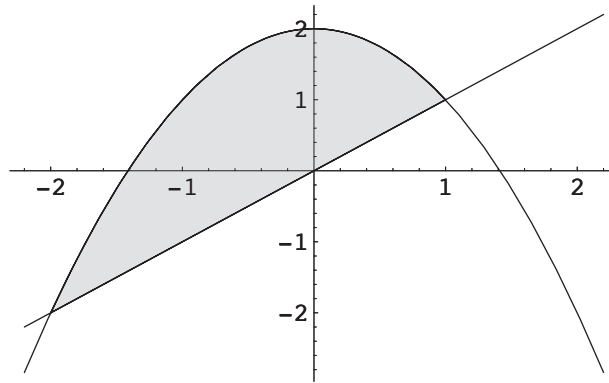


Figure 4.1: Exemple de calcul d'aire.

Il faut d'abord calculer les points d'intersection, dont les abscisses sont solutions de $x = 2 - x^2$. Les points cherchés sont donc $M_1(-2, -2)$ et $M_2(1, 1)$. L'aire cherchée est alors:

$$A = \int_{-2}^1 \left(\int_x^{2-x^2} dy \right) dx = \int_{-2}^1 (2 - x^2 - x) dx = \frac{9}{2}$$

4.2.2 Changements de variable

Il arrive fréquemment que le domaine d'intégration s'exprime très simplement dans un système de coordonnées particulières, et il est donc important de savoir effectuer un changement de variables dans une intégrale multiple. Pour la commodité des dessins, nous allons expliciter la démonstration dans le cas d'une intégrale double.

Supposons que le changement de variable soit défini par

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v)$$

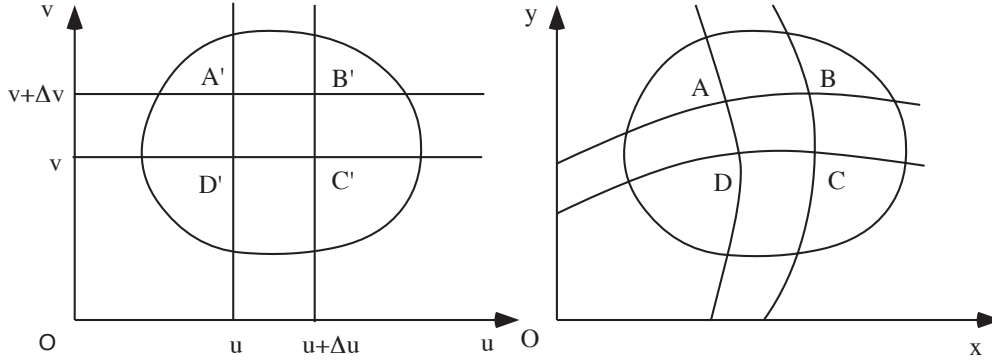


Figure 4.2: Changement de variable dans une intégrale multiple.

où les fonctions $\varphi(u, v)$ et $\psi(u, v)$ sont supposées univoques et suffisamment régulières. Alors il correspond à tout couple (u, v) un unique couple (x, y) . De façon générale, il correspond à une droite $u = \text{cste}$ du plan (u, v) une courbe dans le plan (x, y) , donc si on découpe le domaine d'intégration en rectangles dans le plan (u, v) , les courbes correspondantes dans le plan (x, y) le découpent en quadrilatères curvilignes (voir la Fig. 4.2).

Aux 4 points du plan (u, v)

$$A' \left(\begin{matrix} u \\ v + \Delta v \end{matrix} \right), B' \left(\begin{matrix} u + \Delta u \\ v + \Delta v \end{matrix} \right), C' \left(\begin{matrix} u + \Delta u \\ v \end{matrix} \right), D' \left(\begin{matrix} u \\ v \end{matrix} \right)$$

définissant un rectangle infinitésimal d'aire $\Delta S' = \Delta u \Delta v$ correspondent les 4 points du plan (x, y)

$$A \left(\begin{matrix} \varphi(u, v + \Delta v) \\ \psi(u, v + \Delta v) \end{matrix} \right), B \left(\begin{matrix} \varphi(u + \Delta u, v + \Delta v) \\ \psi(u + \Delta u, v + \Delta v) \end{matrix} \right), C \left(\begin{matrix} \varphi(u + \Delta u, v) \\ \psi(u + \Delta u, v) \end{matrix} \right), D \left(\begin{matrix} \varphi(u, v) \\ \psi(u, v) \end{matrix} \right).$$

L'aire du quadrilatère est donnée par $\|\mathbf{AD} \wedge \mathbf{AB}\|$. En développant au premier ordre dans les petits accroissements Δu et Δv , ce qui donne le résultat *exact* puisque l'intégrale se calcule dans la limite où ces accroissements sont infinitésimaux, l'aire de $ABCD$ vaut donc

$$\begin{aligned} \Delta S &= |(x_D - x_A)(y_B - y_A) - (x_B - x_A)(y_D - y_A)| \\ &= \left| -\frac{\partial \varphi}{\partial v} \Delta v \frac{\partial \psi}{\partial u} \Delta u - \frac{\partial \varphi}{\partial u} \Delta u \left(-\frac{\partial \psi}{\partial v} \Delta v \right) \right| \\ &= \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right| \Delta u \Delta v \end{aligned}$$

ce qui démontre le résultat:

$$dx dy = |J| du dv \quad \text{où} \quad J \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix}$$

J est appelé le *Jacobien* du changement de variable². L'intégrale s'écrit alors

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} F(u, v) |J| du dv \quad \text{où} \quad F(u, v) \equiv f(\varphi(u, v), \psi(u, v)).$$

²Du nom du mathématicien allemand Jacobi

Il faut noter que dans une intégrale multiple le changement de variable peut avoir comme objectif soit de changer la forme fonctionnelle de l'intégrande (en passant de f à $F|J|$) soit de faciliter la définition du domaine d'intégration D . Les calculs se généralisent sans difficulté aux intégrales triples (et au delà). Les changements de coordonnées classiques sont:

- coordonnées polaires:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \implies dx dy = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} dr d\theta = r dr d\theta$$

- coordonnées cylindriques:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \implies dx dy dz = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} dr d\theta dz = r dr d\theta dz$$

- coordonnées sphériques:

$$\begin{cases} x = r \sin \phi \cos \theta \\ y = r \sin \phi \sin \theta \\ z = r \cos \phi \end{cases}$$

$$dx dy dz = \begin{vmatrix} \sin \phi \cos \theta & r \cos \phi \cos \theta & -r \sin \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta & r \cos \phi \sin \theta & r \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi & -r \sin \phi & 0 \end{vmatrix} dr d\theta d\phi = r^2 \sin \phi dr d\theta d\phi$$

Exemple 2 Il existe un système de coordonnées dites *elliptiques* (ξ, η, ϕ) , défini par

$$x = \alpha \operatorname{sh} \xi \sin \eta \cos \phi, y = \alpha \operatorname{sh} \xi \sin \eta \sin \phi, z = \alpha \operatorname{ch} \xi \cos \eta$$

où α est une constante réelle positive et $\xi \geq 0$, $0 \leq \eta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Il est facile de voir que

$$\left(\frac{x}{\alpha \operatorname{sh} \xi}\right)^2 + \left(\frac{y}{\alpha \operatorname{sh} \xi}\right)^2 + \left(\frac{z}{\alpha \operatorname{ch} \xi}\right)^2 = 1$$

ce qui définit un ellipsoïde de révolution d'axe Oz , de demi axes $b \equiv \alpha \operatorname{ch} \xi$ suivant Oz et $a \equiv \alpha \operatorname{sh} \xi$ suivant Ox et Oy . Un ellipsoïde³, dans ces coordonnées, est donc simplement défini par $\xi = \xi_0$. Le Jacobien de la transformation se calcule simplement:

$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} \cos(\phi) \operatorname{ch}(\xi) \sin(\eta) & \cos(\eta) \cos(\phi) \operatorname{sh}(\xi) & -\sin(\eta) \sin(\phi) \operatorname{sh}(\xi) \\ \operatorname{ch}(\xi) \sin(\eta) \sin(\phi) & \cos(\eta) \sin(\phi) \operatorname{sh}(\xi) & \cos(\phi) \sin(\eta) \operatorname{sh}(\xi) \\ \cos(\eta) \operatorname{sh}(\xi) & -\operatorname{ch}(\xi) \sin(\eta) & 0 \end{vmatrix} \\ &= \operatorname{sh} \xi \sin \eta (\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta) \end{aligned}$$

et le volume V de l'ellipsoïde est alors donné par

$$V = \iiint_D dx dy dz = \alpha^3 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\eta \int_0^{\xi_0} \operatorname{sh} \xi \sin \eta (\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta) d\xi$$

³On peut toujours trouver un couple (α, ξ_0) pour le décrire, si son demi axe suivant Oz est plus grand que suivant Ox et Oy . Dans le cas contraire, il suffit d'invertir les sinus et cosinus hyperboliques dans la définition des coordonnées.

L'intégration sur ϕ est immédiate et donne un facteur 2π . Ensuite on a

$$\begin{aligned} V &= 2\pi\alpha^3 \int_0^{\xi_0} \left(\operatorname{sh}\xi \operatorname{ch}^2\xi [-\cos\eta]_0^\pi + \operatorname{sh}\xi \left[\frac{\cos^3\eta}{3} \right]_0^\pi \right) d\xi \\ &= 2\pi\alpha^3 \left(2 \left[\frac{\operatorname{ch}^3\xi}{3} \right]_0^{\xi_0} - \frac{2}{3} [\operatorname{ch}\xi]_0^{\xi_0} \right) \\ &= \frac{4\pi}{3} \alpha^3 (\operatorname{ch}^3\xi_0 - \operatorname{ch}\xi_0) = \frac{4\pi}{3} \alpha^3 \operatorname{ch}\xi_0 \operatorname{sh}^2\xi_0 = \frac{4\pi}{3} a^2 b \end{aligned}$$

(On a utilisé $\operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh}^2 u = 1$). On notera que l'on retrouve le volume de la sphère lorsque $a = b$.

4.2.3 Exercices.

1) Définir les bornes d'intégration pour l'intégrale $\iint_D f(x, y) dx dy$, lorsque le domaine d'intégration D est défini par les courbes:

- a) $y = 0, y = 1 - x^2$
- b) $x^2 + y^2 = a^2$

2) Calculer cette intégrale en passant en coordonnées polaires:

$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy \quad (\text{rep. } \pi a^3/6)$$

3) Calculer l'aire de la figure limitée par la parabole $y^2 = 2x$ et la droite $y = x$ (rep. $2/3$)

4) Calculer l'aire d'une boucle de la courbe $\rho = a \sin 2\theta$ (rep. $\pi a^2/8$)

5) Calculer le volume limité par les cylindres $x^2 + y^2 = a^2$ et $x^2 + z^2 = a^2$. (rep. $16a^3/3$)

6) Calculer, en coordonnées cartésiennes, le volume de l'ellipsoïde de révolution traité à l'exemple 2. (On simplifiera grandement les calculs en décomposant l'ellipsoïde de révolution en éléments de volume simples)

7) Calculer le volume d'un ellipsoïde dans le cas général, lorsqu'il est défini comme le volume intérieur à la surface définie par

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1$$

Montrer, dans un premier temps, que ce volume se met sous la forme d'une intégrale triple de la forme donnée au bas de la page 1, et identifier les fonctions $\psi_i(x, y)$ et $\phi_i(x)$. Pour intégrer selon y , il est utile de faire le changement de variable

$$y = B \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \sin t, dy = B \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \cos t dt.$$

Vérifiez votre résultat.

8) Calculer le volume et la surface d'un tore creux homogène d'axe Oz , en fonction de R et r définis sur la figure (à gauche, vue perspective, à droite coupe dans un plan contenant Oz). (rep. $S = 4\pi^2 r R, V = 2\pi^2 R r^2$; on pourra découper cette figure en "cercles élémentaire" pour faire le calcul.)

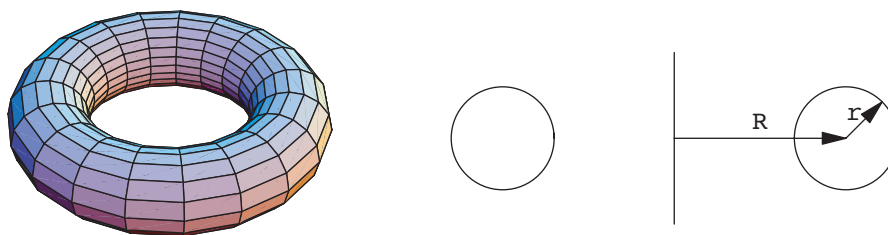


Figure 4.3: Tore.

Calculer sa matrice d'inertie en son centre de gravité O . Réponse:

$$[J(O)] = \begin{pmatrix} \frac{M}{4}(2R^2 + 5r^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M}{4}(2R^2 + 5r^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M}{2}(2R^2 + 3r^2) \end{pmatrix}$$

Proposez une vérification de ce résultat, en retrouvant une matrice d'inertie connue.

Chapitre 5

Géométrie des masses

5.1 Centre d'inertie

5.1.1 Définition

Soit un ensemble de N masses ponctuelles m_i , situées aux points M_i fixes dans un repère $R(O, x, y, z)$. Le *centre d'inertie* G de ce système (ou *Centre de masse*, ou *Centre de gravité*) est le *barycentre* des points M_i , affectés des coefficients m_i . Ses coordonnées sont données par l'une ou l'autre des deux formules

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{GM}_i = \mathbf{0}, \quad \mathbf{OG} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{OM}_i \quad \text{avec} \quad M \equiv \sum_{i=1}^N m_i, \quad (5.1)$$

où pour aboutir à la deuxième formule on a utilisé $\mathbf{GM}_i = \mathbf{GO} + \mathbf{OM}_i$.

Dans le cas d'un solide de masse M , la distribution de masse est continue et

$$\int_{(S)} \mathbf{GM} dm = \mathbf{0}, \quad \mathbf{OG} = \frac{1}{M} \int_{(S)} \mathbf{OM} dm. \quad (5.2)$$

Dans le cas le plus général, on introduit la *masse volumique* $\rho \equiv dm/dV$, où dV est l'élément de volume, ce qui donne pour les coordonnées de G

$$x_i(G) = \frac{1}{M} \int \int \int_{(S)} x_i \rho(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3. \quad (5.3)$$

Lorsque le solide est homogène, $\rho = M/V$ où V est le volume total du solide, et alors

$$x_i(G) = \frac{1}{V} \int \int \int_{(S)} x_i dx_1 dx_2 dx_3. \quad (5.4)$$

Si le solide a une de ses dimensions (l'épaisseur, par convention) nettement plus petite que les autres, on l'assimile à une distribution surfacique de masse, et on introduit la *masse surfacique* $\sigma \equiv dm/dS$, où dS est l'élément de surface. Pour un solide homogène de surface Σ on a $\sigma = M/\Sigma$.

Si le solide a une de ses dimensions (la longueur, par convention) nettement plus grande que les autres, on l'assimile à une distribution linéique de masse, et on introduit la *masse linéique* $\lambda \equiv dm/dl$, où dl est l'élément de longueur. Pour un solide homogène de longueur L on a $\lambda = M/L$.

5.1.2 Éléments de symétrie

Supposons que le solide possède un *plan de symétrie*, par exemple xOz . A tout élément de masse dm situé à la position y_0 par rapport à ce plan, correspond alors un élément identique situé symétriquement en $-y_0$. Alors

$$y(G) = \frac{1}{M} \int dx \int dz \int_{-y_m(x,z)}^{y_m(x,z)} \underbrace{y\rho(x,y,z)}_{\text{fonction impaire de } y} dy = 0.$$

On a pu identifier une fonction impaire car par symétrie $\rho(x,y,z) = \rho(x,-y,z)$.

On en conclut que *le centre d'inertie appartient au plan de symétrie*.

Si le solide a deux plans de symétrie sécants, la droite d'intersection est un *axe de symétrie*, et G se trouve sur cet axe. Si le solide a un troisième plan de symétrie sécant avec les deux précédents, les trois plans se coupent au centre d'inertie.

Ainsi, les centres d'inertie d'une sphère, d'un parallélépipède rectangle, d'un cylindre homogènes se trouvent en leurs centres géométriques respectifs. Le centre de gravité d'un cône homogène se trouve sur son axe de symétrie.

5.1.3 Décomposition en solides simples

Si un solide peut se décomposer en solides plus simples, de centres d'inertie $G_1, G_2, \dots$ et de masses $m_1, m_2, \dots$, on peut revenir à la définition (5.1) et en déduire

$$(m_1 + m_2 + \dots)\mathbf{OG} = m_1\mathbf{OG}_1 + m_2\mathbf{OG}_2 + \dots \quad (5.5)$$

A titre d'exemple, considérons une sphère S_1 homogène de masse volumique ρ_1 et de rayon R_1 , contenant une inclusion sphérique S_2 homogène, non concentrique, de masse volumique ρ_2 et de rayon R_2 (voir Fig. 5.1). Soit L la distance des centres des sphères, prenons le centre de S_1 comme origine et la droite construite sur les deux centres comme axe des x .

