



**HAL**  
open science

# Modèle d'Exercices et Parcours d'Apprentissage Prenant en Compte le Raisonnement de l'Élève en Mathématiques au Collège

Elann Lesnes-Cuisiniez, Brigitte Grugeon-Allys

► **To cite this version:**

Elann Lesnes-Cuisiniez, Brigitte Grugeon-Allys. Modèle d'Exercices et Parcours d'Apprentissage Prenant en Compte le Raisonnement de l'Élève en Mathématiques au Collège. Conférence sur les Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain, Jun 2019, Paris, France. hal-02863439

**HAL Id: hal-02863439**

**<https://hal.science/hal-02863439>**

Submitted on 17 Jun 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Modèle d'Exercices et Parcours d'Apprentissage Prenant en Compte le Raisonnement de l'Élève en Mathématiques au Collège

Elann Lesnes-Cuisiniez<sup>1,2</sup> et Brigitte Grugeon-Allys<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire de Didactique André Revuz – Université Paris Diderot, 8<sup>e</sup> étage, 8 place Aurélie Nemours, 75013 Paris, France

<sup>2</sup> [elann.cuisiniez@etu.univ-paris-diderot.fr](mailto:elann.cuisiniez@etu.univ-paris-diderot.fr)

<sup>3</sup> [brigitte.grugeon-allys@u-pec.fr](mailto:brigitte.grugeon-allys@u-pec.fr)

**Résumé** En se plaçant d'un point de vue didactique, l'enjeu de cet article est de proposer, dans le cadre de la conception d'un E.I.A.H., un modèle d'exercices en géométrie à un niveau collège. Ce modèle d'exercices associé au profil de l'élève exprimé en termes de mode de raisonnement permettra, à un niveau local, la génération de feedbacks adaptés aux procédures de résolution des élèves, et à un niveau plus global, la création de parcours d'apprentissage adaptatifs qui prennent en compte leur raisonnement.

**Mots clefs :** didactique, modèle d'exercices, modèle de l'apprenant, parcours d'apprentissage, géométrie.

**Abstract** From a didactic point of view, the goal of this article is to offer, within the framework of the design of an I.T.S, a task model in geometry at a middle school level. This task model, combined with the student's profile expressed in terms of reasoning mode, will allow for, at a local level, the generation of feedbacks adapted to students' resolution procedures and, at a more global level, the creation of adaptive learning paths that take into account their reasoning.

**Keywords :** didactics, task model, learner model, learning paths, geometry.

## 1 Introduction

L'enjeu de cet article est de proposer un modèle d'exercices prenant en compte un modèle de l'apprenant afin d'implémenter un diagnostic et des parcours d'apprentissage adaptés aux modes de raisonnement des élèves en géométrie à la fin du collège.

Des travaux plus anciens affichant cet objectif de modélisation tels que les projets Pépite, Lingot et PepiMeP [6], en algèbre, visaient à développer un diagnostic global et multidimensionnel des connaissances des élèves. Ce diagnostic se fondait sur une étude cognitive, épistémologique et anthropologique de l'algèbre

élémentaire pour définir le rapport à l'algèbre des élèves à un niveau scolaire donné et leur proposer des exercices adaptés dans le cadre d'un parcours d'apprentissage. Depuis 2016, les diagnostics en 4<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> ont été développés sur un serveur WIMS<sup>4</sup> dans le cadre de l'ANR NéoPraéval<sup>5</sup>.

Cet article se situe dans le contexte du projet MindMath qui vise l'élaboration d'une plateforme gamifiée et adaptative pour l'apprentissage de l'algèbre et de la géométrie au collège. Il s'agit donc de poursuivre le travail effectué dans le cadre des projets Pépite et PepiMep en implémentant et automatisant un diagnostic et les parcours d'apprentissage en algèbre élémentaire, mais également d'étendre le projet au domaine de la géométrie.

Nous nous placerons donc d'un point de vue didactique. Nous n'évoquerons ni l'aspect ludique de la plateforme, ni l'algorithme de recommandation d'exercices qui sera utilisé, ni la génération des feedbacks. En revanche, nous proposons un modèle d'exercices prenant en compte un modèle de l'apprenant, de ses réponses aux exercices et des parcours d'apprentissage, fondé sur une approche didactique. À ces modèles, s'adosse l'algorithme de machine learning qui calcule le parcours d'apprentissage le plus adapté en fonction des objectifs visés au niveau scolaire du collège, de l'apprenant, de ses réponses aux exercices et des parcours d'apprentissage des autres élèves.

