Mémoire d'Habilitation à Diriger des Recherches : Analyse mathématique et numérique de problèmes d'interaction fluide-structure. Application à la modélisation de l'appareil respiratoire.

Céline Grandmont
Projet REO, INRIA Paris-Rocquencourt

25 février 2009

Table des matières

Introduction **5**
0.1 Liste complète des publications de l'auteur . . . 6
0.1.1 Actes de conférences . . . 7

1 Phénomènes d'interaction fluide-structure **9**
1.1 Présentation du problème . . . 9
1.1.1 Formulation variationnelle et estimations d'énergie . . . 11
1.1.2 Difficultés . . . 13
1.2 Analyse mathématique – *Ref : [2], [4], [7], [9], [11], [13]* . . . 14
1.2.1 Interaction fluide-solide rigide – *Ref : [13]* . . . 15
1.2.2 Interaction fluide-matériau linéaire élastique – *Ref : [2], [7], [11]* . . . 17
1.2.3 Interaction fluide-matériau élastique – *Ref : [9]* . . . 26
1.2.4 Structure en grands déplacements-petites déformations – *Ref : [4]* . . . 29
1.2.5 Conclusions . . . 32
1.3 Analyse numérique – *Ref : [5], [8], [10], [27]* . . . 32
1.3.1 Schémas sur maillages mobiles : the Geometric Conservation Law – *Ref : [8], [10]* 33
1.3.2 Schémas stables : cas de forts effets de masse ajoutée – *Ref : [5], [27]* . . . 35
1.3.3 Conclusion . . . 43

2 Modélisation de l'appareil respiratoire humain **45**
2.1 Écoulement de l'air dans les voies aériennes – *Ref : [20], [28], [29]* . . . 46
2.1.1 Modélisation . . . 47
2.1.2 Existence de solutions . . . 49
2.1.3 Discrétisation du système . . . 52
2.1.4 Simulations . . . 54
2.1.5 Conclusions . . . 57
2.2 Comportement mécanique du tissu pulmonaire – *Ref : [3], [6]* . . . 57
2.2.1 Modélisation unidimensionnelle du tissu pulmonaire – *Ref : [6]* . . . 58
2.2.2 Modèle homogénéisé de mousse – *Ref : [3]* . . . 61
2.2.3 Conclusions . . . 64
2.3 Interaction air-particules – *Ref : [1], [30]* . . . 65
2.3.1 Modélisation . . . 65
2.3.2 Analyse mathématique –*Ref : [1]* . . . 67

2.3.3 Résultats numériques –*Ref : [30]* 68
2.3.4 Conclusions 71

Introduction.

Les travaux présentés dans ce mémoire s'articulent essentiellement autour de deux thèmes : l'étude mathématique et numérique des phénomènes d'interaction fluide-structure et la modélisation de l'appareil respiratoire humain.

C'est au cours de ma thèse que j'ai commencé à travailler sur les phénomènes d'interaction fluide-structure. Ces travaux se sont poursuivis par la suite au CEREMADE (Université Paris Dauphine) puis au sein du projet REO à l'INRIA. J'ai étudié ces problèmes aussi bien d'un point de vue théorique (existence de solutions faibles ou fortes pour des systèmes stationnaires ou instationnaires) que d'un point de vue numérique (étude de la stabilité et de la convergence des schémas, conception d'algorithmes performants). Les applications où de tels phénomènes apparaissent sont nombreuses : tant en aérodynamique qu'en biomécanique. Nous pourrions citer beaucoup d'exemples : écoulement autour d'un bateau, écoulement sanguin dans les artères, pour l'hydrodynamique (fluide en phase liquide), écoulement autour d'ailes d'avion, étude de l'influence des vents sur le tablier d'un pont, pour l'aéroélasticité (fluide en phase gazeuse). En particulier, ils apparaissent dans l'étude des écoulements biologiques : écoulement sanguin dans les artères, écoulement de l'air dans l'appareil respiratoire. Ces dernières années je me suis particulièrement intéressée à ce type d'applications et plus spécifiquement à la modélisation mathématique et numérique de l'appareil respiratoire, tout d'abord dans le cadre d'une ACI nouvelle interface des mathématiques *le poumon vous dis-je*[1,2], puis au sein du projet REO, dont j'ai été collaboratrice extérieure puis membre. Ces applications nécessitent, comme nous le verrons, le développement de modèles mathématiques nouveaux et de méthodes numériques spécifiques et adaptées. Mes recherches actuelles se font dans le cadre d'une ANR jeune chercheur intitulée « Multiscale and multiphysics modelling of the respiratory system » accordée aux candidats en liste complémentaire du premier appel à projets ERC-Starting Grant.

Ce mémoire comporte ainsi deux parties. La première décrit les travaux réalisés sur les phénomènes d'interaction fluide-structure qui peuvent être séparés en deux sections traitant l'une de l'existence de solutions, l'autre de l'approximation numérique de tels phénomènes. La deuxième partie concerne les applications à la santé et la modélisation de l'appareil respiratoire humain (modélisation de l'écoulement de l'air dans les voies aériennes, modélisation du transport et dépôt de particules, modélisation des tissus élastiques constituant le poumon). Seuls les travaux marqués d'un astérisque dans la liste de publications qui suit seront décrits en détail. Parmi eux seul [12] est issu de la thèse.