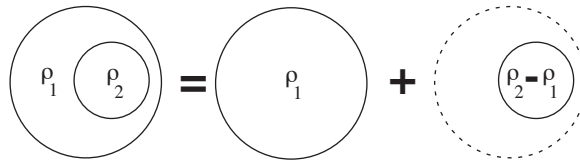


Figure 5.1: Sphère comportant une inclusion sphérique, en coupe dans le plan diamétral commun.

Ce solide peut être considéré comme la superposition d'une sphère homogène de masse volumique ρ_1 , donc de centre d'inertie O , et d'une sphère homogène de masse volumique $\rho_2 - \rho_1$, dont le centre de gravité est à une distance L de O . La formule (5.5), dans laquelle les masses des solides élémentaires sont algébriques (seule leur somme doit donner une masse positive) donne alors

$$\mathbf{OG} = \frac{(\rho_2 - \rho_1)R_2^3}{\rho_1(R_1^3 - R_2^3) + \rho_2 R_2^3} L \mathbf{e}_x.$$

Si l'inclusion est plus massive que S_1 ($\rho_2 > \rho_1$) le centre d'inertie est décalé vers les x positifs, si elle est moins massive ($\rho_2 < \rho_1$, jusqu'à $\rho_2 = 0$ pour un trou) il est décalé vers les x négatifs. Si $\rho_2 = \rho_1$ il n'y a bien sûr pas de décalage.

5.1.4 Théorèmes de Guldin

Théorème I : L'aire engendrée par la rotation d'une *courbe plane* (Γ) autour d'un axe *ne la traversant pas* est égale au produit de la longueur de la courbe par la circonférence décrite par son centre d'inertie. [voir Fig. 5.2 (a)]

Par rotation autour de Ox , l'élément de longueur dl centré sur le point courant M décrit une surface $dS = 2\pi y(M)dl$, soit en intégrant sur la longueur de la courbe

$$S = \int_{(\Gamma)} 2\pi y(M)dl = 2\pi L(\Gamma) \underbrace{\left(\frac{1}{L(\Gamma)} \int_{(\Gamma)} y(M)dl \right)}_{=y_G} \Rightarrow y_G = \frac{S}{2\pi L(\Gamma)}. \quad (5.6)$$

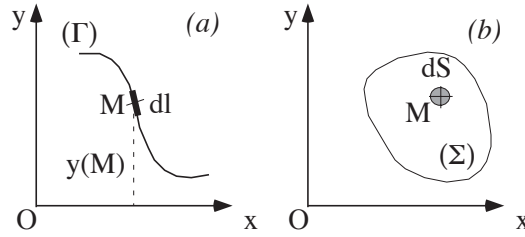


Figure 5.2: Théorème de Guldin. (a) Courbe plane. (b) Surface plane.

Théorème II : Le volume engendré par la rotation d'une *surface plane* (Σ) autour d'un axe *ne la traversant pas* est égale au produit de la surface par la circonférence décrite par son centre d'inertie. [voir Fig. 5.2 (b)]

Par rotation autour de Ox , l'élément de surface dS centré sur le point courant M décrit un volume $dV = 2\pi y(M)dS$, soit en intégrant sur la surface

$$V = \int_{(\Sigma)} 2\pi y(M)dS = 2\pi S(\Sigma) \underbrace{\left(\frac{1}{S(\Sigma)} \int_{(\Sigma)} y(M)dS \right)}_{=y_G} \Rightarrow y_G = \frac{V}{2\pi S(\Sigma)}. \quad (5.7)$$

Exemple 1 : Centre d'inertie d'un demi-cercle ou d'un demi-disque matériel de rayon a . [Fig. 5.3 (a)]

Ces deux solides sont contenus dans un plan, ce qui est une hypothèse impérative. Les théorèmes de Guldin ne sont bien sûr applicables que pour des solides *homogènes*, puisqu'ils permettent de calculer le centre de gravité au sens géométrique. Nous supposons donc ces solides homogènes. Par symétrie, le centre de gravité est sur l'axe Oy . On ne peut envisager de rotation autour de Oy , puisqu'il traverse la courbe et la surface, par contre une rotation autour de Ox va nous donner y_G .

Le demi-cercle est de longueur πa , le demi-disque de surface $\pi a^2/2$. Une rotation du demi-cercle (resp. du demi-disque) de 2π autour de Ox décrit la surface (resp. le volume) d'une sphère, soit $4\pi a^2$ (resp. $(4/3)\pi a^3$). De (5.6) et (5.7) on déduit respectivement

$$y_G(\text{demi-cercle}) = \frac{4\pi a^2}{2\pi \pi a} = \frac{2}{\pi}a, \quad y_G(\text{demi-disque}) = \frac{\frac{4}{3}\pi a^3}{2\pi \frac{\pi a^2}{2}} = \frac{4}{3\pi}a.$$

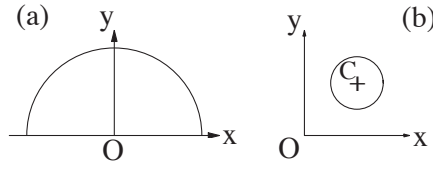


Figure 5.3: Application des théorèmes de Guldin. (a) Demi cercle ou disque. (b) Volume et surface du tore.

Exemple 2 : Volume et surface d'un tore. [Fig. 5.3 (b)]

Dans ce cas, la position du centre d'inertie du disque ou du cercle est évidente! La rotation de 2π du cercle (resp. du disque) autour d'un des deux axes décrit la surface (resp. le volume) d'un tore. Soit a le rayon du disque, b la distance entre son centre et l'axe Oy . Ces deux distances suffisent à caractériser le tore, qui peut aussi être défini par ses rayons extérieur $R_e = b + a$ et intérieurs $R_i = b - a$. En utilisant successivement (5.6) et (5.7), on calcule

$$b = \frac{S_{\text{tore}}}{2\pi(2\pi a)} \implies S_{\text{tore}} = 4\pi^2 ab = \pi^2 (R_e^2 - R_i^2)$$

$$b = \frac{V_{\text{tore}}}{2\pi(\pi a^2)} \implies V_{\text{tore}} = 2\pi^2 a^2 b = \frac{\pi^2}{4} (R_e - R_i)^2 (R_e + R_i)$$

5.2 Moments d'inertie

5.2.1 Définition

Le *moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe Δ* , que nous noterons $I(\Delta)$, se définit en sommant les contributions de tous les points du solide, ce qui revient à intégrer sur toutes les masses élémentaires dm .

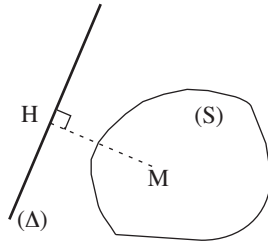


Figure 5.4: Moment d'inertie par rapport à l'axe Δ .

Si H est la projection orthogonale de M sur Δ ,

$$I(\Delta) = \int_{(S)} HM^2 dm \quad (5.8)$$

On trouve facilement une écriture plus commode. Soit K un point quelconque de l'axe Δ , et $\mathbf{u}_\Delta$ un vecteur unitaire de l'axe. Alors

$$I(\Delta) = \int_{(S)} (\mathbf{u}_\Delta \wedge \mathbf{KM})^2 dm, \quad (5.9)$$

car

$$(\mathbf{u}_\Delta \wedge \mathbf{KM})^2 = [\mathbf{u}_\Delta \wedge (\mathbf{KH} + \mathbf{HM})]^2 = HM^2.$$

On définit le *rayon de gyration* $\bar{r}$ comme le rayon d'un anneau fictif centré sur Δ , de même masse que le solide, et de même moment d'inertie par rapport à Δ ,

$$I(\Delta) \equiv M(S)\bar{r}^2 \quad (5.10)$$

Le *moment d'inertie d'un solide par rapport à un point* O est donné par

$$I(O) = \int_{(S)} OM^2 dm \quad (5.11)$$

On introduit aussi le *moment d'inertie d'un solide par rapport à un plan* Π . Si MP est la distance entre le point M et le plan Π , c'est-à-dire si P est la projection orthogonale de M sur Π ,

$$I(\Pi) = \int_{(S)} PM^2 dm \quad (5.12)$$

On obtient une formule plus commode en introduisant un point J quelconque du plan Π , et $\mathbf{n}_\Pi$ la normale au plan. On a

$$I(\Pi) = \int_{(S)} (\mathbf{n}_\Pi \cdot \mathbf{JM})^2 dm, \quad (5.13)$$

car

$$(\mathbf{n}_\Pi \cdot \mathbf{JM})^2 = [\mathbf{n}_\Pi \cdot (\mathbf{JP} + \mathbf{PM})]^2 = PM^2.$$

Les trois types de moment d'inertie qui viennent d'être définis ont tous comme dimension physique

$$\text{masse} \times (\text{longueur})^2.$$

On notera que d'après les définitions (5.8), (5.11) et (5.12), les moments d'inertie sont des *grandeurs additives*. On peut donc calculer le moment d'inertie d'un solide en le décomposant par la pensée en plusieurs solides simples, et en sommant les moments d'inertie ainsi calculés.

Application à un repère lié au solide

Rien n'impose que le référentiel dans lequel on calcule un moment d'inertie soit fixe par rapport au solide. En pratique, c'est cependant presque toujours le cas. Le moment d'inertie est alors *constant* (indépendant du temps) et caractérise la géométrie des masses du solide.

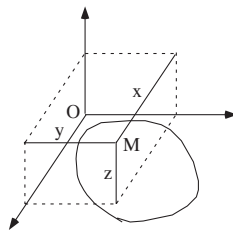


Figure 5.5: Repère lié au solide.

Soit un repère lié au solide $S(O, x, y, z)$, comme sur la Fig. 5.5. On calcule sans difficultés

$$\begin{cases} I(Ox) = \int_{(S)} (y^2 + z^2) dm, \\ I(Oy) = \int_{(S)} (x^2 + z^2) dm, \\ I(Oz) = \int_{(S)} (x^2 + y^2) dm, \end{cases} \quad (5.14)$$

ainsi que des relations utiles bien qu'évidentes:

$$I(O) = \frac{1}{2} [I(Ox) + I(Oy) + I(Oz)], \quad \begin{cases} I(Ox) = I(xOz) + I(xOy), \\ I(Oy) = I(yOz) + I(xOy), \\ I(Oz) = I(xOz) + I(yOz). \end{cases} \quad (5.15)$$

Lorsque le solide est *bidimensionnel*, c'est-à-dire contenu dans un plan identifié au plan xOy du repère lié au solide, alors $z = 0$ dans les intégrales (5.14). On peut ainsi écrire une relation supplémentaire,

$$I(Oz) = I(Ox) + I(Oy). \quad (5.16)$$

5.2.2 Théorème de Huygens

Soit Δ_G un axe passant par le centre d'inertie G , parallèle à Δ , K un point quelconque de Δ , et d la distance entre les deux axes (Fig. 5.6). Alors

$$\begin{aligned} I(\Delta) &= \int_{(S)} (\mathbf{u}_\Delta \wedge \mathbf{KM})^2 dm = \int_{(S)} [\mathbf{u}_\Delta \wedge (\mathbf{KG} + \mathbf{GM})]^2 dm \\ &= \underbrace{(\mathbf{u}_\Delta \wedge \mathbf{KG})^2}_{=d^2} \int_{(S)} dm + 2 (\mathbf{u}_\Delta \wedge \mathbf{KG}) \cdot \underbrace{\mathbf{u}_\Delta \wedge \int_{(S)} \mathbf{GM} dm}_{=0} + \int_{(S)} (\mathbf{u}_\Delta \wedge \mathbf{GM})^2 dm, \end{aligned}$$

la nullité de l'intégrale venant de la définition même de G , (5.2). Identifiant le dernier terme, on obtient le théorème de Huygens

$$I(\Delta) = M(S)d^2 + I(\Delta_G). \quad (5.17)$$

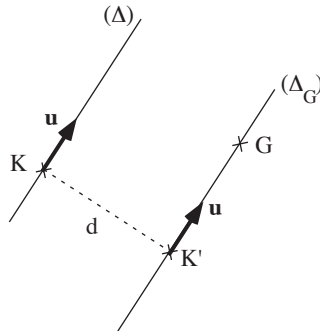


Figure 5.6: Théorème de Huygens.

Ce résultat montre que le moment d'inertie par rapport à un axe est minimum lorsque cet axe passe par le centre d'inertie.

Il permet aussi de calculer le moment d'inertie par rapport à un axe Δ_1 , connaissant celui par rapport à un axe Δ_2 qui lui est parallèle. En effet

$$\begin{cases} I(\Delta_1) = M(S)d_1^2 + I(\Delta_G), \\ I(\Delta_2) = M(S)d_2^2 + I(\Delta_G), \end{cases} \implies I(\Delta_1) = I(\Delta_2) + M(S)(d_1^2 - d_2^2). \quad (5.18)$$

Bien remarquer que n'intervient nullement la distance entre les deux axes, mais leurs distances respectives à l'axe parallèle passant par le centre d'inertie!

5.2.3 Matrice d'inertie

Etant donné un axe (Δ) lié au solide, de vecteur unitaire $\mathbf{u}_\Delta$, le moment d'inertie du solide (S) par rapport à (Δ) est :

$$I(\Delta) = \int_{(S)} (\mathbf{u}_\Delta \wedge \mathbf{OM})^2 dm$$

où O est un point de (Δ) . Exprimons analytiquement $(\mathbf{u}_\Delta \wedge \mathbf{OM})^2$ dans le repère $R(O, x, y, z)$ sachant que les coordonnées de $\mathbf{u}_\Delta$ sont (α, β, γ) et que celles de $\mathbf{OM}$ sont (x, y, z) . Le vecteur produit vectoriel peut être écrit

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\Delta \wedge \mathbf{OM} &= \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta z - \gamma y \\ \gamma x - \alpha z \\ \alpha y - \beta x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On remarquera qu'il apparaît une matrice antisymétrique, comme nous l'avions déjà démontré en (2.14). La norme au carré de ce vecteur s'exprime comme un produit de matrices,

$$(\mathbf{u}_\Delta \wedge \mathbf{OM})^2 = {}^\dagger (\mathbf{u}_\Delta \wedge \mathbf{OM}) (\mathbf{u}_\Delta \wedge \mathbf{OM})$$

où un vecteur $\mathbf{V}$ est représenté par une matrice colonne 3×1 (3 lignes, 1 colonne), et où ${}^\dagger \mathbf{V}$ est sa matrice transposée, donc une matrice ligne 1×3 . On a alors

$$\begin{aligned} {}^\dagger (\mathbf{u}_\Delta \wedge \mathbf{OM}) &= (\alpha \quad \beta \quad \gamma) \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \\ (\mathbf{u}_\Delta \wedge \mathbf{OM})^2 &= (\alpha \quad \beta \quad \gamma) \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \\ &= (\alpha \quad \beta \quad \gamma) \begin{pmatrix} z^2 + y^2 & -xy & -xz \\ -xy & z^2 + x^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2 + y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On en déduit que le moment d'inertie par rapport à l'axe Δ s'écrit

$$I(\Delta) = {}^\dagger \mathbf{u}_\Delta [J(O)] \mathbf{u}_\Delta, \quad (5.19)$$

où $[J(O)]$ est la *matrice d'inertie du solide* au point O ,

$$[J(O)] = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

et les I_{ij} sont les intégrales :

$$\begin{cases} I_{xx} = \int_{(S)} (y^2 + z^2) dm \\ I_{yy} = \int_{(S)} (x^2 + z^2) dm, \\ I_{zz} = \int_{(S)} (x^2 + y^2) dm \end{cases} \quad \begin{cases} I_{xy} = \int_{(S)} xy dm \\ I_{xz} = \int_{(S)} xz dm. \\ I_{yz} = \int_{(S)} yz dm \end{cases} \quad (5.21)$$

Les intégrales I_{xx} , I_{yy} et I_{zz} sont les *moments d'inertie* par rapport aux axes Ox , Oy et Oz respectivement. Les intégrales I_{xy} , I_{yz} et I_{xz} sont les *produits d'inertie*.

Il est possible de retrouver ce résultat de façon plus élégante à l'aide du tenseur ϵ_{ijk} défini au § 2.1.4. En effet

$$\begin{aligned} I(\Delta) &= \int_{(S)} (\mathbf{u}_\Delta \wedge \mathbf{OM})^2 dm \\ &= \int_{(S)} \epsilon_{ijk} u_j x_k \epsilon_{ilm} u_l x_m dm \\ &= \int_{(S)} \epsilon_{jki} \epsilon_{ilm} u_j u_l x_k x_m dm \\ &= \int_{(S)} u_j (\delta_{jl} x_k x_k - x_j x_l) u_l dm = u_j [J(O)]_{jl} u_l, \end{aligned}$$

où on retrouve bien

$$[J(O)]_{ij} = \int_{(S)} [(x^2 + y^2 + z^2) \delta_{ij} - x_i x_j] dm.$$

5.2.4 Propriétés de la matrice d'inertie

Diagonalisation de la matrice d'inertie

Comme le montre (5.20), la matrice d'inertie est une *matrice symétrique réelle* : Elle est donc toujours diagonalisable. Il existe donc une base dans laquelle

$$[J(O)] = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}. \quad (5.22)$$

Les axes définissant cette base sont les *axes principaux d'inertie* (API), et les moments correspondants les *moments principaux d'inertie*.