Nous répondrons donc aux questions suivantes : en quoi l'appui sur les cadres théoriques de la didactique des mathématiques permet-il de fonder les modèles d'exercices et de l'apprenant en géométrie ? Quelles sont les caractéristiques des exercices sur lesquelles nous pouvons nous appuyer pour le diagnostic ? Comment utiliser le modèle de l'apprenant qui existe déjà en algèbre pour modéliser l'apprenant en géométrie et permettre la création de parcours d'apprentissage adaptatifs ?

## 2 Caractérisation des Modèles

### 2.1 Modèle d'Exercices

Une tâche s'exprime par un verbe, par exemple « développer l'expression littérale donnée » [3]. Plusieurs tâches peuvent relever du même type de tâches. Par exemple, les tâches « développer l'expression  $2(x+3)$  » et « développer l'expression  $7(9x+6)$  » relèvent toutes les deux du type de tâches « développer une expression de la forme  $a(bx+c)$  ».

Un exercice mathématique est une tâche qui relève d'un type de tâches [3], nous définissons donc des variables à deux niveaux. Le premier niveau est celui des variables de type de tâches qui spécifient les caractéristiques du type de tâches dont est issu l'exercice et l'apprentissage visé au regard du niveau scolaire en jeu et des programmes institutionnels, en particulier les propriétés mathématiques attendues dans la résolution des tâches d'un type donné. Pour l'exemple « développer une expression de la forme  $a(bx+c)$  », une variable de type de tâches serait la propriété de la distributivité simple. Le deuxième niveau

4. Serveur WIMS : <http://www.pmpm.jussieu.fr/wims/>

5. ANR NéoPraéval : <https://anr.fr/Projet-ANR-13-APPR-0002>

est celui des variables de tâche qui spécifient l'activité mathématique visée et sa complexité au sens de Robert [8]. Par exemple, la valeur du coefficient  $b$ .

**Variables de Type de Tâches.** En ce qui concerne la géométrie, nous nous appuyons notamment sur les travaux mathématiques d'Euclide [4] et les travaux didactiques de Celi [1] pour décomposer l'activité géométrique en cinq genres de tâches : construire, justifier, modéliser, calculer et représenter. Chacun de ces genres de tâches est exprimé sous la forme d'un générateur de types de tâches [2], c'est-à-dire  $GT = [\text{un verbe d'action, un complément fixe; un système de variables}]$ . Les variables attachées à un générateur sont appelées variables de type de tâches, désignées par l'acronyme « Vtt ». Pour un générateur de type de tâches donné, on définit différents types de tâches en attribuant différentes valeurs aux variables de type de tâches.

Par exemple, pour le genre de tâches construire, nous définissons le générateur  $GT = [\text{Construire, une figure de nature donnée, (Vtt1, Vtt2)}]$  avec les variables de type de tâches suivantes :

- Vtt1 : nature de la figure à construire (cercle, triangle (isocèle, équilatéral, rectangle), quadrilatère (carré, rectangle, parallélogramme, trapèze, losange, cerf-volant), point, droite/segment) ;
- Vtt2 : registres de représentation en entrée (registre des figures géométriques, des schémas (à main levée), du langage naturel, des programmes de construction, des expressions algébriques).

**Variables de Tâche** Au delà des variables de type de tâches, nous caractérisons les tâches par des variables de tâche désignées par l'acronyme « Vt ». Ces variables sont liées à la complexité de la tâche, à son milieu (outils, environnement de géométrie dynamique, etc.) et à son énoncé. Ainsi, à partir d'un type de tâches, nous définissons différentes tâches de complexités différentes en attribuant des valeurs différentes aux variables de tâche :

- Vt1 : éléments donnés internes à la figure à construire (éléments géométriques donnés, positions de ces éléments, etc.) ;
- Vt2 : nombre de pas de construction ;
- Vt3 : éléments donnés externes à la figure à construire (position du centre de la transformation, présence d'un quadrilatère ou cercle dans lequel il faut construire la figure, etc.) ;
- Vt4 : forme de la réponse attendue de l'élève (figure robuste<sup>6</sup>, programme de construction, etc.) ;
- Vt5 : outils géométriques du logiciel disponibles (cercle, médiatrice...).