[1] http://www.insa-rennes.fr/ACINIMpoumon/

[2] http://www.math.u-psud.fr/~maury/LePoumonVousDisJeParis.html

0.1 Liste complète des publications de l'auteur

Articles dans des revues à comité de lecture

[1]* L. Boudin, L. Desvillettes, C. Grandmont et A. Moussa, Global existence of solutions for the coupled Vlasov and Navier-Stokes equations, accepté pour publication dans *Differential and Integral Equations*.

[2]* C. Grandmont, Existence of weak solutions for the unsteady interaction of a viscous fluid with an elastic plate, *SIAM J. Math. Anal.* , 40 (2008), no. 2, 716–737.

[3]* L. Baffico, C. Grandmont, Y. Maday et A. Osses, Homogenization of elastic media with gaseous inclusions, *Multiscale Model. Simul.*, 7 (2008), no. 1, 432–465.

[4]* C. Grandmont, Y. Maday et P. Métier, Modeling and Analysis of an Elastic Problem with Large Displacements and Small Strains, *Journal of Elasticity*, 87, (2007), no 1, 29–72.

[5]* M. Fernandez, J.-F. Gerbeau et C. Grandmont, A projection semi-implicit scheme for the coupling of an elastic structure with an incompressible fluid, *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 69 (2007), no. 4, 794–821.

[6]* C. Grandmont, B. Maury et N. Meunier, One dimensional viscolelastic model of the parenchyma, A viscoelastic model with non-local damping application to the human lungs, *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 40 (2006), no. 1, 201–224.

[7]* A. Chambolle, B. Desjardins, M. Esteban et C. Grandmont, Existence of weak solutions for an unsteady fluid-plate interaction problem, *J. Math. Fluid Mech.*, 7 (2005), 368–404.

[8]* C. Farhat, P. Geuzaine et C. Grandmont, Design and analysis of ALE schemes with provable second-order time-accuracy for inviscid and viscous flow simulations, *J. of Comput. Phys.*, 191, no 1, (2003), 206–227.

[9]* C. Grandmont, Existence for a three-dimensional steady state fluid-structure interaction problem, J. Math. Fluid Mech. 4 (2002), no. 1, 76–94.

[10]* C. Farhat, P. Geuzaine et C. Grandmont, The discrete geometric conservation law and the nonlinear stability of ALE schemes for the solution of flow problems on moving grids, *J. Comput. Phys.*, 174 (2001), no. 2, 669–694.

[11]* B. Desjardins, M. J. Esteban, C. Grandmont et P. Le Tallec, Weak Solutions for a Fluid-Elastic Structure Interaction Model, *Rev. Mat. Complut.*,14 (2001), no. 2, 523–538.

[12] C. Grandmont, V. Guimet et Y. Maday, Numerical analysis of some decoupling techniques for the approximation of the unsteady fluid-structure interaction, *Math. Models Methods Appl. Sci.* 11 (2001), no. 8, 1349–1377.

[13]* C. Grandmont et Y. Maday, Existence for an unsteady fluid-structure interaction problem, *M2AN Math. Model. Numer. Anal.* 34 (2000), no. 3, 609–636.

[14] C. Grandmont et Y. Maday, Fluid-structure interaction : a theoretical point of view, *Rev. Européenne Élém. Finis*, (2000), Vol 9, no.6–7, 633–653.

[15] C. Grandmont, Existence et unicité de solutions d'un problème de couplage fluide-structure bidimensionnel stationnaire. *C. R. A. S. Sér. I Math.* 326 (1998), no. 5, 651–656.

Notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences annonçant un résultat

[16] M. Fernandez, J.-F. Gerbeau, C. Grandmont, A projection algorithm for fluid-structure interaction problems for strong added mas effect,*C.R.A.S. Sér. I Math.*, 42 (2006), no. 4, 279–284.

[17] C. Grandmont, Y. Maday et P. Métier, Existence of a solution for a unsteady elasticity problem in large displacement and small perturbation. *C.R.A.S. Sér. I Math.*, 334 (2002), no. 6, 521–526.
[18] C. Grandmont et Y. Maday, Existence de solutions d'un problème de couplage fluide-structure bidimensionnel instationnaire. *C. R. A. S. Sér. I Math.*, 326 (1998), no. 4, 525–530.