Si l'axe Δ passe par O , intersection des axes principaux d'inertie, la formule générale (5.19) se simplifie en

$$I(\Delta) = \alpha^2 I_1 + \beta^2 I_2 + \gamma^2 I_3$$

où comme précédemment le vecteur unitaire $\mathbf{u}_\Delta$ a comme coordonnées (α, β, γ) .

Détermination directe d'une matrice d'inertie diagonale

Les éléments de symétrie du solide permettent souvent de deviner sans calculs les axes principaux d'inertie. Supposons en effet qu'un solide homogène¹ ait un plan de symétrie, que nous choisirons pour plan xOz . L'axe perpendiculaire à ce plan, Oy , est alors axe principal d'inertie. En effet, les deux produits d'inertie I_{xy} et I_{yz} sont nuls :

$$I_{xy} = \rho \int dz \int x dx \int_{-f(x,z)}^{f(x,z)} y dy = 0, \quad I_{yz} = \rho \int dx \int z dz \int_{-f(x,z)}^{f(x,z)} y dy = 0.$$

Il est plus que recommandé d'identifier les axes principaux d'inertie, lorsque c'est possible, avant tout calcul.

5.2.5 Exemples

Cercle matériel homogène de rayon R

Tout diamètre du cercle est axe principal d'inertie. Prenons comme référentiel celui d'origine O le centre du cercle, Ox et Oy deux diamètres orthogonaux, Oz perpendiculaire au plan du cercle de façon à construire un référentiel orthonormé direct.

Par symétrie, $I_{xx} = I_{yy}$, et grâce à (5.16) $I_{zz} = 2I_{xx}$. Le calcul le plus simple est celui de I_{zz} . En effet, $x^2 + y^2 = R^2 = Cste$, et

$$I_{zz} = \int (x^2 + y^2) dm = R^2 \int dm = MR^2,$$

soit

$$[I_{\text{cercle}}(O)] = MR^2 \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Disque matériel homogène de rayon R

Ce solide a les mêmes symétries que le précédent, et les API sont les mêmes. Par ailleurs la relation $I_{zz} = 2I_{xx} = 2I_{yy}$ est toujours valable. Le calcul le plus simple est celui de I_{zz} , et il est naturel d'introduire les coordonnées polaires (r, θ) dans le plan du disque :

$$I_{zz} = \int (x^2 + y^2) dm = \int r^2 \underbrace{\sigma r dr d\theta}_{=dm}$$

où on a introduit la densité surfacique de masse $\sigma = M/(\pi R^2)$. En écrivant proprement les bornes d'intégration, qui doivent décrire la surface entièrement, mais une seule fois,

$$I_{zz} = \frac{M}{\pi R^2} \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{M}{\pi R^2} \times \frac{R^4}{4} \times 2\pi = \frac{1}{2} MR^2,$$

soit

$$[I_{\text{disque}}(O)] = MR^2 \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

¹Plus généralement on pourrait imaginer une symétrie de la distribution de masse.

Un autre calcul est possible, qui se révèle parfois très astucieux. Ecrivons

$$I_{zz} = \int_0^R r^2 \int_0^{2\pi} \sigma r d\theta dr = \int_0^R r^2 \underbrace{\sigma 2\pi r dr}_{\equiv dM}$$

Que signifie le terme dM que nous avons mis en évidence? Il est homogène à une masse, et il représente la masse d'une couronne infinitésimale de rayon r , et d'épaisseur dr (Voir Fig. 5.7).

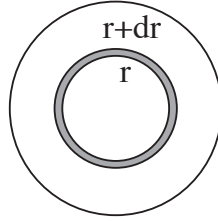


Figure 5.7: Disque matériel. En grisé, on a représenté une couronne infinitésimale comprise entre les rayons r et $r + dr$.

Comme nous l'avons déjà remarqué, les moments d'inertie sont des grandeurs additives. Le disque peut être décrit en intégrant de telles couronnes de $r = 0$ à $r = R$. Or ces couronnes ont un moment d'inertie qui est celui d'un cercle :

$$dI_{zz} = dM r^2 = \sigma 2\pi r dr r^2$$

et le moment d'inertie du disque est obtenu comme l'intégrale de tous ces moments d'inertie infinitésimaux,

$$I_{zz} = \int dI_{zz} = \int_0^R \sigma 2\pi r dr r^2 = \frac{MR^2}{2}.$$

Sphère matérielle homogène de rayon R

Il est évident que par symétrie la matrice d'inertie d'une sphère en son centre est diagonale. On peut utiliser la relation (5.15), qui donne dans ce cas $I_{zz} = 2I(O)/3$. Le moment d'inertie au centre est facile à calculer en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) .

$$I(O) = \int (x^2 + y^2 + z^2) dm = \int r^2 \rho r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad \text{où} \quad \rho = \frac{3M}{4\pi R^3}$$

En écrivant correctement les bornes d'intégration (attention à celle sur θ !), on trouve

$$I(O) = \frac{3M}{4\pi R^3} \int_0^R r^4 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{3M}{4\pi R^3} \frac{R^5}{5} [-\cos \theta]_0^\pi 2\pi = \frac{3}{5} MR^2$$

soit

$$[I_{\text{sphère}}(O)] = \frac{2}{5} MR^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Un autre calcul était possible, en remarquant (voir Fig. 5.8) que la sphère est constituée de disques élémentaires de rayons

$$r(z) = \sqrt{R^2 - z^2},$$

et d'épaisseur dz , donc de masse

$$dM = \rho\pi r(z)^2 dz,$$

ce qui donne pour le moment d'inertie par rapport à Oz

$$I_{zz} = \int dI_{zz} = \int \frac{1}{2} dM r(z)^2 = \rho\pi \int_{-R}^R (R^2 - z^2)^2 dz = \frac{2}{5} MR^2$$

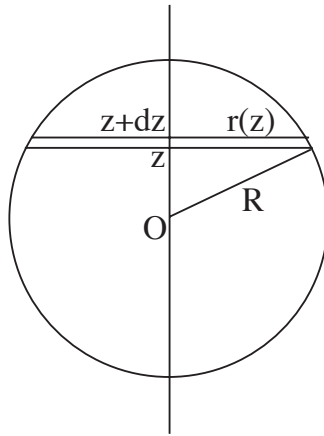


Figure 5.8: Sphère matérielle (vue en coupe). On a représenté le disque infinitésimal de rayon $r(z)$ compris entre les altitudes z et $z + dz$.

Chapitre 6

Cinétique

6.1 Torseur cinétique

6.1.1 Quantité de mouvement. Résultante cinétique

Nous avons déjà défini la quantité de mouvement d'un système de masses ponctuelles, au § 2.2.1, eqn. (2.21). Pour une distribution *continue* de masse, la *quantité de mouvement* du solide (S) par rapport à un référentiel $R(O, X, Y, Z)$ est donnée par

$$\mathbf{P}(S/R) \equiv \int_{(S)} \mathbf{V}(M/R) dm. \quad (6.1)$$

Or

$$\mathbf{V}(M/R) = \left. \frac{d}{dt} \mathbf{OM} \right|_R = \left. \frac{d}{dt} (\mathbf{OG} + \mathbf{GM}) \right|_R,$$

où G est le centre de masse du solide. Alors

$$\mathbf{P}(S/R) = \underbrace{\left. \frac{d\mathbf{OG}}{dt} \right|_R}_{\equiv \mathbf{V}(G/R)} \underbrace{\int_{(S)} dm}_{\equiv M(S)} + \underbrace{\left. \frac{d}{dt} \left(\int_{(S)} \mathbf{GM} dm \right) \right|_R}_{=0},$$

l'intégrale étant nulle d'après la définition du centre d'inertie (5.2). On en déduit une expression particulièrement simple

$$\boxed{\mathbf{P}(S/R) = M(S) \mathbf{V}(G/R).} \quad (6.2)$$

La quantité de mouvement d'un solide est donc celle de son centre d'inertie, affecté de toute la masse.

6.1.2 Moment cinétique

Le moment cinétique a été introduit, au § 2.2.1, eqn. (2.22), pour un système de masses ponctuelles. Pour une distribution *continue* de masse, le *moment cinétique*¹ du solide (S) en un point K , par rapport à un référentiel $R(O, X, Y, Z)$ est

$$\vec{\sigma}_K(S/R) \equiv \int_{(S)} \mathbf{KM} \wedge \mathbf{V}(M/R) dm. \quad (6.3)$$

¹De part sa définition, c'est évidemment un vecteur. Pour des raisons d'absence de lettre σ en gras, nous noterons exceptionnellement le moment cinétique avec une flèche.

Le moment cinétique, considéré comme la valeur au point K d'un champ de vecteur, est un torseur, appelé *torseur cinétique*, de résultante générale le vecteur quantité de mouvement

$$\boxed{\vec{\sigma}_{K'}(S/R) = \vec{\sigma}_K(S/R) + \mathbf{P}(S/R) \wedge \mathbf{KK}'} \quad (6.4)$$

6.1.3 Moment cinétique en un point A du solide

Il nous faut maintenant trouver un point en lequel calculer facilement le moment cinétique. Soit A un point quelconque du solide (S) , $\mathbf{V}(A/R)$ sa vitesse par rapport au repère fixe (R) , et $\boldsymbol{\Omega}(S/R)$ le vecteur rotation instantanée du solide. Alors

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_A(S/R) &= \int_{(S)} \mathbf{AM} \wedge \mathbf{V}(M/R) dm \\ &= \int_{(S)} \mathbf{AM} \wedge (\mathbf{V}(A/R) + \boldsymbol{\Omega}(S/R) \wedge \mathbf{AM}) dm \end{aligned}$$

en utilisant les propriétés du torseur cinématique. Le premier terme se simplifie car

$$\int_{(S)} \mathbf{AM} \wedge \mathbf{V}(A/R) dm = \mathbf{AG} \wedge \mathbf{V}(A/R) \int_{(S)} dm + \underbrace{\left(\int_{(S)} \mathbf{GM} dm \right)}_{=0 \text{ par (5.2)}} \wedge \mathbf{V}(A/R),$$

Supposons maintenant connues les coordonnées de $\boldsymbol{\Omega}(S/R)$ et de $\mathbf{AM}$ dans un repère $S(A, x, y, z)$ lié au solide (S) , d'origine A . Avec des notations évidentes, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{AM} \wedge (\boldsymbol{\Omega}(S/R) \wedge \mathbf{AM}) &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \left[\begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} z\Omega_y - y\Omega_z \\ x\Omega_z - z\Omega_x \\ y\Omega_x - x\Omega_y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ces quantités figurent dans l'intégrale, qui porte sur x , y et z . Il apparaît donc la matrice d'inertie du solide au point A (5.20), et en mettant ensemble les résultats des trois dernières équations on trouve

$$\boxed{\vec{\sigma}_A(S/R) = \mathbf{AG} \wedge M(S)\mathbf{V}(A/R) + [J(A)]\boldsymbol{\Omega}(S/R)}. \quad (6.5)$$

Il est possible de retrouver ce résultat de façon plus élégante à l'aide du tenseur ϵ_{ijk} défini au § 2.1.4. En effet

$$\begin{aligned}
 \left\{ \int_{(S)} \mathbf{AM} \wedge (\boldsymbol{\Omega}(S/R) \wedge \mathbf{AM}) dm \right\}_i &= \int_{(S)} \epsilon_{ijk} x_j (\boldsymbol{\Omega}(S/R) \wedge \mathbf{AM})_k dm \\
 &= \int_{(S)} \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} x_j \Omega_l x_m dm \\
 &= \int_{(S)} (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) x_j \Omega_l x_m dm \\
 &= \left[\int_{(S)} (x_m x_m \delta_{il} - x_i x_l) dm \right] \Omega_l \\
 &= \{ [J(A) \boldsymbol{\Omega}(S/R)] \}_i.
 \end{aligned}$$

La formule (6.5) se simplifie dans deux cas importants. Le premier consiste à prendre comme point A le centre d'inertie G . Alors

$$\boxed{\vec{\sigma}_G(S/R) = [J(G) \boldsymbol{\Omega}(S/R)]. \quad (G \text{ centre d'inertie})} \quad (6.6)$$

Si les axes sont les axes principaux d'inertie,

$$\vec{\sigma}_G(S/R) = I_1^G \Omega_x(S/R) \mathbf{i} + I_2^G \Omega_y(S/R) \mathbf{j} + I_3^G \Omega_z(S/R) \mathbf{k}. \quad (6.7)$$

Le deuxième cas apparaît lorsque le solide possède un *point fixe* O . Si l'on fait $A = O$ dans (6.5), $\mathbf{V}(O/R) = \mathbf{0}$ et

$$\boxed{\vec{\sigma}_O(S/R) = [J(O) \boldsymbol{\Omega}(S/R)]. \quad (O \text{ point du solide fixe dans } (R))} \quad (6.8)$$

Remarque (importante!) : Les écritures (6.5), (6.6) et (6.8) n'ont de sens que si les matrices d'inertie et le vecteur rotation sont exprimés dans la même *base de projection*. La matrice d'inertie étant naturellement calculée dans un référentiel lié au solide, il est en pratique indispensable d'exprimer le vecteur rotation instantanée $\boldsymbol{\Omega}(S/R)$ dans ce référentiel lié au solide.

Rotation autour d'un axe fixe

Considérons le cas particulier important de la rotation du solide autour d'un axe fixe Δ de vecteur directeur $\mathbf{u}_\Delta$, de coordonnées (α, β, γ) dans les API du solide. Alors $\boldsymbol{\Omega}(S/R) = \Omega(S/R) \mathbf{u}_\Delta$ et, si $O \in \Delta$, le moment cinétique du solide par rapport à l'axe Δ , dont on prendra garde qu'il s'agit d'un *scalaire*, s'écrit

$$\sigma_\Delta = ([J(O)] \boldsymbol{\Omega}(S/R)) \cdot \mathbf{u}_\Delta = \Omega(S/R) [J(O)]_{ij} u_\Delta^i u_\Delta^j.$$

Avec le moment d'inertie du solide par rapport à Δ (5.19), on peut écrire

$$\sigma_\Delta = \Omega \left({}^\dagger \mathbf{u}_\Delta [J(O)] \mathbf{u}_\Delta \right) = I_\Delta(S) \Omega = (\alpha^2 I_1 + \beta^2 I_2 + \gamma^2 I_3) \Omega, \quad (6.9)$$

Retenons que le moment cinétique par rapport à un axe est le produit de la norme du vecteur rotation instantanée par le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe considéré.

6.1.4 Premier théorème de Koenig

Les théorèmes de Koenig, dont nous verrons deux autres occurrences aux paragraphes § 6.2.2 et § 6.3.4, consistent à exprimer une quantité en fonction de sa valeur dans le référentiel barycentrique R_B ou R^* (voir § 3.2.5). Le premier concerne le moment cinétique.

Utilisons le résultat (3.11) pour calculer le moment cinétique en G .

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_G(S/R) &= \int_{(S)} \mathbf{GM} \wedge \mathbf{V}(M/R) dm \\ &= \underbrace{\int_{(S)} \mathbf{GM} \wedge \mathbf{V}(M/R^*) dm}_{=\vec{\sigma}_G(S/R^*)} + \underbrace{\left(\int_{(S)} \mathbf{GM} dm \right)}_{=\mathbf{0} \text{ par (5.2)}} \wedge \mathbf{V}(G/R),\end{aligned}$$

On en déduit

$$\vec{\sigma}_G^* \equiv \vec{\sigma}_G(S/R^*) = \vec{\sigma}_G(S/R). \quad (6.10)$$

Le moment cinétique d'un solide en son centre d'inertie, dans le référentiel barycentrique, appelé *moment cinétique intrinsèque (ou interne)* est égal à son moment cinétique en G dans le référentiel fixe (R). La raison physique est claire, puisque par construction du référentiel barycentrique le vecteur rotation du solide y est le même que dans le référentiel fixe.

Le *premier théorème de Koenig* exprime le moment cinétique en un point K quelconque, en utilisant la relation (6.4) entre les moments calculés aux points K et G , qui traduit l'existence du torseur cinétique

$$\boxed{\vec{\sigma}_K(S/R) = \vec{\sigma}_G^* + M(S)\mathbf{V}(G/R) \wedge \mathbf{GK}.} \quad (6.11)$$

Le moment cinétique du solide en un point quelconque K est égal au moment cinétique du solide en G , augmenté du moment cinétique en K du point fictif G , de masse celle du solide.