## 2.2 Modèle de l'Apprenant

Les modes de raisonnement ont été développés dans le cadre du projet Pépite (et ses suites) [5]. Ils sont définis *a priori* grâce à une analyse épistémologique

6. figures géométriques robustes : « figures qui conservent la propriété visée au cours de déplacement de chacun de ses points » [9]

et didactique. Ils relèvent de types de tâches et caractérisent une activité mathématique en spécifiant des invariants dans les raisonnements des élèves.

La prise en compte des modes de raisonnement permet d'organiser une analyse non seulement au niveau microscopique (en étudiant les techniques mises en œuvre par les élèves) mais aussi au niveau macroscopique (au niveau des propriétés employées) sur un ensemble de tâches issues de types de tâches du genre de tâches considéré [6]. Les modes de raisonnement sont définis au regard de l'institution. L'appui sur les programmes scolaires permet d'inférer un mode de raisonnement idoine à un niveau scolaire donné.

En nous appuyant sur les paradigmes géométriques développés par Houde-ment et Kuzniak [7], nous définissons les modes de raisonnement en géométrie :

- G0 : associé au paradigme de la géométrie perceptive, usage de propriétés relevant de la perception, travail « au jugé », parfois approximatif ;
- G1 : associé au paradigme de la géométrie instrumentée, usage des instruments pour mesurer, construire, vérifier certaines propriétés, etc. ;
- G2 (attendu à la fin du collège) : associé au paradigme de la géométrie raisonnée, usage des propriétés géométriques (des figures et des outils), des théorèmes, des raisonnements hypothético-déductifs, etc.

Il existe aussi un mode de raisonnement G2-erroné lorsque les propriétés et raisonnements géométriques commencent à être utilisés mais des erreurs subsistent dans leur application (un pas de raisonnement déductif erroné par exemple).

### 3 Un Exemple de Diagnostic en Géométrie

#### 3.1 Méthodologie

À partir de la définition des variables de type de tâches et de tâche, et l'explicitation *a priori* des différentes techniques en fonction du mode de raisonnement, nous repérons des éléments dans les productions de l'élève qui permettent d'inférer des aspects de son mode de raisonnement. Cette analyse menée de façon transversale sur tous les exercices du diagnostic nous permet de décrire le rapport à la géométrie de l'élève.

L'exemple présenté ci-après est celui d'un exercice de diagnostic proposé à dix élèves de troisième en février 2018. Le test a eu lieu dans une salle informatique équipée du logiciel GeoGebra (ce n'est pas le logiciel de géométrie dynamique qui est utilisé dans le projet MindMath). Les écrans ont été filmés et le son enregistré. Les chercheurs qui ont mené l'expérimentation n'ont pas aidé les élèves à l'exception des questions quant à l'utilisation de GeoGebra, les élèves n'étant pas tous familiers avec ce logiciel<sup>7</sup>.

#### 3.2 Analyse *a priori*

L'énoncé demande de « construire le carré ABCD et un demi-cercle de diamètre [AB] » à partir d'un segment [AB] donné. Cette tâche relève du générateur de

7. Même si l'expérimentation ne fait pas réellement partie du projet MindMath puisque la plateforme n'est pas encore développée, elle nous a permis de tester le modèle didactique présenté.

type de tâches  $GT_G = [\text{Construire, une figure de nature donnée, (Vtt1, Vtt2)}]$  avec les variables de type de tâches suivantes :

- Vtt1 : un carré et un demi-cercle ;
- Vtt2 : registre du langage naturel (énoncé qui donne la nature des figures).

Dans une phase de diagnostic, les variables de tâche sont choisies de manière à laisser apparaître les procédures des élèves liées à leur rapport à la géométrie :

- Vt1 : segment tracé dans une position non prototypique, déplaçable ;
- Vt2 : 9 pas de construction ;
- Vt3 : pas d'éléments externes à la figure à construire ;
- Vt4 : figure robuste ;
- Vt5 : tous les outils de GeoGebra sont disponibles sauf « tracer un demi-cercle à partir de deux points ».

Nous définissons *a priori* les techniques attendues pour cette tâche en fonction du mode de raisonnement :

- pour G0 : figure construite incorrecte, points placés au jugé, la figure n'est pas un carré, les instructions ne sont pas forcément respectées.
- pour G1 : figure correcte mais non robuste aux déplacements, utilisation des instruments de mesure pour la construction.
- pour G2 : figure robuste aux déplacements construite à partir des propriétés géométriques du carré et du demi-cercle, raisonnement par analyse-synthèse.