0.1.1 Actes de conférences

[19] C. Grandmont, et A. Soualah, Solutions fortes des équations de Navier-Stokes avec conditions dissipatives naturelles, *ESAIM : Proceedings*, à paraître.
[20]* C. Grandmont, B. Maury et A. Soualah, Multiscale Modelling of the Respiratory Track : A Theoretical Framework, Mathematical and numerical modelling of the human lung, *ESAIM : Proceedings*, 28 (2008), 10–29.
[21] C. Grandmont, Y. Maday et B. Maury, A multiscale/multimodel approach of the respiration tree, *Proceedings of the International Conference, "New Trends in Continuum Mechanics"*, 8-12 September 2003, Constantza, Romania Theta Foundation Publications, Bucharest, 2005.
[22] C. Grandmont et Y. Maday, Some remarks on fluid-structure interaction problems in case of rigid body plus small perturbations,*CFSWA Proceedings* , Springer series « Notes on Numerical Fluid Mechanics", 2003.
[23] C. Farhat, P. Geuzaine et C. Grandmont, The discrete geometric conservation law and its effects on nonlinear stability and accuracy, *15th AIAA CFD conference* (11–14 juin 2001, Anaheim, CA).
[24] C. Grandmont et Y. Maday, Nonconforming grids for the simulation of fluid-structure interaction. Domain decomposition methods, 10 (Boulder, CO, 1997), 262–270, *Contemp. Math.*, 218, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.
[25] C. Grandmont, V. Guimet et Y. Maday, Results about some decoupling techniques for the approximation of the unsteady fluid-structure interaction. ENUMATH 97 (Heidelberg), 319–326,*World Sci. Publishing*, River Edge, NJ, 1998.
[26] C. Grandmont et Y.Maday, Analyse et méthodes numériques pour la simulation de phénomènes d'interaction fluide-structure. Actes du 29ème Congrès d'Analyse Numérique : CANum'97 (Larnas, 1997), 101–117 (electronic), *ESAIM Proc.*, 3, Soc. Math. Appl. Indust., Paris, 1998.

Articles soumis

[27]* M. Astorino, C. Grandmont, Convergence of a projection semi-implicit scheme for fluid-structure interaction problems, soumis.
[28]* L. Baffico, C. Grandmont et B. Maury, Multiscale modelling of the respiratory tract, soumis, en révision.
[29]* A. Devys, C. Grandmont, B. Grec, B. Maury, D. Yakoubi, A numerical method for the simulation of air flow in the respiratory tract, soumis.
[30]* L. Boudin, A. Devys, C. Grandmont, B. Grec, D. Yakoubi, Aerosol retroaction on the air in a 2D branch, soumis.
[31] M. Boulakia, C. Grandmont et A. Osses, Some inverse stability results for the bistable equation using Carleman inequalities, note aux CRAS soumise, en révision.

Articles en préparation

[32] M. Boulakia, C. Grandmont et A. Osses, Some inverse stability results for the bistable equation using Carleman inequalities.

[33] M. Astorino, J.-F. Gerbeau et C. Grandmont, Boundary conditions for fluid-structure interaction problems. Application to biological flows.

Divers

[34] S. Cordier, O. Garet, C. Grandmont, M. Gutnic, V. Hédou-Rouiller, O. Mazet, E. Paturel, A. Prignet, Modélisation et prévision du nombre de postes en sections CNU 25 et 26, *Matapli*, 2001.

[35] Co-rédactrice des Guides d'accueil des nouveaux maîtres de conférences en mathématiques, 2005, 2007. http://postes.smai.emath.fr/accueil/

Classement par thèmes

Mes publications peuvent synthétiquement se classer de la façon suivante :

- **Interaction fluide-structure :**
  - existence de solutions pour des problèmes couplés fluide-structure : [2], [5], [9], [11], [13], [15], [18] ;
  - conception et analyse de schémas adaptés : [5], [8], [10], [12], [14], [16], [23], [24], [25], [27], [33] ;
  - modélisation d'une structure en grands déplacements petites déformations : [4], [17], [22].

    J'ai, d'autre part, coécrit deux articles de type « revue » sur les questions mathématiques liées aux phénomènes d'interaction fluide-structure [14], [26].
- **Modélisation de l'appareil respiratoire** (modèles, analyse, discrétisation, simulations) :
  - écoulement de l'air dans les voies aériennes : [19], [20], [21], [28], [29] ;
  - comportement élastique du parenchyme : [3], [6] ;
  - interaction air-aérosols : [1], [30].

De plus, j'ai commencé récemment à travailler sur **les problèmes inverses** [31], [32].

Chapitre 1

Phénomènes d'interaction fluide-structure

Les phénomènes d'interaction fluide-structure interviennent dans de très nombreuses applications telles l'aéronautique, l'hydrodynamique, l'acoustique ou encore la biomécanique. Ces phénomènes sont dits couplés car le déplacement de la structure dépend des efforts appliqués par le fluide sur la structure et réciproquement. Je me suis essentiellement intéressée au cas des fluides newtoniens, visqueux, incompressibles satisfaisant aux équations de Navier-Stokes. La structure est, quant à elle, mobile : rigide ou déformable. On se place dans le cas où les déplacements de la structure ont une amplitude telle que l'on ne peut pas les supposer infinitésimaux, ce qui va faire apparaître des non linéarités géométriques.