6.2 Energie cinétique

6.2.1 Définition

Pour une distribution continue de masse, on définit l'*énergie cinétique* E_c par

$$E_c(S/R) \equiv \int_{(S)} \frac{1}{2} V^2(M/R) dm. \quad (6.12)$$

C'est bien sûr une quantité scalaire. Nous allons la calculer à partir du champ de vitesse en un point quelconque. Avec les notations du § 6.1.3,

$$\mathbf{V}(M/R) = \mathbf{V}(A/R) + \boldsymbol{\Omega}(S/R) \wedge \mathbf{AM},$$

ce qui permet de transformer (6.12)

$$\begin{aligned}E_c &= \frac{1}{2} \int_{(S)} \mathbf{V}(M/R) \cdot [\mathbf{V}(A/R) + \boldsymbol{\Omega}(S/R) \wedge \mathbf{AM}] dm \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{P}(S/R) \cdot \mathbf{V}(A/R) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}(S/R) \cdot \vec{\sigma}_A(S/R)\end{aligned}$$

Avec l'expression générale du moment cinétique en A , (6.5), on trouve

$$E_c = \frac{1}{2} \underbrace{M[\mathbf{V}(A/R) + \boldsymbol{\Omega}(S/R) \wedge \mathbf{AG}] \cdot \mathbf{V}(A/R)}_{=M\mathbf{V}(G/R)=\mathbf{P}(S/R)} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}(S/R) \cdot (M\mathbf{AG} \wedge \mathbf{V}(A/R) + [J(A)]\boldsymbol{\Omega}(S/R)),$$

soit en définitive

$$E_c(S/R) = \frac{1}{2} MV^2(A/R) + M[\mathbf{V}(A/R), \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{AG}] + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \cdot [J(A)]\boldsymbol{\Omega}. \quad (6.13)$$

Cette formule est compliquée dans le cas général², mais se simplifie beaucoup par un choix judicieux du point A du solide.

Si on place A au centre d'inertie G , on supprime le produit mixte, et on trouve

$$E_c(S/R) = \frac{1}{2} MV^2(G/R) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}(S/R) \cdot \vec{\sigma}_G(S/R) \quad (6.14)$$

$$E_c(S/R) = \frac{1}{2} MV^2(G/R) + \frac{1}{2} (I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2 + I_3 \Omega_3^2), \quad (6.15)$$

la dernière expression n'étant valable que dans les API.

Si le solide possède un point fixe O , l'expression de l'énergie cinétique est encore plus simple. On trouve

$$E_c(S/R) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}(S/R) \cdot \vec{\sigma}_O(S/R) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \cdot [J(O)]\boldsymbol{\Omega} \quad (6.16)$$

$$E_c(S/R) = \frac{1}{2} (I'_1 \Omega_1^2 + I'_2 \Omega_2^2 + I'_3 \Omega_3^2). \quad (6.17)$$

La dernière expression n'est valable que dans les API, et on notera qu'il n'y a aucune raison pour que la matrice d'inertie ait la même valeur en O et en G .

6.2.2 Deuxième théorème de Koenig

Il s'agit comme au § 6.1.4 d'exprimer l'énergie cinétique dans le référentiel (R) en fonction de sa valeur dans le référentiel barycentrique (R^*).

En utilisant (6.12) et la composition des vitesses particulière au référentiel barycentrique, (3.11),

$$\begin{aligned} E_c(S/R) &= \int_{(S)} \frac{1}{2} (\mathbf{V}(M/R^*) + \mathbf{V}(G/R))^2 dm \\ &= \frac{1}{2} MV^2(G/R) + \mathbf{V}(G/R) \cdot \underbrace{\frac{d}{dt} \int_{(S)} \mathbf{GM} dm}_{=0 \text{ par (5.2)}} + \int_{(S)} \frac{1}{2} V^2(M/R^*) dm, \end{aligned}$$

On en déduit le *deuxième théorème de Koenig*

$$E_c(S/R) = \frac{1}{2} MV^2(G/R) + E_c^* \quad \text{où} \quad E_c^* \equiv E_c(S/R^*). \quad (6.18)$$

²Pour simplifier les écritures, je me permet la license $\boldsymbol{\Omega}(S/R) \rightarrow \boldsymbol{\Omega}$.

6.3 Torseur dynamique

6.3.1 Résultante dynamique

La *résultante dynamique* est définie par

$$\mathbf{S}(S/R) \equiv \int_{(S)} \mathbf{a}(M/R) dm = M(S) \mathbf{a}(G/R). \quad (6.19)$$

Elle est la dérivée de la résultante cinétique (6.2).

6.3.2 Moment dynamique

Il est défini par

$$\mathbf{\Gamma}_K(S/R) \equiv \int_{(S)} \mathbf{KM} \wedge \mathbf{a}(M/R) dm \quad (6.20)$$

6.3.3 Torseur dynamique

On a ainsi défini un torseur de résultante la résultante dynamique,

$$\mathbf{\Gamma}_{K'}(S/R) = \mathbf{\Gamma}_K(S/R) + \mathbf{S}(S/R) \wedge \mathbf{KK}'. \quad (6.21)$$

6.3.4 Troisième théorème de Koenig

Lorsqu'on exprime le moment dynamique du solide (S) en G dans le référentiel barycentrique, en utilisant la composition des accélérations (3.12), on obtient

$$\mathbf{\Gamma}_G(S/R) = \mathbf{\Gamma}_G(S/R^*) = \mathbf{\Gamma}_G^*, \quad (6.22)$$

d'où on déduit le troisième théorème de Koenig,

$$\boxed{\mathbf{\Gamma}_K(S/R) = \mathbf{\Gamma}_G^* + \mathbf{S}(S/R) \wedge \mathbf{GK}.} \quad (6.23)$$

6.4 Théorème du moment cinétique

Nous allons montrer que moment cinétique et moment dynamique sont reliés.

6.4.1 Théorème du moment cinétique au centre d'inertie G

Dérivons par rapport au temps le moment cinétique en G (6.3),

$$\dot{\sigma}_G(S/R) = \frac{d}{dt} \left(\int_{(S)} \mathbf{GM} \wedge \mathbf{V}(M/R) dm \right).$$

Le volume d'intégration ne dépendant pas du temps, on peut permuter intégration et dérivation, et écrire

$$\dot{\sigma}_G(S/R) = \int_{(S)} [\mathbf{V}(M/R) - \mathbf{V}(G/R)] \wedge \mathbf{V}(M/R) dm + \mathbf{\Gamma}_G(S/R).$$

L'intégrale est nulle. En effet le produit vectoriel d'un vecteur avec lui-même est nul. Par ailleurs, on peut sortir de l'intégrale le vecteur constant $\mathbf{V}(G/R)$, et l'intégrale

restante s'identifie à la résultante cinétique, colinéaire à ce même vecteur d'après (6.2) : le deuxième produit vectoriel est également nul.

On en déduit le théorème du moment cinétique au centre d'inertie G ,

$$\boxed{\dot{\vec{\sigma}}_G(S/R) = \mathbf{\Gamma}_G(S/R).} \quad (6.24)$$

6.4.2 Théorème du moment cinétique en un point quelconque K

Partons de l'expression du moment cinétique en un point quelconque K (6.5). Lorsqu'on dérive cette équation par rapport au temps, on trouve

$$\begin{aligned} \dot{\vec{\sigma}}_K(S/R) &= \dot{\vec{\sigma}}_G(S/R) + \dot{\mathbf{P}}(S/R) \wedge \mathbf{GK} + \mathbf{P}(S/R) \wedge \left. \frac{d\mathbf{GK}}{dt} \right|_R \\ &= \dot{\vec{\sigma}}_G(S/R) + \mathbf{S}(S/R) \wedge \mathbf{GK} + \mathbf{P}(S/R) \wedge (\mathbf{V}(K/R) - \mathbf{V}(G/R)). \end{aligned}$$

En utilisant le fait que la quantité de mouvement est colinéaire à la vitesse du centre d'inertie, le résultat précédent (6.24) et la propriété fondamentale du torseur dynamique (6.21), on obtient finalement

$$\boxed{\dot{\vec{\sigma}}_K(S/R) = \mathbf{\Gamma}_K(S/R) + \mathbf{P}(S/R) \wedge \mathbf{V}(K/R)} \quad (6.25)$$

6.4.3 Théorème du moment cinétique en un point fixe O

Ce résultat se simplifie lorsque le point de (R) en lequel on fait le calcul est un point fixe O :

$$\boxed{\dot{\vec{\sigma}}_O(S/R) = \mathbf{\Gamma}_O(S/R) \quad (O \text{ fixe dans } (R))} \quad (6.26)$$

6.5 Rotation d'un solide autour d'un point fixe

Soit O ce point fixe. Nous supposons le solide de révolution autour de l'axe Oz (voir Fig. 6.1). Cela signifie que les plans xOz et yOz sont des plans de symétrie. Les axes (Ox, Oy, Oz) sont les API, et la matrice d'inertie est donc diagonale. Par ailleurs, Ox et Oy sont parfaitement équivalents ; la matrice d'inertie a donc la forme

$$[J(O)] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix},$$

où A et C sont des constantes homogènes à une masse par une longueur au carré. Nous allons repérer la position du solide à l'aide des angles d'Euler, vus au paragraphe § 3.3.4. Nous avons calculé le vecteur rotation

$$\mathbf{\Omega}(S/R) = \dot{\psi}\mathbf{K} + \dot{\theta}\mathbf{u} + \dot{\phi}\mathbf{k}. \quad (6.27)$$

La cinématique et la géométrie des masses étant définies, cherchons l'énergie cinétique du solide.

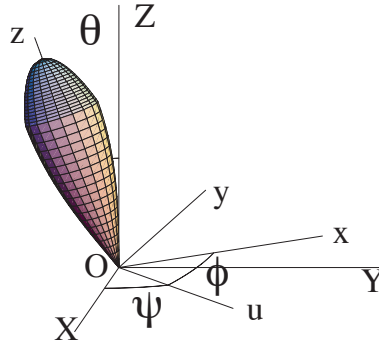


Figure 6.1: Solide de révolution tournant autour d'un point fixe.

Le point O est fixe, ce qui permet d'utiliser (6.16). Cependant, comme nous l'avons signalé plus haut, il est impératif d'exprimer le vecteur rotation dans la même base que la matrice d'inertie. Celle-ci est calculée dans une base liée au solide, il faut donc exprimer le vecteur rotation (6.27) dans cette base. On voit sans difficulté (se reporter aux dessins 3.7, 3.8 et 3.9 du § 3.3.4)

$$\begin{cases} \mathbf{K} = \sin \theta \mathbf{w} + \cos \theta \mathbf{k} \\ \mathbf{u} = \cos \phi \mathbf{i} - \sin \phi \mathbf{j} \\ \mathbf{w} = \sin \phi \mathbf{i} + \cos \phi \mathbf{j} \end{cases}$$

et on en déduit

$$\boldsymbol{\Omega}(S/R) = \begin{pmatrix} \dot{\psi} \sin \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi \\ \dot{\psi} \sin \theta \cos \phi - \dot{\theta} \sin \phi \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{dans} \quad S(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$$

ce qui permet de calculer l'énergie cinétique

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}(S/R) \cdot \vec{\sigma}_O(S/R) \\ &= \frac{A}{2} \left[\left(\dot{\psi} \sin \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi \right)^2 + \left(\dot{\psi} \sin \theta \cos \phi - \dot{\theta} \sin \phi \right)^2 \right] + \frac{C}{2} \left(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta \right)^2 \\ &= \frac{A}{2} \left(\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 \right) + \frac{C}{2} \left(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta \right)^2 \end{aligned}$$

Un autre calcul est toutefois possible. Le solide étant de révolution autour de Oz , sa matrice d'inertie a la même expression dans le référentiel intermédiaire $T_2(O, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{k})$. Mais le vecteur rotation a une forme plus simple dans ce référentiel :

$$\boldsymbol{\Omega}(S/R) = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{dans} \quad T_2(O, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{k})$$

L'énergie cinétique étant un scalaire, son expression ne doit pas dépendre de la base de projection servant aux calculs intermédiaires. On voit que c'est bien le cas, et qu'on retrouve l'expression précédente, la simplification étant ici automatique.

Chapitre 7

Dynamique des solides et des systèmes

7.1 Référentiels Galiléens

Les lois de la mécanique, ou lois de Newton, s'énoncent dans une classe particulière de référentiels appelés *référentiels d'inertie* ou *référentiels Galiléens*. Ces référentiels sont en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres.

Il n'existe pas de *référentiel absolu*, dont on soit sûr qu'il est Galiléen, par rapport auquel nous pourrions définir les autres référentiels. Tout référentiel que nous pouvons définir est accéléré, et des forces d'inertie y sont présentes. Mais en pratique, nous devons nous demander si ces forces sont mesurables. Tout dépend alors de la durée d'observation, et de la précision des mesures.

Ainsi, une première approximation est un référentiel *terrestre*, lié à la Terre (par exemple un coin de la salle de cours, et les trois arrêtes perpendiculaires). Ce référentiel permettra de mesurer avec une bonne précision la période d'un pendule (quelques secondes), mais si le pendule peut osciller durant une journée son mouvement mettra en évidence la rotation terrestre : c'est l'expérience du pendule de Foucault.

Une meilleure approximation sera un référentiel *géocentrique*, centré sur la Terre avec des axes définis par la direction de trois étoiles "fixes". Mais une période d'observation de l'ordre d'une année mettra en évidence la rotation de la Terre autour du Soleil.

On choisira alors le *référentiel de Copernic*, centré sur le Soleil et dont les axes sont définis par trois étoiles très lointaines, dites "fixes". L'Univers est en expansion, et ces étoiles sont réalité en mouvement¹, selon une loi empirique dite loi de Hubble. En Δt , elles s'éloignent proportionnellement à leur distance d à la Terre, de $\Delta d = H_0 d \Delta t$, où H_0 est la constante de Hubble. La déformation relative du référentiel est $\Delta d/d = 3 \cdot 10^{-18} s^{-1} \Delta t$, d'après les estimations actuelles de H_0 . En un millénaire ($\Delta t \approx 3 \cdot 10^{10} s$), $\Delta d/d \approx 10^{-7}$ qui reste négligeable.

On retiendra donc cette définition pratique : Un *référentiel Galiléen* est en *translation rectiligne uniforme* par rapport au référentiel de Copernic.

Dans la plupart des cas, un référentiel terrestre constituera une approximation suffisante de référentiel Galiléen.

¹Une preuve de ce mouvement est le décalage vers le rouge, par effet Doppler, des raies d'émission des atomes constituant ces étoiles.

7.2 Principe fondamental de la dynamique des solides et des systèmes

Avant tout, précisons que toute relation démontrée pour un système est valable pour un solide, mais l'inverse n'est pas vrai car un solide est un système particulier.

7.2.1 Forces intérieures et forces extérieures

On ne peut les identifier qu'une fois que le système étudié est complètement défini. Ainsi, pour une moto et son conducteur les forces extérieures sont le poids et la réaction de la route aux deux points de contact avec les roues. Le couple moteur est un moment intérieur. Si le système est constitué de la roue arrière seule, le couple moteur devient un moment extérieur.

7.2.2 Principe de l'action et de la réaction

Il s'agit d'un principe expérimental, aussi appelé *principe des actions mutuelles*.

Deux masses ponctuelles

Soient deux particules ponctuelles 1 et 2 interagissantes. Si $\mathbf{f}_{12}$ est la force exercée par la particule 1 sur la particule 2, et $\mathbf{f}_{21}$ la force exercée par 2 sur 1, alors

$$\mathbf{f}_{12} + \mathbf{f}_{21} = \mathbf{0}. \quad (7.1)$$

La somme des moments en un point quelconque K est elle aussi nulle :

$$\mathbf{M}_K^{12} + \mathbf{M}_K^{21} = \mathbf{0}. \quad (7.2)$$

Système de particules (ou de solides)

Avec N particules, soit $\mathbf{f}_{ji}$ la force exercée par la particule j sur la particule i , et $\mathbf{M}_K^{ji}$ le moment de cette force en K . La résultante des forces intérieures et le moment résultant de ces forces forment un torseur, dont les éléments de réduction en K sont

$$\mathbf{F}_{\text{int}} \equiv \sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{f}_{ji} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}_K^{\text{int}} \equiv \sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{M}_K^{ji} = \mathbf{0}. \quad (7.3)$$

Nous retiendrons que :

La somme des forces intérieures est nulle, et la somme des moments de toutes les forces intérieures est également nulle.

Il faut comprendre que ce principe n'est valable qu'en mécanique *classique*, sans portée plus générale. Il est aisé d'imaginer des cas où il est violé.

- En premier lieu, les forces dans l'équation (7.1) sont considérées au *même instant* t . Cela suppose une propagation instantanée des interactions, ce qui est exclu par le principe de relativité d'Einstein.
- Les deux équations (7.1) et (7.2) établissent que les particules exercent l'une sur l'autre une force *centrale*, orientée selon le rayon vecteur qui les joint. Ce n'est nullement vrai si l'on considère certaines interactions entre particules quantiques, qui peuvent avoir un spin (ou moment cinétique propre, sans équivalent classique).