### 3.3 Analyse des Productions

En observant les vidéos des écrans des élèves ainsi qu'en les écoutant, nous analysons des techniques et éléments de discours relevant des trois modes de raisonnement.

L'élève E1 présente des aspects du mode de raisonnement G2. E1 utilise en effet à la fois les propriétés du carré et les propriétés des outils géométriques (cercle, perpendiculaire) pour sa construction qui aboutit à une figure robuste (cf. figure 1). C'est la procédure attendue à la fin du collège.

L'élève E2 présente des aspects du mode de raisonnement G1. En utilisant la souris, E2 déplace les points C et D jusqu'à avoir quatre longueurs égales et un angle droit en C, sa figure n'est pas robuste (cf. figure 1). E2 semble connaître au moins visuellement les propriétés du carré mais ne sait pas comment les mettre en oeuvre pour construire la figure.

E3 présente des aspects du mode de raisonnement G0. E3 fait apparaître, accidentellement, une grille en arrière plan et y déplace le segment [AB] donné (cf. figure 1). Le segment est alors dans une position prototypique pour le carré (à la verticale). E3 compte les carreaux pour placer les points C et D de manière à former visuellement un carré. Lorsqu'il s'agit de tracer le demi-cercle, E3 place un point « à peu près » au milieu du segment [AB] puisqu'il n'est pas possible de se référer à une intersection de la grille. E3 n'utilise ni les propriétés géométriques ni les instruments de mesure pour la construction mais se contente de placer les points au jugé.

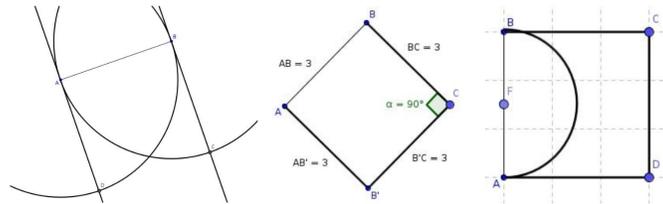


Fig. 1. De gauche à droite : construction de E1, de E2 et de E3.

## 4 Conclusion

Dans cet article, l'appui sur les théories de la didactique des mathématiques et sur une étude épistémologique et didactique du domaine mathématique considéré nous a permis de créer un modèle d'exercices et un modèle de l'apprenant opérationnels. En effet, lors de l'expérimentation, la suite d'exercices créés à partir d'un choix de valeurs de variables de type de tâches et de tâche pertinent nous a permis de décrire des éléments du rapport personnel des élèves à la géométrie.

À partir des variables de tâche, il est maintenant nécessaire de hiérarchiser les exercices en termes de complexité afin que la plateforme puisse calculer automatiquement des parcours d'apprentissage qui amèneront les élèves à utiliser les propriétés et raisonnements géométriques.

## Références

1. Celi, V. : Une comparaison de l'enseignement de la géométrie dans le secondaire en France et en Italie. *Canadian Journal of Math, Science & Technology Education* **5**(3), 377–399 (2005)
2. Chaachoua, H. : T4TEL un cadre de référence didactique pour la conception des EIAH. In : *Séminaire national de didactique des mathématiques* (2018)
3. Chevallard, Y. : Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. *Actes de l'UE de la Rochelle* pp. 91–118 (1998)
4. Euclide, Peyrard, F. : *Les éléments de géométrie d'Euclide*. chez F. Louis (1804)
5. Grugeon-Allys, B. : Modéliser le profil diagnostique des élèves dans un domaine mathématique et l'exploiter pour gérer l'hétérogénéité des apprentissages en classe : une approche didactique multidimensionnelle. *e-JIREF* **2**(2), 63–88 (2016)
6. Grugeon-Allys, B., Pilet, J., Chenevotot-Quentin, F., Delozanne, E. : Diagnostic et parcours différenciés d'enseignement en algèbre élémentaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques (Numéro spécial hors-série, Enseignement de l'algèbre élémentaire : bilan et perspectives)*, 137–162 (2012)
7. Houdement, C., Kuzniak, A. : Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives* **11**, 175–193 (2006)
8. Robert, A. : Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en didactique des mathématiques* **18**(2), 139–190 (1998)
9. Soury-Lavergne, S. : De l'intérêt des constructions molles en géométrie dynamique. *MathémaTICE Les nouvelles technologies pour l'enseignement des mathématiques* (2011)