Avant d'énoncer les résultats obtenus pour ces systèmes non linéaires couplés, un problème « modèle », pour lequel des estimations d'énergie formelles sont montrées, est présenté ainsi que les difficultés rencontrées lorsque l'on cherche à montrer l'existence de solutions ou à obtenir des schémas de discrétisation stables, consistants et convergents.

1.1 Présentation du problème

On considère un ouvert $\Omega(t)$, de $\mathbb{R}^d$ ($d = 2$ ou 3). On suppose que $\overline{\Omega(t)} = \overline{\Omega^f(t)} \cup \overline{\Omega^s(t)}$ et $\Omega^f(t) \cap \Omega^s(t) = \emptyset$, où $\Omega^f(t)$ désigne le domaine occupé, au temps t, par un fluide newtonien homogène visqueux incompressible et $\Omega^s(t)$ celui occupé par un solide élastique. L'interface au temps t entre le fluide et la structure est notée $\Sigma(t) = \overline{\Omega^f(t)} \cap \overline{\Omega^s(t)}$ et cette interface bouge à la vitesse de la structure. On supposera par ailleurs, pour simplifier, que les interfaces fluide ou structure autres que l'interface entre le fluide et la structure ne dépendent pas du temps. On pose $\Gamma^f = \partial\Omega^f(t) \setminus \Sigma(t)$ et $\Gamma^s = \partial\Omega^s(t) \setminus \Sigma(t)$. On désigne par $\widehat{\Omega} = \widehat{\Omega}^f \cup \widehat{\Omega}^s$ la configuration de référence du système et par $\widehat{\Sigma}$ l'interface de référence. Le comportement de la structure est décrit par le déplacement au cours du temps de chaque point de la configuration de référence. Ainsi, tout point $\hat{\boldsymbol{x}}$ de la configuration de référence $\widehat{\Omega}^s$ occupe, à l'instant t, la position $\boldsymbol{x}(t) = \hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{d}(\hat{\boldsymbol{x}}, t)$ où $\boldsymbol{d}$ satisfait aux équations constitutives de la structure. Pour ce qui est du fluide, la plupart des représentations sont écrites en formulation eulérienne. Ainsi, les inconnues (vitesse, pression...) sont évaluées à chaque instant et en chaque point du domaine physique. La résolution de la partie fluide consiste donc à : *trouver* $(\boldsymbol{u}, p)$

défini sur $\Omega^f(t)$ *tel que*

$$\begin{aligned} \rho_f \partial_t \boldsymbol{u} + \rho_f (\boldsymbol{u}.\nabla)\boldsymbol{u} - \nu \Delta \boldsymbol{u} + \nabla p &= \rho_f \boldsymbol{f} \quad \text{dans } \Omega^f(t), \qquad (1.1) \\ \text{div } \boldsymbol{u} &= 0 \quad \text{dans } \Omega^f(t), \qquad (1.2) \end{aligned}$$

où $\boldsymbol{u}$ désigne la vitesse du fluide, p sa pression, ν sa viscosité, ρ_f sa densité (supposée constante). De plus $\boldsymbol{f}$ désigne une force extérieure donnée. Ces équations sont complétées par une donnée initiale

$$\boldsymbol{u}(t=0,\cdot) = \boldsymbol{u}_0(\cdot) \quad \text{dans } \Omega^f(0), \qquad (1.3)$$

et des conditions aux limites. Sur l'interface qui n'est pas l'interface fluide-structure, i.e. sur $\Gamma^f = \partial\Omega^f(t) \setminus \Sigma(t)$, on va considérer ici des conditions de Dirichlet homogènes. C'est-à-dire

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \quad \text{sur } \Gamma^f. \qquad (1.4)$$

Remarque 1 *Il est clair que, dans la plupart des applications, ce ne sont pas ce type de conditions aux limites qui sont satisfaites. Par exemple dans le cas des écoulements sanguins, où l'on ne considère qu'une portion d'artère, ou dans le cas de la respiration, où l'on ne considère qu'une partie de l'arbre bronchique,* Γ^f *représente une frontière artificielle du domaine de calcul. Il s'agit alors de trouver des conditions aux limites représentatives de la partie tronquée ou de modéliser celle-ci à l'aide de modèles simplifiés que l'on couplera au modèle précédent. Nous renvoyons à [HRT96] pour une étude des équations de Navier-Stokes avec des conditions aux limites type« flux » ou pression moyenne et à [FGNQ01], [FGNQ02], [QTV00], [VT04], [FMN07] pour le cas des écoulements sanguins. Par ailleurs, au chapitre suivant nous étudierons plus en détails le cas de l'écoulement de l'air dans l'arbre bronchique.*