7.2.3 Principe fondamental de la dynamique

Dans un référentiel Galiléen,

$$\boxed{\text{Torseur dynamique} = \text{Torseur des forces extérieures}} \quad (7.4)$$

ce qui se traduit, d'après la définition du torseur dynamique (6.19) et (6.20), par

$$\mathbf{S}(S/R) = \mathbf{F}_{\text{ext}}, \quad \mathbf{\Gamma}_K(S/R) = \mathbf{M}_K^{\text{ext}}. \quad (7.5)$$

Le point K est ici quelconque.

7.3 Théorèmes généraux

7.3.1 Théorème du centre d'inertie

Utilisons l'expression (6.19) de la résultante dynamique. On en déduit que *dans un référentiel Galiléen*,

$$\boxed{m(S)\mathbf{a}(G/R) = \mathbf{F}_{\text{ext}}} \quad (7.6)$$

7.3.2 Théorème du moment cinétique

En utilisant (6.25), l'équation (7.5) ci-dessus donne le cas le plus général du *théorème du moment cinétique* en un point K quelconque

$$\boxed{\frac{d\vec{\sigma}_K}{dt} = \mathbf{M}_K^{\text{ext}} + \mathbf{P}(S/R) \wedge \mathbf{V}(K/R)} \quad (7.7)$$

Cette relation se simplifie fortement lorsqu'on prend comme point K le centre d'inertie G , ou un point fixe O lorsqu'il en existe un. On déduit alors,

$$\boxed{\frac{d\vec{\sigma}_G \text{ ou } O}{dt} = \mathbf{M}_G^{\text{ext}} \text{ ou } O \quad (G \text{ centre d'inertie, } O \text{ point fixe})} \quad (7.8)$$

Les équations vectorielles (7.6) et (7.8) sont équivalentes chacune à trois équations différentielles scalaires. En intégrant (7.6), on obtient $\mathbf{V}(G/R)$, puis en intégrant une nouvelle fois, on obtient la trajectoire de G sous forme paramétrique. On décrit alors le mouvement de translation du repère barycentrique. La résolution des trois équations (7.8) caractérisera le mouvement du solide dans le référentiel barycentrique, c'est-à-dire son mouvement de rotation.

7.3.3 Lois de conservation

Un *système isolé*, par définition, ne subit aucune action extérieure : $\mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{M}_G^{\text{ext}} = \mathbf{0}$. Par conséquent on déduit de (7.6) et (7.8)

$$\mathbf{P}(S/R) = \mathbf{Cste}, \quad \vec{\sigma}_G = \mathbf{Cste}. \quad (7.9)$$

Le torseur cinétique d'un système isolé est indépendant du temps.

Contrairement au principe de l'action et de la réaction 7.2.2, ces lois de conservation sont, en l'état présent de nos connaissances, toujours valables. C'est la nécessité de les vérifier qui a conduit, par exemple, à introduire la notion de spin d'une particule. Le moment cinétique total de la particule étant la somme de son moment cinétique orbital (comme en mécanique classique) et de son moment cinétique propre, ou de spin (sans équivalent classique).

7.3.4 Action de la pesanteur

C'est un exemple de *force répartie*. Sur chaque élément de volume dV , localisé autour du point M , s'exerce la force élémentaire

$$d\mathbf{f} = \mathbf{g}(M)\rho(M)dV,$$

dans le cas le plus général d'un solide inhomogène placé dans un champ de pesanteur non uniforme. On en déduit pour un point K quelconque

$$\mathbf{F}_P \equiv \int_{(S)} \mathbf{g}(M)\rho(M)dV, \quad \mathbf{M}_K^P \equiv \int_{(S)} \mathbf{KM} \wedge \mathbf{g}(M)\rho(M)dV. \quad (7.10)$$

Un cas particulier important est celui où un des corps qui exerce une force gravitationnelle est bien plus lourd et plus grand que les autres. C'est le cas à la surface de la terre : tous les corps sont attirés par la terre, avec une force de pesanteur qui ne varie (faiblement) que sur de très grandes distances ($g = 9.832 \text{ m/s}^2$ au pôle Nord et $g = 9.781 \text{ m/s}^2$ à l'Equateur). Leurs interactions gravitationnelles mutuelles sont bien sûr négligeables, et à une excellente approximation on peut les supposer soumis à une accélération de la pesanteur constante et homogène sur tout leur volume. Par ailleurs la terre est suffisamment étendue pour que sa surface soit localement assimilable à un plan, et les vecteurs verticaux $\mathbf{g}$ tous parallèles. Les relations (7.10) deviennent, en utilisant la définition du centre d'inertie (5.2),

$$\mathbf{F}_P = \mathbf{g} \int_{(S)} \rho(M)dV = M(S)\mathbf{g}, \quad (7.11)$$

$$\mathbf{M}_K^P = \left(\int_{(S)} \mathbf{KM}\rho(M)dV \right) \wedge \mathbf{g} = \mathbf{KG} \wedge M(S)\mathbf{g}. \quad (7.12)$$

Cette dernière équation établit que le centre d'inertie G est le point d'application de la résultante des forces de pesanteur sur le solide. Ceci justifie *a posteriori* l'appellation *centre de gravité* pour G .

7.4 Actions de contact

Soit I le point de contact entre les deux solides (S_1) et (S_2) . Si ceux-ci sont de forme assez régulière, il existe un *plan osculateur* Π tangent en I à chacun des solides.

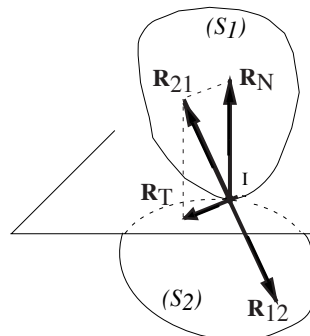


Figure 7.1: Actions de contact entre deux solides.

Supposer le contact ponctuel a une conséquence dynamique : le moment en I des forces de contact est nul (voir la remarque 3). La résultante des forces de contact exercées par (S_2) sur (S_1) est la *réaction* de (S_2) sur (S_1) , notée $\mathbf{R}_{21}$. Par le principe de l'action et de la réaction, elle est opposée à la réaction de (S_1) sur (S_2) ,

$$\mathbf{R}_{21} = -\mathbf{R}_{12}.$$

On définit la *réaction normale* $\mathbf{R}_N \perp \Pi$, et la *réaction tangentielle* $\mathbf{R}_T \in \Pi$,

$$\mathbf{R}_{21} = \mathbf{R}_N + \mathbf{R}_T.$$

Deux cas sont à considérer, selon qu'il y a ou non glissement d'un solide par rapport à l'autre au point de contact.

(1) Cas du glissement

Dans ce cas, la vitesse de glissement est non nulle, $\mathbf{V}_g(S_1/S_2) \neq O$. Cette vitesse de glissement est nécessairement dans le plan Π , puisque les solides ne s'interpénètrent pas (et ne se séparent pas non plus, sinon plus de contact entre eux!).

La réaction tangentielle est alors complètement déterminée par les lois expérimentales de Coulomb, qui stipulent que :

- $\mathbf{R}_T$ a même support que la vitesse de glissement,
- Elle est orientée en sens inverse de la vitesse de glissement,
- sa norme est donnée par la relation

$$\|\mathbf{R}_T\| = \mu \|\mathbf{R}_N\| \quad (7.13)$$

où μ est une constante appelée *coefficient de frottement*,

- μ est indépendant de V_g .

(2) Cas du non glissement

Dans ce cas, la vitesse de glissement est nulle, $\mathbf{V}_g(S_1/S_2) = O$. La réaction tangentielle n'est pas spécifiée, mais sa norme *doit* vérifier une inégalité,

$$\|\mathbf{R}_T\| < \mu \|\mathbf{R}_N\| \quad (7.14)$$

Notons qu'on a le même nombre d'équations dans les deux cas. En effet, s'il n'y a pas de glissement on perd l'équation (7.13), mais on a une équation cinématique supplémentaire qui exprime précisément la condition de non glissement.

Par ailleurs, il n'est pas toujours possible de prévoir *a priori* si un mouvement s'effectue avec ou sans glissement. On peut ainsi être amené à prendre *comme hypothèse* un roulement sans glissement. On en déduit $\mathbf{R}_T$, puis on vérifie l'inégalité (7.14). Une violation de cette inégalité signifie que l'hypothèse de non glissement n'est pas acceptable, soit dès le départ soit dans une seconde phase du mouvement. Il faut alors reprendre les calculs sous l'hypothèse de mouvement avec glissement.

Remarque 1 : Il faut bien se garder de conclure de (7.14) que, en l'absence de glissement, la réaction tangentielle est nulle! Pour vous en convaincre, pensez à une voiture sur une route verglacée : le coefficient de frottement devient nul, la réaction tangentielle est nulle, les roues glissent sur le sol et la voiture ne peut plus démarrer! Pour que la voiture avance, il faut être dans la situation optimale de roulement sans glissement, avec un coefficient de frottement entre pneus et route non nul, et une réaction tangentielle non nulle aux points de contact.

Remarque 2 : Il est tentant d'appliquer le théorème du moment cinétique au point de contact I . En effet, I est le point d'application de la réaction, dont le moment est de ce fait nul. Mais il ne faut surtout pas confondre I avec un des points matériels I_{S_1} ou I_{S_2} attaché à chacun des solides! En particulier, I peut voir une vitesse non nulle même si un des solides est immobile, et en condition de roulement sans glissement! Il ne faut donc pas se tromper, en appliquant incorrectement (7.8) à la place de (7.7)!

Remarque 3 : Expérimentalement, il faudrait considérer deux coefficients de frottements différents. Le coefficient figurant dans (7.14) est le *coefficient de frottement statique* μ_s . Celui figurant dans (7.13) est le *coefficient de frottement dynamique* μ_d . On mesure toujours $\mu_d < \mu_s$.

Remarque 4 : Le contact n'est jamais strictement ponctuel (ou selon une droite), mais s'effectue plutôt sur une surface². On est ainsi amené à introduire des moments de résistance au *pivotement* et au *roulement*, de même support que les vitesses angulaires correspondantes, opposés à elles, et de normes

$$||\mathbf{M}_{\text{roulement}}|| = \eta_R ||\mathbf{R}_N||, \quad ||\mathbf{M}_{\text{pivotement}}|| = \eta_P ||\mathbf{R}_N||.$$

7.5 Théorème de l'énergie cinétique

7.5.1 Particule ponctuelle

Soit $\mathbf{f}$ la force appliquée à une particule de masse m , et $d\mathbf{l}$ son déplacement durant l'intervalle de temps dt . Le travail élémentaire³ effectué par la force est

$$\delta W = \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dt$$

On définit la *puissance instantanée* $\mathcal{P}$ par

$$\mathcal{P} \equiv \frac{\delta W}{dt} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}. \quad (7.15)$$

En utilisant le principe fondamental de la dynamique pour une particule, on a

$$\delta W = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} \cdot \mathbf{v} dt = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

En intégrant cette relation entre deux points A et B , on obtient

$$E_c(B) - E_c(A) \equiv \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = W_{AB} = \int_A^B \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} \quad (7.16)$$

²Cela vient de ce que les solides sont élastiques, et non parfaitement rigides, et se déforment donc sous l'effet des forces de contact normales.

³La notation δW , plutôt que dW , indique que le travail infinitésimal n'est *a priori* pas la différentielle totale exacte d'une fonction.

7.5.2 Système de particules

Sur chaque particule s'exerce une force $\mathbf{f}_i = \mathbf{f}_i^{\text{ext}} + \mathbf{f}_i^{\text{int}}$, qui effectue durant l'intervalle de temps dt un travail élémentaire

$$\delta W_i = \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{v}_i dt = \mathbf{f}_i^{\text{ext}} \cdot \mathbf{v}_i dt + \mathbf{f}_i^{\text{int}} \cdot \mathbf{v}_i dt = \delta W_i^{\text{ext}} + \delta W_i^{\text{int}} = d\left(\frac{1}{2}mv_i^2\right) = dE_c^i$$

En sommant sur toutes les particules, et en intégrant entre deux instants t_1 et t_2 ,

$$E_c(t_2) - E_c(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \mathbf{f}_i^{\text{int}} \cdot \mathbf{v}_i dt + \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \mathbf{f}_i^{\text{ext}} \cdot \mathbf{v}_i dt = W_{\text{int}} + W_{\text{ext}} \quad (7.17)$$

La variation d'énergie cinétique entre les instants t_1 et t_2 d'un système matériel quelconque est la somme des travaux des forces intérieures et des travaux des forces extérieures effectués entre ces deux instants.

7.5.3 Cas du solide

Le solide étant rigide, les distances $M_i M_j$ entre deux points quelconques du solide sont invariantes, et les forces intérieures ne travaillent pas. Cherchons l'expression de la puissance des forces.

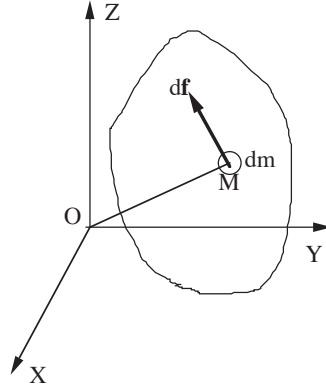


Figure 7.2: Position d'un solide.

Chaque élément de masse dm est soumis à une force $d\mathbf{f}$. Soit $d\mathcal{P}$ la puissance infinitésimale de cette force. Alors

$$d\mathcal{P} = d\mathbf{f} \cdot \mathbf{V}(M/R) = d\mathbf{f} \cdot [\mathbf{V}(G/R) + \boldsymbol{\Omega}(S/R) \wedge \mathbf{GM}],$$

où on a utilisé le fait que le champ de vitesse du solide est un torseur, et introduit le centre d'inertie G . Intégrons sur tout le volume du solide, et sortons des intégrales les vecteurs constants (indépendants des coordonnées de M)

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \int_{(S)} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{V}(G/R) + \int_{(S)} [d\mathbf{f}, \boldsymbol{\Omega}(S/R), \mathbf{GM}] \\ &= \left(\int_{(S)} \mathbf{a}(M/R) dm \right) \cdot \mathbf{V}(G/R) + \boldsymbol{\Omega}(S/R) \cdot \left(\int_{(S)} \mathbf{a}(M/R) \wedge \mathbf{GM} dm \right) \\ &= \mathbf{S} \cdot \mathbf{V}(G/R) + \boldsymbol{\Gamma}_G \cdot \boldsymbol{\Omega}(S/R), \end{aligned}$$

en introduisant le torseur dynamique (6.19) et (6.20). Puisque le torseur dynamique est égal au torseur des forces extérieures, on trouve en définitive

$$\mathcal{P} = \frac{dE_c}{dt} = \mathbf{F}_{\text{ext}} \cdot \mathbf{V}(G/R) + \mathbf{M}_G^{\text{ext}} \cdot \boldsymbol{\Omega}(S/R). \quad (7.18)$$

La dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique d'un solide est donc égale au produit scalaire du torseur cinématique et du torseur des forces extérieures. Nous avons montré (§ 2.2.5, équation (2.31)) qu'il s'agit d'un *invariant*, indépendant du point où il est calculé (à condition que les éléments de réduction des deux torseurs soient exprimés au *même* point). On peut donc écrire, en appelant A un point quelconque du solide,

$$\mathcal{P} = \frac{dE_c}{dt} = \mathbf{F}_{\text{ext}} \cdot \mathbf{V}(A/R) + \mathbf{M}_A^{\text{ext}} \cdot \boldsymbol{\Omega}(S/R). \quad (7.19)$$

Il n'est par ailleurs pas nécessaire, lorsque plusieurs forces agissent sur un solide, de calculer les éléments de réduction du torseur résultant. La puissance instantanée des forces est égale à la somme des puissances de chacune des forces, que l'on peut calculer séparément en des points différents, par exemple les points d'applications de chacune des forces : le calcul est plus simple puisque les moments sont nuls. Pour un couple de forces, qui est aussi un couple au sens des torseurs (c'est-à-dire un torseur ayant même valeur en tout point) seul intervient par contre le deuxième terme, $\mathbf{M}_A^{\text{ext}} \cdot \boldsymbol{\Omega}(S/R)$.

7.5.4 Système de solides

Attention! Les formules (7.18) et (7.19) ne sont pas valables pour un système de solides. Le calcul de la puissance doit être effectué en sommant sur tous les solides i . On applique alors le principe des actions mutuelles pour simplifier l'expression.

$$\frac{d}{dt} \sum_i T_i = \sum_i \mathcal{P}_i.$$

Solides en contact

Regardons le cas particulier de deux solides en contact. Soit I le point de contact, S_1 et S_2 les solides. On note $\mathbf{R}_{21}$ l'action de contact du solide S_2 sur le solide S_1 . La puissance exercée par l'action de contact sur le solide S_1 est

$$\frac{\delta W(S_1)}{dt} = \mathbf{R}_{21} \cdot \mathbf{V}(I_1/R),$$

où I_1 est le point du solide S_1 , coïncidant à l'instant considéré avec le point de contact I . Pour avoir la puissance des actions de contact sur le système des deux solides, il suffit d'ajouter le terme équivalent pour S_2 ,

$$\frac{\delta W(S_1 + S_2)}{dt} = \mathbf{R}_{21} \cdot \mathbf{V}(I_1/R) + \mathbf{R}_{12} \cdot \mathbf{V}(I_2/R).$$

Le principe des actions mutuelles donne alors

$$\frac{\delta W(S_1 + S_2)}{dt} = \mathbf{R}_{21} \cdot [\mathbf{V}(I_1/R) - \mathbf{V}(I_2/R)] = \mathbf{R}_{21} \cdot \mathbf{V}_g(S_1/S_2) \quad (7.20)$$

qui met en évidence la *vitesse de glissement* entre les deux solides (3.18).