Pour ce qui est de la structure nous allons considérer ici un matériau élastique tel que $\widehat{\Omega}^s \subset \mathbb{R}^d$. D'autres situations sont envisageables : la structure peut être modélisée par des équations de coques, plaques ou encore être viscoélastique, rigide. Les équations régissant le comportement de la structure sont traditionnellement posées en configuration de référence [Cia88]. On note $\boldsymbol{g}$ la force volumique appliquée à la structure. Les équations s'écrivent alors : pour l'inconnue $\boldsymbol{d}$ définie sur $\widehat{\Omega}^s$

$$\rho_s \frac{\partial^2 \boldsymbol{d}}{\partial t^2} - \text{div}\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{d}) = \rho_s \boldsymbol{g} \quad \text{dans } \widehat{\Omega}^s, \qquad (1.5)$$

où ρ_s désigne la densité de la structure (supposée constante) et où le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\Pi}$ est le premier tenseur de Piola-Kirchhoff du matériau et dépend de la loi de comportement choisie. Dans le cas de l'élasticité linéarisée

$$\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{d}) = \boldsymbol{\sigma}_s(\boldsymbol{d}) = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{d}))\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{d}), \qquad (1.6)$$

où λ et μ sont les constantes de Lamé du matériau et $\boldsymbol{\varepsilon}$ le tenseur linéarisé des déformations :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{b}) = \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{b} + \nabla \boldsymbol{b}^T).$$

Ces équations doivent être complétées par des condition initiales :

$$\boldsymbol{d}(t=0,\cdot) = \boldsymbol{d}_0(\cdot), \quad \partial_t \boldsymbol{d}(t=0,\cdot) = \boldsymbol{d}_1(\cdot), \qquad (1.7)$$

et par des conditions aux limites. Sur l'interface Γ^s qui n'est pas l'interface entre le fluide et la structure nous allons considérer des conditions de Dirichlet homogènes :

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{0} \text{ sur } \Gamma^s. \tag{1.8}$$

Là encore nous considérons ce type de conditions aux limites afin de simplifier l'analyse. Il reste maintenant à regarder les conditions sur l'interface $\Sigma(t)$. Elles sont de deux types, l'une cinématique qui traduit le fait que le fluide, visqueux, colle parfaitement à la paroi solide :

$$\boldsymbol{u}(t, \hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{d}(t, \hat{\boldsymbol{x}})) = \partial_t \boldsymbol{d}(t, \hat{\boldsymbol{x}}), \text{ pour } (t, \hat{\boldsymbol{x}}) \in (0, T) \times \widehat{\Sigma}, \tag{1.9}$$

l'autre traduit le principe de l'action et de la réaction

$$\int_{\Sigma(t)} (\boldsymbol{\sigma}_f(\boldsymbol{u}, p) \cdot \boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{v} = \int_{\widehat{\Sigma}} (\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{d}) \cdot \widehat{\boldsymbol{n}}) \cdot \overline{\boldsymbol{v}}, \quad \forall \boldsymbol{v} \tag{1.10}$$

avec $\overline{\boldsymbol{v}}(t, \hat{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{v}(t, \hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{d}(t, \hat{\boldsymbol{x}}))$ pour $\hat{\boldsymbol{x}} \in \widehat{\Sigma}$ et où $\widehat{\boldsymbol{n}}$ désigne la normale unitaire à l'interface de référence $\widehat{\Sigma}$, $\boldsymbol{n}$ désigne la normale unitaire à l'interface déformée $\Sigma(t)$ et $\boldsymbol{\sigma}_f(\boldsymbol{u}, p) = -p\boldsymbol{I} + 2\nu\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})$ le tenseur des contraintes du fluide. Cette égalité des contraintes (1.10) est exprimée sous forme variationnelle. Pour la réécrire sous forme forte, introduisons $\boldsymbol{\Phi}^f$ une déformation du domaine fluide définie sur $[0, T] \times \widehat{\Omega}^f$ à valeurs dans $\Omega^f(t)$ et telle que $\boldsymbol{\Phi}^f(t, \hat{\boldsymbol{x}}) = \hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{d}(t, \hat{\boldsymbol{x}})$ pour $(t, \hat{\boldsymbol{x}}) \in [0, T] \times \widehat{\Sigma}$. Soient $\boldsymbol{F}^f$ le gradient des déformations $\boldsymbol{\Phi}^f$ et J^f son jacobien. L'égalité (1.10) s'écrit

$$J^f \boldsymbol{\sigma}_f(\boldsymbol{u}, p) \cdot (\boldsymbol{F}^f)^{-T} \cdot \widehat{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{d}) \cdot \widehat{\boldsymbol{n}}. \tag{1.11}$$

Remarque 2 *L'expression précédente ne dépend que de la trace de $\mathcal{I} + \boldsymbol{d}$ sur l'interface et non de l'extension $\boldsymbol{\Phi}^f$ des déformations de la structure choisie.*

Remarque 3 *Dans le cas présenté ici la pression du fluide n'est pas définie à une constante additive près mais déterminée de manière unique. Cette constante correspond au multiplicateur de Lagrange lié à la contrainte de conservation globale du volume du domaine fluide. Cette contrainte supplémentaire, qui va se traduire sur une contrainte sur le déplacement de l'interface $\Sigma(t)$, vient du fait que le fluide est incompressible et que l'on s'est donné des conditions de Dirichlet homogènes sur Γ^f.*

Nous allons maintenant écrire la formulation variationnelle du problème et donner les estimations d'énergie formelles vérifiées par les solutions.

1.1.1 Formulation variationnelle et estimations d'énergie

Tous les calculs qui suivent sont formels : on suppose que la solution $(\boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{d})$ du système est régulière ainsi que les fonctions tests que nous allons choisir. Soient $\boldsymbol{v}$ une fonction test fluide telle que $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ sur Γ^f et $\boldsymbol{b}$ une fonction test structure telle que $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ sur Γ^s. On multiplie l'équation de conservation de la quantité de mouvement fluide (1.1) par $\boldsymbol{v}$ et on intègre sur le domaine fluide $\Omega^f(t)$. De même on multiplie les équations de structure (1.5) par $\boldsymbol{b}$ et on intègre sur $\widehat{\Omega}^s$. Après intégration

par parties et en sommant les contributions fluide et structure on obtient :

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^f(t)} \rho_f \partial_t \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} + \int_{\Omega^f(t)} \rho_f(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} + \nu\int_{\Omega^f(t)} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}):\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) - \int_{\Omega^f(t)} p\ \mathrm{div}\boldsymbol{v}\\ + \int_{\widehat{\Omega}^s} \rho_s \partial_{tt}\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{b} + \int_{\widehat{\Omega}^s} \boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{d}):\nabla\boldsymbol{b} + \int_{\Sigma(t)} \boldsymbol{\sigma}_f(\boldsymbol{u},p)\cdot\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v} + \int_{\widehat{\Sigma}} \boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{d})\cdot\widehat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{b}\\ = \int_{\Omega^f(t)} \rho_f\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v} + \int_{\widehat{\Omega}^s} \rho_s\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{b},\ \forall(\boldsymbol{v},\boldsymbol{b}).\end{aligned}$$

En choisissant les fonctions tests satisfaisant à la condition $\boldsymbol{b}(t,\hat{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{v}(t,\hat{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{d}(t,\hat{\boldsymbol{x}}))$ pour $\hat{\boldsymbol{x}}\in\widehat{\Sigma}$ et en utilisant le principe de l'action et de la réaction (1.10), on obtient la formulation variationnelle suivante du problème

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^f(t)} \rho_f \partial_t \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} + \int_{\Omega^f(t)} \rho_f(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} + \nu\int_{\Omega^f(t)} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}):\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) - \int_{\Omega^f(t)} p\ \mathrm{div}\boldsymbol{v}\\ + \int_{\widehat{\Omega}^s} \rho_s \partial_{tt}\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{b} + \int_{\widehat{\Omega}^s} \boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{d}):\nabla\boldsymbol{b} = \int_{\Omega^f(t)} \rho_f\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v} + \int_{\widehat{\Omega}^s} \rho_s\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{b},\\ \forall(\boldsymbol{v},\boldsymbol{b}) \text{ tel que } \boldsymbol{b}(t,\hat{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{v}(t,\hat{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{d}(t,\hat{\boldsymbol{x}})) \text{ pour } \hat{\boldsymbol{x}}\in\widehat{\Sigma}.\end{aligned} \tag{1.12}$$

On remarque ici que la formulation variationnelle précédente n'est pas classique puisque les fonctions tests dépendent de la solution et donc du temps.

Bilan d'énergie

Dans ce qui suit on va supposer que le matériau est un matériau linéaire élastique et on note $a^s(\boldsymbol{d},\boldsymbol{b}) = \displaystyle\int_{\widehat{\Omega}^s} \boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{d}):\nabla\boldsymbol{b}$ la forme bilinéaire associée. Afin de déterminer le bilan d'énergie du système on choisit la vitesse du fluide et celle de la structure comme fonctions tests dans la formulation précédente. Ce sont des fonctions test admissibles car elles vérifient la condition cinématique (1.9). Grâce à l'incompressibilité du fluide et au fait que la frontière du domaine fluide bouge à la vitesse $\boldsymbol{u}$ du fluide (on rappelle que $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$ sur Γ^f et que l'interface $\Sigma(t)$ a pour vitesse la vitesse de la structure, qui est égale à celle du fluide), on remarque que

$$\int_{\Omega^f(t)} \rho_f \partial_t \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} + \int_{\Omega^f(t)} \rho_f(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} = \frac{d}{dt}\int_{\Omega^f(t)} \frac{\rho_f}{2}|\boldsymbol{u}|^2, \tag{1.13}$$

faisant ainsi apparaître la dérivée en temps de l'énergie cinétique du fluide. Finalement le système,

après intégration en temps, vérifie l'égalité d'énergie suivante

$$\underbrace{\int_{\Omega^f(t)} \frac{\rho_f}{2}|\boldsymbol{u}|^2}_{\text{Énergie cinétique du fluide}} + \underbrace{\nu \int_{\Omega^f(t)} |\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})|^2}_{\text{Dissipation dans le fluide}} +$$

$$\underbrace{\int_{\Omega^s} \frac{\rho_s}{2}|\partial_t \boldsymbol{d}|^2}_{\text{Énergie cinétique de la structure}} + \underbrace{\frac{1}{2}a^s(\boldsymbol{d},\boldsymbol{d})}_{\text{Énergie mécanique de la structure}}$$

$$= \underbrace{\int_{\Omega^f} \frac{\rho_f}{2}|\boldsymbol{u}_0|^2 + \int_{\Omega^s} \frac{\rho_s}{2}|\boldsymbol{d}_1|^2 + a^s(\boldsymbol{d}_0,\boldsymbol{d}_0)}_{\text{Énergie initiale du système}} + \underbrace{\int_{\Omega^f(t)} \rho_f \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u} + \int_{\widehat{\Omega}^s} \rho_s \boldsymbol{g}\cdot\partial_t\boldsymbol{d}}_{\text{Travail des forces extérieures}}. \quad (1.14)$$