Lorsqu'elle est non nulle, la vitesse de glissement est dans le sens opposé à la composante tangentielle de $\mathbf{R}_{21}$, qui seule contribue au produit scalaire. On en déduit que *le travail total des actions de contact entre deux solides est négatif ou nul : il s'agit d'un travail résistant*.

Ce travail est nul dans deux cas. Le premier est celui du *glissement sans frottement*, où $\mathbf{R}_{21} = \mathbf{0}$.

Le deuxième cas, bien plus réaliste et important en Mécanique du solide, est celui du *roulement sans glissement*. Dans ces conditions, $\mathbf{V}_g(S_1/S_2) = \mathbf{0}$. En l'absence de glissement, les forces de contact ne travaillent pas car *leur point d'application a une vitesse nulle*⁴. C'est l'explication physique de l'importance historique de l'invention de la roue : on remplace un mouvement de glissement, qui nécessite une puissance considérable, par un mouvement de roulement sans glissement qui n'en nécessite (presque) pas.

Justifions ce "presque", même si les frottements de roulement et de pivotement sont hors programme des concours. Nous les avons introduit à la remarque 3 du § 3.4.1. Ils doivent être pris en compte lorsque le contact entre les deux solides ne peut plus être considéré comme ponctuel. Les équations précédentes se généralisent facilement. Pour le solide S_1 ,

$$\frac{\delta W(S_1)}{dt} = \mathbf{R}_{21} \cdot \mathbf{V}(I_1/R) + \mathbf{M}_I^{21} \cdot \boldsymbol{\Omega}(S_1/R),$$

soit pour le système

$$\frac{\delta W(S_1 + S_2)}{dt} = \mathbf{R}_{21} \cdot \mathbf{V}(I_1/R) + \mathbf{R}_{12} \cdot \mathbf{V}(I_2/R) + \mathbf{M}_I^{21} \cdot \boldsymbol{\Omega}(S_1/R) + \mathbf{M}_I^{12} \cdot \boldsymbol{\Omega}(S_2/R).$$

Le principe des actions mutuelles pour les moments donne

$$\frac{\delta W(S_1 + S_2)}{dt} = \mathbf{R}_{21} \cdot [\mathbf{V}(I_1/R) - \mathbf{V}(I_2/R)] + \mathbf{M}_I^{21} \cdot [\boldsymbol{\Omega}(S_1/R) - \boldsymbol{\Omega}(S_2/R)],$$

qui met en évidence la *vitesse angulaire relative* entre les deux solides, $\boldsymbol{\Omega}(S_1/S_2) \equiv \boldsymbol{\Omega}(S_1/R) - \boldsymbol{\Omega}(S_2/R)$. L'équation (7.20) est donc remplacée par

$$\frac{\delta W(S_1 + S_2)}{dt} = \mathbf{R}_{21} \cdot \mathbf{V}_g(S_1/S_2) + \mathbf{M}_I^{21} \cdot \boldsymbol{\Omega}(S_1/S_2).$$

Ce dernier terme, dans le cas d'une roue roulant sans glissement sur une route, ne peut être nul s'il y a du frottement de roulement. Il est néanmoins très inférieur à la puissance nécessaire pour faire glisser la même charge.

7.5.5 Énergie potentielle. Intégrale première du mouvement

Le travail d'une force $\mathbf{F} = -\nabla U$ dérivant d'un potentiel U est

$$\delta W = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = -\nabla U \cdot d\mathbf{l} = -dU.$$

⁴Je réinsiste, après la remarque 1 du § 7.4, sur le fait que la raison *n'est pas* l'annulation de la force de frottement. Sauf cas très particulier, la force de frottement n'est pas nulle, sans quoi le roulement sans glissement serait impossible.

Soit alors un système soumis à plusieurs forces. Appelons $\mathbf{F}_{\text{pot}}$ une force dérivant d'un potentiel U (par exemple le poids), et $\mathbf{F}'$ l'ensemble des autres forces. Alors

$$\begin{cases} \delta W_{\text{pot}} = \mathbf{F}_{\text{pot}} \cdot d\mathbf{l} = -dU \\ \delta W = \mathbf{F}_{\text{pot}} \cdot d\mathbf{l} + \mathbf{F}' \cdot d\mathbf{l} = dE_c \end{cases} \implies \delta W' \equiv \mathbf{F}' \cdot d\mathbf{l} = dE_c + dU.$$

En intégrant cette expression entre deux instants t_1 et t_2 , on obtient

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}' \cdot d\mathbf{l} = W'(t_1 \rightarrow t_2) = E_c^2 - E_c^1 + U_2 - U_1 \equiv E_m^2 - E_m^1, \quad (7.21)$$

où on a défini l'énergie mécanique du système, $E_m = E_c + U$. Cette énergie mécanique E_m est conservée si :

- Le système est isolé (les forces extérieures ne travaillent pas)
- Le système est conservatif (les forces de liaison ne travaillent pas)

Les équations de la dynamique tirées des théorèmes généraux, (7.6) et (7.8), font intervenir les dérivées secondes des positions ou des angles. Une équation telle que $E_m = \text{Cste}$ ne fait intervenir que les dérivées premières (vitesses ou vitesses angulaires). On dit qu'on a obtenu une *intégrale première* du mouvement.

7.6 Conditions d'équilibre d'un solide

Un solide est en équilibre par rapport à un référentiel si *tous* ses points ont une vitesse nulle à *tout* instant.

Il faut donc qu'à un instant t donné le torseur cinématique soit le torseur nul :

$$\mathbf{V}(A/R) = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\Omega}(S/R) = \mathbf{0},$$

où A est un point quelconque. Le torseur cinétique est alors nul à l'instant t . L'équilibre ne peut subsister que si la dérivée par rapport au temps du torseur cinétique est elle aussi nulle, ce qui impose la nullité du torseur dynamique. Un solide est donc en équilibre si les *quatre* relations suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} \mathbf{V}(A/R) = \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{0} \end{cases}, \quad \begin{cases} \boldsymbol{\Omega}(S/R) = \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_A^{\text{ext}} = \mathbf{0} \end{cases}. \quad (7.22)$$

7.7 Référentiels non Galiléens

Les lois de Newton (7.4) ne sont valables que dans un référentiel Galiléen.

Soient donc $R(O, X, Y, Z)$ un référentiel Galiléen, $T(C, x, y, z)$ un référentiel en mouvement quelconque par rapport à (R) , et M un point mobile dans les deux référentiels. Nous avons montré au paragraphe 3.2.4 que

$$\mathbf{a}(M/R) = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_c \text{ où } \begin{cases} \mathbf{a}_r \equiv \mathbf{a}(M/T) \\ \mathbf{a}_e \equiv \mathbf{a}(C/R) + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \mathbf{CM} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{CM}) \\ \mathbf{a}_c \equiv 2\boldsymbol{\Omega}(T/R) \wedge \mathbf{V}(M/T) \end{cases} \quad (7.23)$$

sont respectivement les accélérations relatives, d'entraînement et de Coriolis.

On vérifie que si (T) est en translation rectiligne uniforme par rapport à (R) , soit $\boldsymbol{\Omega}(T/R) = \mathbf{0}$ et $\mathbf{a}(C/R) = \mathbf{0}$, alors $\mathbf{a}(M/R) = \mathbf{a}(M/T)$ comme il se doit puisque (T) est Galiléen dans ce cas.

Replaçons nous dans le cas général, et supposons qu'on a un système Σ de points M_i associés à des masses m_i . De (7.23) on déduit

$$\sum_i m_i \mathbf{a}(M_i/T) = \sum_i m_i \mathbf{a}(M_i/R) - \sum_i m_i \mathbf{a}_e^i - \sum_i m_i \mathbf{a}_c^i,$$

soit encore

$$\mathbf{S}_r(\Sigma/T) = \mathbf{S}(\Sigma/R) + \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_c \quad \text{où} \quad \mathbf{F}_{e,c} \equiv - \sum_i m_i \mathbf{a}_{e,c}^i, \quad (7.24)$$

en introduisant les forces d'entraînement et de Coriolis. De la même façon nous pouvons écrire les moments dynamiques associés aux diverses composantes de (7.23),

$$\mathbf{\Gamma}_K^r(\Sigma/T) = \mathbf{\Gamma}_K(\Sigma/R) + \mathbf{M}_K^e + \mathbf{M}_K^c. \quad (7.25)$$

Dans le référentiel mobile, le théorème du centre d'inertie s'écrira donc

$$\mathbf{S}_r(\Sigma/T) = \left. \frac{d\mathbf{P}_r(\Sigma/T)}{dt} \right|_{(T)} = \mathbf{F}_{\text{ext}} + \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_c. \quad (7.26)$$

Dans la démonstration du théorème du moment cinétique, vue au § 6.4, nous n'avions fait aucune hypothèse sur le caractère Galiléen ou non du référentiel. Par conséquent, si tous les moments sont calculés en un point K fixe dans (T) , le théorème du moment cinétique dans le référentiel mobile est

$$\mathbf{\Gamma}_K^r(\Sigma/T) = \left. \frac{d\vec{\sigma}_K^r(\Sigma/T)}{dt} \right|_{(T)} = \mathbf{M}_K^{\text{ext}} + \mathbf{M}_K^e + \mathbf{M}_K^c. \quad (7.27)$$

Dans le cas particulier du référentiel barycentrique, il n'y a pas de force de Coriolis puisque la vitesse de rotation $\boldsymbol{\Omega}(R^*/R) = \mathbf{0}$, et le moment en G de la force d'entraînement est nul. Le théorème du moment cinétique s'écrit alors

$$\left. \frac{d\vec{\sigma}_G^*(\Sigma/R^*)}{dt} \right|_{(R^*)} = \mathbf{M}_G^{\text{ext}}. \quad (7.28)$$

7.8 Liaisons entre solides

Un solide possède, a priori, six degrés de liberté. Les *liaisons* qui peuvent exister avec d'autres solides ont pour effet de restreindre les mouvements possibles, et donc de diminuer les degrés de liberté.

En mécanique, définir une liaison revient à fixer les mouvements permis du solide. Il n'est en général pas nécessaire de considérer la réalisation pratique de la liaison. Dans le cas le plus simple, la liaison est considérée sans jeu, et sans frottement. Voyons quelques exemple.

• Liaison ponctuelle

Elle est réalisée lorsqu'on pose une bille sphérique sur un plan, ou entre deux cylindres croisés en contact par leurs génératrices. Il subsiste cinq degrés de liberté.

- **Liaison rotule**

Elle est réalisée lorsque trois points d'une même sphère (non alignés sur un méridien) restent en contact. Il reste trois degrés de liberté, de sorte que toutes les rotations autour d'un point fixe sont autorisées (formellement; en pratique, leur amplitude est très rarement complète). Un exemple simple est l'attelage d'une caravane, qui doit permettre les mouvements de *roulis* (rotation autour de l'axe caravane/voiture), de *tangage* (rotation autour d'un axe parallèle à la route, perpendiculaire à l'axe caravane/voiture) et enfin de *lacet* (rotation d'axe orthogonal à la route). La figure 7.3 donne une illustration d'une réalisation pratique.

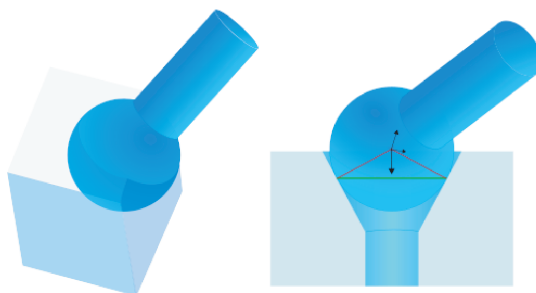


Figure 7.3: Réalisations d'une liaison rotule.

- **Liaison glissière**

Cette liaison est telle que les deux solides ont en commun deux droites parallèles. Le seul mouvement possible est alors la translation selon cette direction commune. On peut penser au tiroir d'un meuble, où à un train sur ses rails.

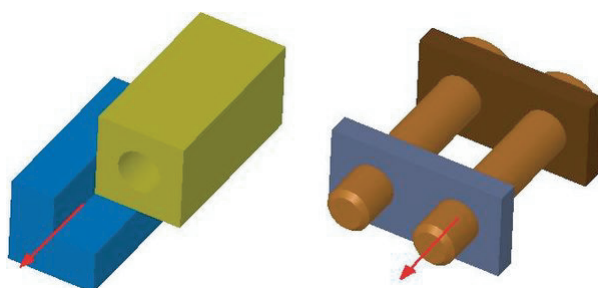


Figure 7.4: Réalisations d'une liaison glissière.

- **Liaison pivot ou rotoïde**

Cette liaison permet seulement la rotation du solide autour d'un axe fixe. Le solide mobile est appelé *rotor*, les pièces fixes qui supportent l'axe de rotation et définissent la liaison sont appelées *stator*.

Ces liaisons admettent des représentations normalisées (qui ne sont rien de plus que des symboles permettant de les identifier sur un schéma technique) qui sont données ci-dessous.

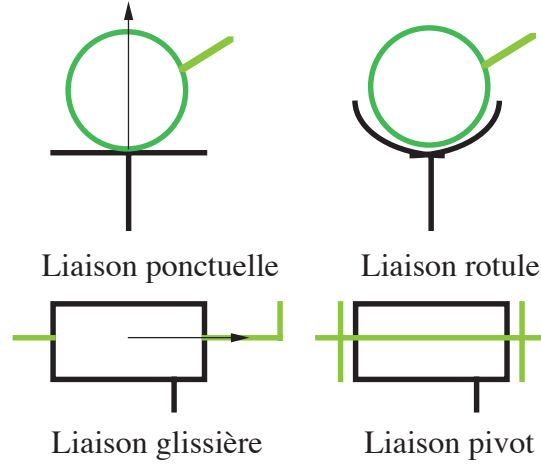


Figure 7.5: Représentations normalisées de quelques liaisons.

7.9 Rotation autour d'un axe fixe

7.9.1 Liaison pivot ou rotoïde

Dans cette section, nous nous intéressons à un solide (S) de forme quelconque tournant autour d'un axe fixe Δ que nous identifierons avec l'axe OZ du référentiel du laboratoire $R(O, X, Y, Z)$, supposé Galiléen, et avec l'axe Oz d'un référentiel lié au solide.

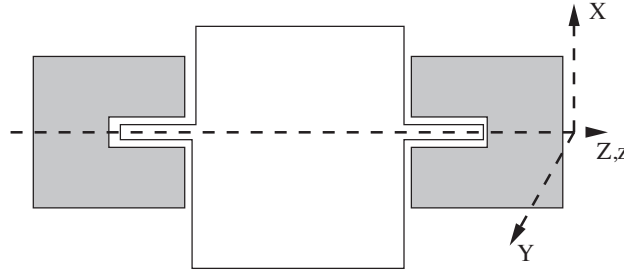


Figure 7.6: Solide en rotation autour d'un axe fixe. En grisé, le stator, en blanc le rotor.

Le rotor a un seul degré de liberté angulaire, ce qui définit une liaison *rotoïde*. Cette liaison est dite *parfaite* si la puissance des forces de contact est nulle. Soient O un point de Δ , $\mathbf{R}$ et $\mathbf{J}_O$ respectivement la résultante et le moment en O des forces de contact. Le théorème de l'énergie cinétique (7.18) nous dit que

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{V}(O/R) + \boldsymbol{\Omega}(S/R) \cdot \mathbf{J}_O = \boldsymbol{\Omega}(S/R) \cdot \mathbf{J}_O$$

puisque O est un point fixe. La condition pour une liaison parfaite est donc

$$\boldsymbol{\Omega}(S/R) \cdot \mathbf{J}_O = 0 \quad \implies \quad J_O^z = 0. \quad (7.29)$$

Comme réalisations technologiques pratiques, citons les liaisons à pointeaux (montres à rubis), les roulements à billes (roues de vélo, de voitures) et les liaisons par coussin d'air (turbines).

7.9.2 Equations du mouvement

Finissons de définir le référentiel lié au solide en appelant Ox la droite du plan XOY qui passe par la projection orthogonale H de G sur ce plan. Oy est tel que $S(O, x, y, z)$ soit orthonormé direct. Le solide étant supposé quelconque, ces axes n'ont aucune raison *a priori* d'être des axes principaux d'inertie. Soit θ l'angle $\widehat{XOx}$, et a la distance (constante) entre G et $OZ = Oz$.