Remarque 4 *Dans le cas où l'on considère d'autres types de conditions aux limites sur Γ^f alors l'égalité (1.13) doit être modifiée et apparaissent un terme de flux d'énergie cinétique sur la frontière Γ^f : $\displaystyle\int_{\Gamma_f} \frac{|\boldsymbol{u}|^2}{2}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}$. Ce terme peut ainsi apporter de l'énergie au système (flux entrant) que l'on ne contrôle pas.*

Remarque 5 *Dans le cas d'un matériau hyperélastique ([Cia88]) ou encore une structure modélisée par une plaque ou bien encore un solide rigide en mouvement dans un fluide, la formulation variationnelle du problème et l'égalité d'énergie sont similaires aux précédentes, seule l'énergie mécanique de la structure et l'espace dans lequel on cherche le déplacement de la structure sont modifiés.*

L'égalité d'énergie (1.14) implique, en utilisant le lemme de Gronwall, que pour $t \leq T$

$$\int_{\Omega^f(t)} \frac{\rho_f}{2}|\boldsymbol{u}|^2 + \nu\int_0^t \int_{\Omega^f(s)} |\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})|^2 + \int_{\Omega^s} \frac{\rho_s}{2}|\partial_t\boldsymbol{d}|^2(t) + \frac{1}{2}a^s(\boldsymbol{d}(t),\boldsymbol{d}(t)) \leq$$
$$e^t\left(\int_{\Omega^f(0)} \frac{\rho_f}{2}|\boldsymbol{u}_0|^2 + \int_{\Omega^s} \frac{\rho_s}{2}|\boldsymbol{d}_1|^2(0) + \frac{1}{2}a^s(\boldsymbol{d}_0,\boldsymbol{d}_0) + C\int_0^t e^{t-s}\left(\int_{\Omega^f(s)} |\boldsymbol{f}|^2 + \int_{\widehat{\Omega}^s} |\boldsymbol{g}|^2\right)\right). \quad (1.15)$$

1.1.2 Difficultés

Ces systèmes couplés posent des difficultés tant du point de vue de l'analyse mathématique que de l'implémentation numérique et nous allons en décrire certaines.

Difficultés mathématiques

Voici succinctement les difficultés auxquelles on peut se retrouver confronté si l'on cherche à montrer l'existence de solution :

– Le système est non linéaire. Il existe deux types de non linéarités : les termes convectifs des équations de Navier-Stokes et les non linéarités de type géométriques dues au fait que le domaine

fluide est inconnu et dépend du déplacement de la structure. Un des points clé des démonstrations d'existence est alors de démontrer des résultats de compacité ou d'obtenir des solutions suffisamment régulières.
– Il s'agit, dans le cas instationnaire le plus général, d'un couplage hyperbolique-parabolique, dont les solutions ont un comportement et des propriétés, par exemple en terme de régularité, très différents.

Difficultés numériques

D'un point de vue numérique une des difficultés vient également des non linéarités. En particulier, comment peut-on gérer les non linéarités géométriques : à l'aide de maillages mobiles, mais alors comment adapter les schémas développés pour maillages fixes ? à l'aide de maillage fixes, mais alors comment suit-on l'interface ?

D'autre part, même si l'on se restreint à des cas linéaires en considérant, par exemple, les équations de Stokes couplées à celle de l'élasticité linéarisée, comment discrétiser en temps les conditions de couplage (1.9) et (1.11) ? Les schémas *implicites* (ou *fortement couplés*) sont stables car ils permettent de conserver l'énergie à l'interface mais restent coûteux. Les schémas *explicites* (ou *décalés*) sont peu chers mais ne conservent pas l'énergie à l'interface et peuvent conduire à des instabilités numériques dans le cas de forts effets de masse ajoutée du fluide sur la structure (*i. e.* ρ_f proche de ρ_s).