Théorème de l'énergie cinétique

Soient $\mathbf{F}$ la résultante, et $\mathbf{M}_O$ le moment en O des forces autres que les actions de contact. Le pont O étant fixe, le théorème de l'énergie cinétique donne

$$\frac{dE_c}{dt} = \boldsymbol{\Omega}(S/R) \cdot (\mathbf{J}_O + \mathbf{M}_O) = (J_O^z + M_O^z) \dot{\theta},$$

et par ailleurs

$$E_c = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}(S/R) \cdot [J(O)] \boldsymbol{\Omega}(S/R) = \frac{1}{2} I_{zz} \dot{\theta}^2.$$

On en déduit une première équation,

$$I_{zz} \ddot{\theta} = J_O^z + M_O^z \quad (7.30)$$

Théorème du centre d'inertie

D'après la définition de l'axe Ox ,

$$\mathbf{OG} = \mathbf{OH} + a\mathbf{i}, \quad \mathbf{V}(G/R) = a\dot{\theta}\mathbf{j}, \quad \mathbf{a}(G/R) = a\ddot{\theta}\mathbf{j} - a\dot{\theta}^2\mathbf{i},$$

d'où on déduit par le principe fondamental de la dynamique

$$F_x + R_x = -ma\dot{\theta}^2 \quad (7.31)$$

$$F_y + R_y = ma\ddot{\theta} \quad (7.32)$$

$$F_z + R_z = 0 \quad (7.33)$$

Théorème du moment cinétique

Le moment cinétique au point fixe O est

$$\vec{\sigma}_O = [J(O)] \boldsymbol{\Omega}(S/R) = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_{xz}\dot{\theta} \\ -I_{yz}\dot{\theta} \\ I_{zz}\dot{\theta} \end{pmatrix}$$

soit

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_O &= \dot{\theta} (-I_{xz}\mathbf{i} - I_{yz}\mathbf{j} + I_{zz}\mathbf{k}) \\ \frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} &= \ddot{\theta} (-I_{xz}\mathbf{i} - I_{yz}\mathbf{j} + I_{zz}\mathbf{k}) + \dot{\theta}^2 (-I_{xz}\mathbf{j} + I_{yz}\mathbf{i}), \end{aligned}$$

ce qui complète les équations du mouvement

$$J_O^x + M_O^x = -I_{xz}\ddot{\theta} + I_{yz}\dot{\theta}^2 \quad (7.34)$$

$$J_O^y + M_O^y = -I_{yz}\ddot{\theta} - I_{xz}\dot{\theta}^2 \quad (7.35)$$

$$J_O^z + M_O^z = I_{zz}\ddot{\theta} \quad (7.36)$$

Les équations (7.36) et (7.30) étant identiques, on dispose de six équations pour sept inconnues ($\mathbf{R}$, $\mathbf{J}_O$ et $\theta(t)$). Il faut donc faire appel à la nature de la liaison, que nous supposons parfaite ($J_O^z = 0$) ce qui réduit les inconnues à six.

7.10 Poulies et fils

Nous allons voir un exemple de systèmes comportant une poulie et des masses, reliées par un fil passant sur la poulie. Ce système est appelé *machine d'Atwood*, et schématisé ainsi :

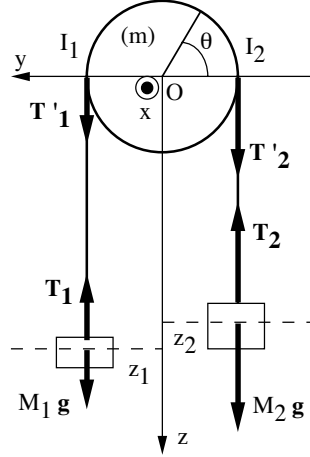


Figure 7.7: Schéma de la machine d'Atwood.

Dans sa version la plus simple, on fait les hypothèses suivantes :

- (H1) : la liaison rotoïde entre la poulie et son axe est parfaite,
- (H2) : le fil est inextensible,
- (H3) : le fil est sans masse,
- (H4) : le fil ne glisse pas sur la poulie.

L'axe de rotation de la poulie sera supposé être un axe de symétrie de révolution. Nous noterons J le moment d'inertie de la poulie par rapport à son axe, et a le rayon de la gorge dans laquelle passe le fil. La figure décrit les autres paramètres, ainsi que le référentiel $R(O, X, Y, Z)$ considéré comme Galiléen.

Commençons par décrire la cinématique de ce système comportant trois solides, les masses M_1 et M_2 ainsi que la poulie (le fil étant sans masse ne compte pas).

La première équation exprime l'inextensibilité du fil (hypothèse H2),

$$z_1 + z_2 + \pi a = \text{Cste.} \quad \implies \quad \dot{z}_2 = -\dot{z}_1 \equiv \dot{z}. \quad (7.37)$$

La condition de non-glissement du fil sur la poulie (hypothèse H4) doit être écrite en chacun des deux points de contact I_1 et I_2 ,

$$\mathbf{V}(I_{\text{poulie}}/R) = \mathbf{V}(I_{\text{fil}}/R),$$

soit

$$\dot{\theta} \mathbf{e}_X \wedge (\pm a \mathbf{e}_Y) = \mp \dot{z} \mathbf{e}_Z.$$

Ces deux équations sont bien compatibles, et se traduisent par l'unique condition

$$a\dot{\theta} = -\dot{z}. \quad (7.38)$$

La première méthode de résolution utilise les théorèmes généraux. Le principe fondamental de la dynamique, appliqué à chacune des masses, donne après projection selon OZ ,

$$m_1\ddot{z}_1 = m_1g - T_1, \quad (7.39)$$

$$m_2\ddot{z}_2 = m_2g - T_2. \quad (7.40)$$

Il prend cette forme simple car nous négligeons ici la masse des fils (hypothèse $H3$).

Le principe de l'action et de la réaction donne deux relations entre les tensions des fils,

$$\mathbf{T}_1 = -\mathbf{T}'_1, \quad (7.41)$$

$$\mathbf{T}_2 = -\mathbf{T}'_2. \quad (7.42)$$

En effet, $\mathbf{T}_1$ est la force exercée par le fil sur la masse m_1 , et $\mathbf{T}'_1$ la force exercée par m_1 sur le fil, et de même pour la partie du fil accrochée à l'autre masse.

Enfin, on peut écrire le théorème du moment cinétique pour la poulie, au point O fixe situé sur l'axe de rotation. Le moment cinétique est $J\dot{\theta}\mathbf{e}_x$, d'où

$$J\ddot{\theta}\mathbf{e}_x = \mathbf{OI}_1 \wedge \mathbf{T}'_1 + \mathbf{OI}_2 \wedge \mathbf{T}'_2 = a\mathbf{e}_y \wedge T_1\mathbf{e}_z + (-a\mathbf{e}_y) \wedge T_2\mathbf{e}_z, \quad (7.43)$$

soit enfin

$$J\ddot{\theta} = a(T_1 - T_2). \quad (7.44)$$

Aucune autre force n'était à prendre en compte, le poids de la poulie ayant par symétrie son point d'application sur l'axe, et la liaison étant parfaite (hypothèse $H1$).

En éliminant de ces équations les tensions des fils, on trouve l'accélération commune à chacune des masses,

$$\ddot{z} = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1 + \frac{J}{a^2}}g. \quad (7.45)$$

On vérifie que c'est bien la masse la plus lourde qui descend!

Cette méthode a l'avantage de faire apparaître explicitement chaque occurrence d'une des hypothèses. On peut obtenir le résultat (7.45) plus rapidement en notant que le système est *conservatif*. En effet,

- La liaison rotoïde entre la poulie et son axe est parfaite, donc par définition le travail des actions de contact est nul ($H1$).
- Le fil ne glisse pas sur la poulie, donc la vitesse de glissement est nulle en I_1 et I_2 , et les tensions $\mathbf{T}'$ ne travaillent pas ($H4$).
- Enfin, le fil est inextensible donc il n'y a pas de vitesse relative entre le fil et la masse à laquelle il est accroché. Les tensions $\mathbf{T}$ ne travaillent pas ($H2$).

On prendra bien garde qu'il faut raisonner sur les *travaux* et non sur les forces, la somme des travaux des forces intérieures n'étant pas nécessairement nulle.

Le fil étant sans masse, l'énergie cinétique totale du système est

$$E_c = \frac{1}{2}m_1\dot{z}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{z}_2^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2. \quad (7.46)$$

L'énergie potentielle est quant à elle

$$E_p = -m_1gz_1 - m_2gz_2. \quad (7.47)$$

Il suffit d'annuler la dérivée temporelle de l'énergie mécanique, en utilisant les relations cinématiques (7.37) et (7.38) pour retrouver (7.45).

Chapitre 8

Introduction à la mécanique des fluides

8.1 Description continue

On définit une *particule de fluide* comme un volume V de fluide tel que sa taille $a \sim V^{1/3}$ soit :

- très petite devant les échelles de longueur caractéristiques L de l'écoulement (rayon d'une conduite, taille d'un obstacle, largeur et profondeur d'un canal, ...)
- très grande devant le *libre parcours moyen* l des molécules, c'est-à-dire la distance typique que peut parcourir une molécule sans interagir avec les autres.

Lorsque $a \gg l$, la particule fluide contient un très grand nombre de molécules, et il est légitime de définir des quantités moyennées sur toutes ces molécules. Ainsi, on définit la vitesse d'une particule de fluide, comme la moyenne des vitesses de chacune des molécules à l'intérieur de cette particule de fluide. De même, on peut définir des grandeurs thermodynamiques à l'échelle de la particule fluide, telles que pression p , densité ρ et température T .

En général (sauf pour des fluides extrêmement dilués) $L \gg a \gg l$, et il est possible de décrire le fluide comme un *milieu continu*. La particule de fluide se voit attribuer des propriétés moyennées sur un grand nombre de molécules, qui peuvent néanmoins être considérées comme *locales* et indépendantes de la taille a . L'ensemble des vitesses $\mathbf{V}$ des particules de fluide de positions $\mathbf{r}$ à l'instant t définit un champ de vecteur $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$. De même, les *variables thermodynamiques locales* sont décrites par trois champs scalaires $p(\mathbf{r}, t)$, $\rho(\mathbf{r}, t)$, et $T(\mathbf{r}, t)$.

8.2 Statique des fluides

Dans cette section, nous nous intéressons à des problèmes indépendants du temps, dans lesquels le fluide est au repos par rapport au récipient qui le contient.

8.2.1 Pression

Soit un volume V de fluide, délimité par une surface fermée ∂V (voir fig. 8.1). L'action exercée sur ce volume de contrôle par le fluide environnant est une *action en surface*, car les forces entre molécules sont à courte portée.

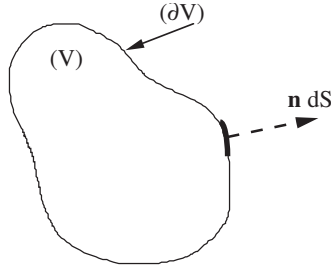


Figure 8.1: Volume de contrôle pour un fluide à l'équilibre.

Le volume V subit donc de la part du milieu extérieur une action qui se met sous la forme

$$\oint_{\partial V} \boldsymbol{\Sigma} dS$$

Lorsque la *contrainte*¹ $\boldsymbol{\Sigma}$ est normale à l'élément de surface, on appelle *pression* du fluide la quantité scalaire p telle que

$$\boldsymbol{\Sigma} dS \equiv -p \mathbf{n} dS, \quad (8.1)$$

où $\mathbf{n}$ est la normale à la surface orientée de l'intérieur vers l'extérieur.

Considérons un fluide au repos, de masse volumique ρ , et isolons par la pensée un volume infinitésimal comme sur la Fig. 8.2. Le fluide étant au repos, les contraintes tangentielles sont nulles et les seules forces surfaciques qui peuvent subsister sont des forces normales, donc des forces de pression. Le fluide peut par ailleurs être soumis à une force volumique $\mathbf{f}$, telle que la force de pesanteur $\mathbf{f} = \rho \mathbf{g}$, ou une force d'entraînement si le fluide est au repos dans un référentiel non Galiléen : $\mathbf{f} = -\rho \mathbf{a}_e$ (la force de Coriolis n'est pas à considérer si le fluide est au repos).

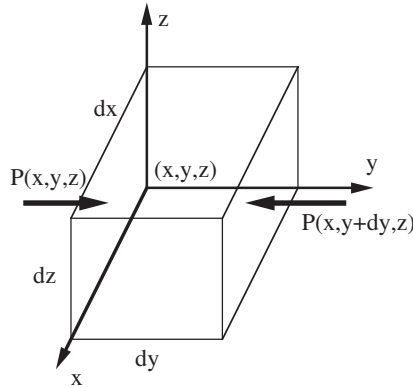


Figure 8.2: Volume élémentaire de fluide à l'équilibre.

L'élément de fluide est en équilibre, la somme des forces qui lui sont appliquées doit donc s'annuler. Si l'on projette sur la direction Oy , en respectant les conventions de signe de (8.1), on a

$$f_y dx dy dz \mathbf{e}_y + (-p(x, y, z) dx dz)(-\mathbf{e}_y) + (-p(x, y + dy, z) dx dz)(+\mathbf{e}_y) = 0$$

¹Une contrainte est une force par unité de surface.

soit encore

$$\left(f_y - \frac{\partial p}{\partial y}\right) dx dy dz = 0.$$

Selon les autres directions, on obtient des équations similaires. Le résultat se met donc sous la forme

$$-\nabla p + \mathbf{f} = \mathbf{0}. \quad (8.2)$$

C'est l'équation fondamentale de la statique des fluides.

8.2.2 Théorème d'Archimède

Considérons un corps entièrement immergé dans un fluide au repos. Il occupe un volume V_0 et subit de la part du fluide des forces de pressions. La résultante de ce système de forces est verticale, opposée au poids du volume V_0 de fluide. En effet, en l'absence du corps immergé, ce volume de fluide serait à l'équilibre sous l'action des forces de pression exercées par le fluide environnant, et des forces de pesanteur.

Dans ce raisonnement, il est crucial que le fluide soit au repos, ce qui exclut tout "mouvement perpétuel" basé sur les forces d'Archimède.

8.2.3 Exemples

Fluide incompressible dans un champ de pesanteur

Soit Oz l'axe vertical orienté vers le haut. Alors l'équation (8.2) donne

$$\nabla p = \rho \mathbf{g} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dp}{dz} = -\rho g \quad \Longrightarrow \quad dp = -\rho g dz,$$

ce qui donne

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = -\rho g \int_{z_1}^{z_2} dz \quad \Longrightarrow \quad p_2 - p_1 = -\rho g(z_2 - z_1).$$

Calculons la force exercée par un liquide sur une paroi verticale (Fig. 8.3).

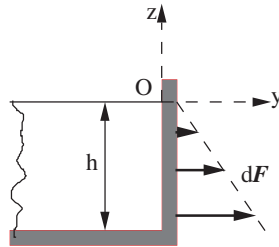


Figure 8.3: Distribution de forces sur une paroi verticale.

La force élémentaire exercée par le liquide sur un élément de paroi de largeur unité et d'épaisseur dz , situé à l'altitude z , est

$$d\mathbf{F} = -(-p \mathbf{n} dS) = p \times (1 \times dz) \mathbf{e}_y = -\rho g z dz \mathbf{e}_y.$$

En intégrant entre $-h$ et 0 , l'origine des altitudes étant prise en O à la surface libre, on obtient pour la résultante des forces

$$\mathbf{F} = \int_{-h}^0 -\rho g z dz \mathbf{e}_y = \rho g \frac{h^2}{2} \mathbf{e}_y.$$

On peut aussi calculer le moment en O de ces forces,

$$\mathbf{M}_O = \int \mathbf{OM} \wedge d\mathbf{F} = \mathbf{e}_x \int_{-h}^0 -\rho g z^2 dz = \rho g \frac{h^3}{3} \mathbf{e}_x.$$

Le torseur associé à cet ensemble de forces parallèles est donc celui d'une force $\mathbf{F}$, dont le point d'application est sur la paroi, à la distance $2h/3$ du point O .

Fluide compressible dans un champ de pesanteur

L'équation $dp = -\rho g dz$ est toujours valable, car la démonstration de (8.2) est locale et ne suppose pas le fluide incompressible. Il faut cependant connaître la relation entre densité et pression, c'est-à-dire *l'équation d'état* du fluide. Supposons alors qu'il s'agit d'un gaz parfait,

$$pV = nRT \quad \Longrightarrow \quad p = \underbrace{\frac{nM}{V}}_{=\rho} \frac{RT}{M},$$

avec n le nombre de moles par unité de volume, T la température thermodynamique, M la masse molaire du fluide, V son volume et $R = 8.31 \text{ J/K}$ la constante des gaz parfaits. Si le fluide est isotherme, l'équation s'intègre facilement

$$dp = -\frac{Mg}{RT} p dz \quad \Longrightarrow \quad \ln \frac{p}{p_1} = -\frac{Mg}{RT} (z - z_1) \quad \Longrightarrow \quad p = p_1 \exp \left[-\frac{Mg}{RT} (z - z_1) \right].$$

Pour l'air à 25°C ($T = 300\text{K}$, $M = 29 \text{ g}$), la distance caractéristique $RT/(Mg)$ vaut à peu près 8.7 km . Pour des différences d'altitudes petites devant cette longueur on doit retrouver le cas incompressible, ce qu'on peut vérifier en développant l'exponentielle au premier ordre en puissances de son argument.

Surface libre d'un fluide en rotation uniforme

Considérons un fluide contenu dans un récipient tournant à la vitesse angulaire constante ω par rapport à un référentiel terrestre, supposé Galiléen (Fig. 8.4). On cherche la forme prise par la *surface libre* du fluide.

Dans un référentiel lié au fluide, l'accélération d'entraînement est radiale,

$$\mathbf{a}_e(r) = +\omega^2 r \mathbf{e}_r,$$

et l'équation (8.2) conduit au système

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial r} = \rho \omega^2 r, \\ \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad p(r, z) = \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 + P(z) = \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 - \rho g z + \mathcal{C},$$

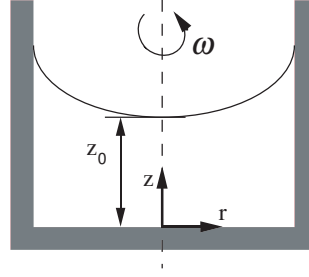


Figure 8.4: Fluide contenu dans un récipient en rotation à vitesse angulaire constante, autour d'un axe vertical.

où $\mathcal{C}$ est une constante d'intégration. Sachant que la pression atmosphérique est p_{atm} , cette constante se calcule à l'aide de la condition $p(r = 0, z = z_0) = p_{\text{atm}}$, ce qui donne pour le champ de pression à l'intérieur du fluide

$$p(r, z) - p_{\text{atm}} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 - \rho g(z - z_0).$$

À la surface libre du fluide la pression est partout égale à la pression atmosphérique ce qui fixe l'altitude d'un point de la surface en fonction du rayon :

$$z = z_0 + \frac{1}{2} \frac{\omega^2 r^2}{g}.$$

Ce profil parabolique a un certain intérêt pratique, pour la construction de miroirs de télescope. Ceux-ci doivent être de forme parabolique, car on les utilise pour observer à grande distance, et pour le miroir parabolique le point à l'infini et le foyer de la parabole sont en stigmatisme rigoureux. On les construit donc en faisant refroidir très lentement (l'échelle de temps typique est plusieurs mois) du verre liquide dans un moule maintenu en rotation à vitesse constante, déterminée en fonction de la distance focale que l'on souhaite.

8.3 Dynamique des fluides

Nous nous intéressons uniquement aux fluides *incompressibles*, pour lesquels $\rho = \text{Cste}$. On montre qu'il s'agit d'une excellente approximation pour des écoulements à vitesse faible devant la vitesse du son.

Un fluide réel présente de la viscosité, et exerce une contrainte tangentielle sur les parois du récipient qui le contient. Nous négligerons cet effet, et considérerons les fluides comme *parfaits*. Les seules contraintes seront donc normales, dues aux forces de pression. C'est une hypothèse assez grossière, mais qui dans bien des cas donne une première approximation du comportement du fluide.

Comme dernière hypothèse simplificatrice, nous supposons les écoulements *laminaires*. Cela signifie que la direction de la vitesse varie lentement, c'est-à-dire sur des échelles de longueur grandes par rapport à une longueur caractéristique de l'écoulement : conduite à courbure faible par rapport à son diamètre, obstacle d'épaisseur faible par rapport à sa longueur, etc... La limite inverse est un écoulement *turbulent*, qui se décompose en petits tourbillons dont la taille typique est intrinsèque à l'écoulement. En pratique, un écoulement laminaire se déstabilise lorsqu'on augmente la vitesse du fluide, et devient progressivement turbulent (pensez à un robinet dont on accroît progressivement le débit).

8.3.1 Conservation de la masse

Isolons par la pensée un domaine de l'espace, fixe par rapport au référentiel du laboratoire, au sein de la région occupée par le fluide. Ce domaine V , limité par la surface fermée ∂V , est appelé *volume de contrôle*.

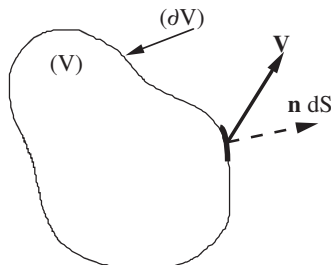


Figure 8.5: Volume de contrôle V délimité par la surface fermée ∂V .

La conservation de la masse de fluide impose que la variation de masse dans V ne peut être due qu'au flux de matière à travers la surface ∂V . Le flux de masse élémentaire *sortant* par l'élément de surface dS centré sur le point M , de normale $\mathbf{n}$ (orientée conventionnellement vers l'extérieur de la surface) est

$$d\Phi_{\text{masse}} = \rho \mathbf{V}(M) \cdot \mathbf{n} dS \quad (8.3)$$

où $\mathbf{V}(M)$ est la vitesse du fluide en M . La conservation de la masse de fluide impose donc

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \int_{\partial V} \rho \mathbf{V}(M) \cdot \mathbf{n} dS. \quad (8.4)$$

Remarque :

Cette équation est tout-à-fait générale, et ne suppose aucune approximation.

8.3.2 Equation de la quantité de mouvement

Pour un fluide, comme pour un solide, la quantité de mouvement du fluide à l'intérieur du volume de contrôle s'écrit

$$\mathbf{P} = \int_V \rho \mathbf{V}(M) dV$$

(Ne pas confondre le vecteur quantité de mouvement $\mathbf{P}$ et la pression p qui est un scalaire)

Le principe fondamental de la dynamique est valable pour l'ensemble du fluide contenu dans le volume de contrôle. La différence avec le cas du solide est que le fluide peut s'écouler à travers la surface du volume de contrôle. Le flux de quantité de mouvement, par analogie avec (8.3), est

$$d\Phi_{\text{mvt}} = [\rho \mathbf{V}(M)] \mathbf{V}(M) \cdot \mathbf{n} dS \quad (8.5)$$

La variation de quantité de mouvement dans le volume de contrôle est donc donnée par trois termes :

- les forces exercées sur la surface ∂V , qui se réduisent aux forces de pression pour un fluide parfait.
- la résultante des forces en volume de densité volumique $\mathbf{f}$ (par exemple la gravité, $\mathbf{f} = \rho\mathbf{g}$).
- le flux de quantité de mouvement à travers ∂V .

En tenant compte de l'ensemble de ces contributions,

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{V}(M) dV = \int_{\partial V} -p(M) \mathbf{n} dS + \int_V \mathbf{f} dV - \int_{\partial V} \rho \mathbf{V}(M) (\mathbf{V}(M) \cdot \mathbf{n} dS). \quad (8.6)$$

Cette équation n'est bien sûr rien d'autre que le principe fondamental de la dynamique appliqué au volume de contrôle de fluide.

Remarque :

Cette équation suppose uniquement le fluide parfait. Elle reste vraie s'il est compressible, et quelle que soit la nature de l'écoulement.

8.3.3 Equation de Bernouilli

Nous allons démontrer la forme la plus simple de cette équation, valable pour l'écoulement *permanent* et *laminaire* d'un fluide *parfait incompressible*. Contrairement à (8.4) et (8.6), l'équation de Bernouilli sous sa forme (8.7) n'est donc valable que sous ces conditions, très restrictives.

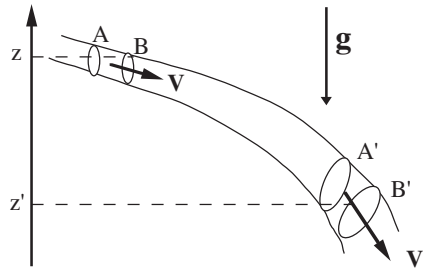


Figure 8.6: Tube de flux dans un écoulement permanent.

Considérons comme sur la Fig. 8.6 un tube de flux de section infinitésimale², limité par une surface tangente en chacun de ses points M à la vitesse du fluide $\mathbf{V}(M)$. Le fluide contenu à un instant t donné entre les points A , où la section du tube est dS perpendiculairement à ses génératrices, et A' où elle est dS' , est contenu à l'instant $t + dt$ entre les points B et B' . Tout se passe comme si le fluide compris entre A et B se retrouvait entre A' et B' . En A (resp. A') la vitesse du fluide est $\mathbf{V}$ (resp. $\mathbf{V}'$), normale à dS (resp. dS'), la pression p (resp. p') et l'altitude z (resp. z'). La conservation de la masse impose

$$dm = \rho dS V dt = \rho dS' V' dt.$$

²Un tube de flux est une enveloppe de lignes de courant, qui sont les lignes de champ du champ de vitesse, par définition tangentes en chacun de leurs points $\mathbf{r}$ à la vitesse du fluide $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ en ce point.

Ecrivons alors le théorème de l'énergie cinétique. La variation d'énergie cinétique est due au travail des forces de pesanteur, et à celui des forces de pression, soit

$$\frac{1}{2}dm(V'^2 - V^2) = dm(z - z')g + p dS V dt - p' dS' V' dt.$$

En utilisant l'équation précédente on aboutit à l'équation de Bernoulli,

$$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}V^2 = gz' + \frac{p'}{\rho} + \frac{1}{2}V'^2 = Cste. \quad (8.7)$$

Pour un écoulement permanent de fluide parfait incompressible, la quantité $gz + p/\rho + V^2/2$ est constante le long d'une ligne de courant.

8.3.4 Exemples

Tube de Pitot

Ce dispositif, schématisé en Fig. 8.7, permet de mesurer la vitesse au sein d'un écoulement par une simple mesure de pression.

Nous faisons l'hypothèse d'un écoulement permanent et laminaire de fluide parfait.

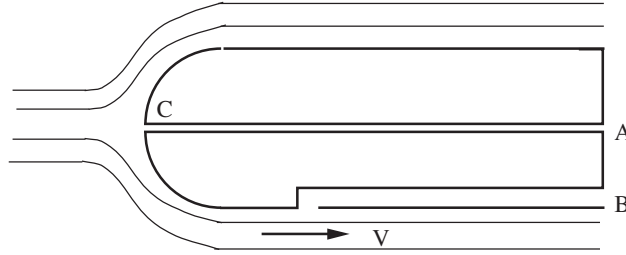


Figure 8.7: Tube de Pitot. En traits fins, on a représenté quelques lignes de champs de l'écoulement laminaire autour du tube.

L'appareil présente une symétrie de révolution autour de l'axe passant par C , ce qui fait que le fluide s'écoule de part et d'autre de C , mais qu'en ce point la vitesse est nulle. Si l'ouverture B est peu éloignée de C , la différence d'altitude entre ces deux points est négligeable. Si nous suivons un tube de flux passant au voisinage de C et B , nous pouvons écrire en utilisant l'équation de Bernoulli

$$\frac{p_C}{\rho} + 0 = \frac{p_B}{\rho} + \frac{1}{2}V_B^2 \quad \Rightarrow \quad V_B = \sqrt{2 \frac{p_A - p_B}{\rho}}.$$

Nous avons remplacé dans l'expression finale la pression en C par la pression en A , qui sont sensiblement identiques si le canal CA est suffisamment fin pour que l'écoulement y soit négligeable.

Un manomètre différentiel permet alors de déduire la vitesse relative entre le fluide et le tube de Pitot. Ce type de dispositif est utilisé dans les (petits) avions³.

³Le positionnement GPS rend quelque peu obsolète ce système pour les avions de ligne

Force exercée sur une conduite

Considérons l'écoulement permanent d'un fluide parfait dans une conduite faiblement coudée (le rayon de courbure du coude est supposé nettement plus grand que le rayon intérieur du tube).

Sous ces hypothèses, l'écoulement est laminaire si le débit n'est pas trop fort, ce que nous supposons.

L'angle entre les deux axes des tubes est θ .

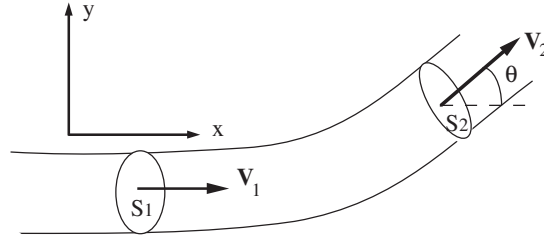


Figure 8.8: Ecoulement dans une conduite coudée.

Comme volume de contrôle, prenons la portion de fluide comprise entre les deux sections du tube sur le dessin, normales à l'axe du tube, d'aires respectives S_1 et S_2 . La conservation de la masse se traduit par

$$S_1 V_1 = S_2 V_2 \quad (8.8)$$

Pour un écoulement permanent, et en négligeant les forces de pesanteur (ou en supposant la conduite horizontale), l'équation (8.6) devient

$$\int_{\partial V} -p(M) \mathbf{n} dS = \int_{\partial V} \rho \mathbf{V}(M) (\mathbf{V}(M) \cdot \mathbf{n} dS).$$

soit $\mathbf{F}_p$ la résultante des forces de pressions exercées *par* les parois de la conduite *sur* le fluide contenu entre les sections S_1 et S_2 . Les forces surfaciques sont alors :

$$\begin{aligned} F_S^x &= p_1 S_1 - p_2 S_2 \cos \theta + F_p^x, \\ F_S^y &= -p_2 S_2 \sin \theta + F_p^y, \end{aligned}$$

Nous cherchons la force $\mathbf{R}$ exercée *par* le fluide *sur* la conduite, donc $\mathbf{R} = -\mathbf{F}_p$.

Le flux de quantité de mouvement à travers le volume de contrôle ne comporte pas de contribution des parois du tube, puisque l'écoulement est tangent à la paroi.

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} \rho V_x (\mathbf{V}(M) \cdot \mathbf{n} dS) &= \rho S_2 V_2^2 \cos \theta - \rho S_1 V_1^2, \\ \int_{\partial V} \rho V_y (\mathbf{V}(M) \cdot \mathbf{n} dS) &= \rho S_2 V_2^2 \sin \theta \end{aligned}$$

et l'équation pour la quantité de mouvement (8.6) donne

$$\begin{aligned} R_x &= p_1 S_1 - p_2 S_2 \cos \theta + \rho S_1 V_1^2 \left(1 - \frac{S_1}{S_2} \cos \theta\right), \\ R_y &= -p_2 S_2 \sin \theta - \rho \frac{S_1^2}{S_2} V_1^2 \sin \theta, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la conservation de la masse (8.8).

Notons quand même que nous avons supposé la vitesse uniforme sur la section du tube, ce qui est cohérent avec l'hypothèse de fluide parfait, mais assez loin de la réalité (la viscosité fait que la vitesse est nulle à la paroi).

Force exercée par un jet sur une plaque inclinée

Nous nous plaçons maintenant dans la configuration de la Fig. 8.9. Un jet vient frapper une plaque inclinée d'un angle θ par rapport à la direction incidente du jet. Nous supposons l'écoulement permanent, laminaire, et le fluide sans viscosité.

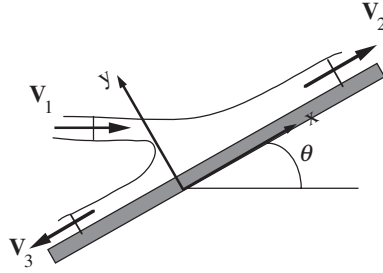


Figure 8.9: Plaque inclinée déviant un jet.

Soient $S_i, i \in \{1, 2, 3\}$ les sections du jet, et définissons un axe Ox parallèle à la plaque, dirigé dans le sens de V_3 , et Oy normal à la plaque dirigé vers le jet. Prenons comme volume de contrôle celui délimité par les trois sections droites du dessin 8.9, par les surfaces libres du jet, et enfin par la plaque.

La conservation de la masse donne

$$S_1 V_1 = S_2 V_2 + S_3 V_3$$

On peut écrire l'équation de Bernoulli en suivant une ligne de champ à la surface libre du jet, joignant les sections 1 et 2, puis une autre joignant les sections 1 et 3. Nous obtenons

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2} V_1^2 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2} V_2^2, \quad \text{et} \quad \frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2} V_1^2 = \frac{p_3}{\rho} + \frac{1}{2} V_3^2,$$

en négligeant la gravité (ou en supposant le plan de la figure horizontal). Dans un jet de liquide la pression à la surface libre du jet est nécessairement égale à la pression atmosphérique, et les deux équations que nous venons d'écrire se réduisent à

$$V_1 = V_2 = V_3 \equiv V.$$

Ecrivons maintenant l'équation de la quantité de mouvement pour le volume de contrôle. L'écoulement se fait tangentiellement à la plaque, et nous négligeons les forces visqueuses. Il n'y a donc aucune force exercée sur le fluide selon la direction Ox . On a donc

$$F_x = 0 = \rho S_2 V_2^2 - \rho S_3 V_3^2 - \rho S_1 V_1^2 \cos \theta \implies S_2 - S_3 = S_1 \cos \theta$$

Utilisant l'équation donnée par la conservation de la masse, nous avons

$$S_2 = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta)S_1, \quad S_3 = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta)S_1.$$

Ces équations donnent les sections du jet, mais ne servent pas à calculer la force R_y appliquée par le jet sur la plaque. Elle est donnée par (8.6),

$$R_y = -F_y \quad \text{où} \quad F_y = \rho S_1 V^2 \sin \theta.$$