1.2 Analyse mathématique – *Ref : [2], [4], [7], [9], [11], [13]*

Ces dernières années, les questions d'existence de solutions faibles ou fortes pour des problèmes d'interaction fluide-structure ont fait l'objet de nombreux travaux de recherche. La grande majorité de ces travaux s'intéresse à des solides rigides en mouvement dans un fluide newtonien visqueux incompressible dont le comportement est décrit par les équations de Navier-Stokes ([CSMT00], [DE99], [DE00], [Fei03], [13], [GLS00], [HS99], [SMST02a], [Ser87], [Tak03], [TT04]) ou à un matériau élastique dont le comportement est décrit par un nombre finis de mode propres [11], ou encore une structure à laquelle on a ajouté un terme « visqueux » régularisant ([Bou03], , [dV04]). Dans [7] l'existence de solutions faibles est démontrée pour fluide couplé à une plaque en flexion sans terme de viscosité additionnel. En ce qui concerne des structures tridimensionnelles élastiques, peu de résultats sont disponibles, on peut citer [2] dans le cas stationnaire et les résultats récents de Coutand et Skoller dans le cas instationnaire. Dans [CS05], [CS06], l'existence et l'unicité d'une solution forte en temps petit pour des données régulières (vérifiant des conditions de compatibilité) est démontrée pour les équations de Navier-Stokes couplées à celles de l'élasticité linéarisée ou à un matériau de type Saint–Venant Kirchhoff. Une des innovations de ces articles est qu'ils utilisent un formalisme hyperbolique pour tout le système couplé. La plupart de ces résultats nécessitent de la régularité de la structure à cause des non linéarités du problème.

Nous allons présenter différents résultats d'existence de solutions faibles ou fortes en considérant tout d'abord des solides rigides, puis des solides linéaires élastiques (dont le déplacement est une combinaison linéaire finie de modes propres, ou dont le comportement est décrit par des équations de plaque en flexion) et enfin un matériau de type Saint Venant-Kirchhoff. Finalement un modèle de structure en grands déplacements-petites déformations est décrit et analysé.

1.2.1 Interaction fluide-solide rigide – *Ref : [13]*

Ce travail a été fait en collaboration avec Y. Maday et est une extension à la dimension 3 du chapitre 3 de ma thèse qui ne traitait que le cas bidimensionnel.

On considère ici un solide rigide occupant le domaine $\mathcal{B}(t)$ en mouvement dans un fluide remplissant un domaine borné. On pourrait aussi considérer plusieurs solides rigides, cependant, dans un soucis de clarté on ne présente que le cas d'un seul corps. Dans ce cas le domaine $\Omega(t)$ est indépendant du temps et $\Sigma(t)$ représente la frontière du solide rigide $\partial\mathcal{B}(t)$, que l'on supposera régulier :

Ici comme le solide est rigide, sa déformation se décompose en une translation et une rotation. Donc il existe une fonction $\boldsymbol{\tau}$ du temps à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et une fonction R du temps à valeurs dans l'espace des matrices de rotation de $\mathbb{R}^d$ telles que la position $\boldsymbol{x}(t)$ d'un point $\hat{\boldsymbol{x}}$ au temps t du solide s'écrit :

$$\boldsymbol{x}(t) = \hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{d}(t, \hat{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{\tau}(t) + R(t)(\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}_g), \tag{1.16}$$

où $\boldsymbol{x}_g$ désigne la position du centre de gravité du solide de référence $\widehat{\mathcal{B}}$. Le vecteur $\boldsymbol{\tau}(t)$ représente la position du centre de gravité au temps t. La vitesse du corps est, quant à elle, donnée par :

$$\partial_t \boldsymbol{d}(t, \hat{\boldsymbol{x}}) = \dot{\boldsymbol{\tau}}(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \wedge R(t)(\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}_g). \tag{1.17}$$

Le vecteur $R(t)$ désigne le vecteur instantané de rotation et on a

$$\dot{R}\cdot = R \wedge R \cdot . \tag{1.18}$$

La condition de couplage (1.9) devient donc

$$\boldsymbol{u}\left(t, \boldsymbol{\tau}(t) + R(t)(\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}_g)\right) = \dot{\boldsymbol{\tau}}(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \wedge R(t)(\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}_g), \quad \hat{\boldsymbol{x}} \in \widehat{\mathcal{B}}. \tag{1.19}$$

Ainsi le mouvement de la structure est décrit par un nombre fini de degrés de liberté et les équations qui régissent son comportement au cours du temps sont des équations différentielles ordinaires :

$$m\ddot{\boldsymbol{\tau}} = \int_{\partial\mathcal{B}(t)} \boldsymbol{\sigma}_f(\boldsymbol{u}, p) \cdot \boldsymbol{n}, \tag{1.20}$$

où m désigne la masse du solide. On suppose ici qu'aucune force extérieure n'est exercée sur le solide.

Cette équation régit la dynamique du centre de gravité du solide et dépend de la résultante des efforts appliqués par le fluide sur la structure. D'autre part, la conservation du moment d'inertie se traduit par

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{J}(t)R) = \int_{\partial\mathcal{B}(t)} (\boldsymbol{\sigma}_f(\boldsymbol{u}, p) \cdot \boldsymbol{n}) \wedge (\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{\tau}), \tag{1.21}$$

où $\mathcal{J}(t)$ désigne le moment d'inertie instantané de rotation du solide. Les conditions de couplage (1.11) ne sont donc plus vérifiées, mais l'on voit apparaître, au second membre des équations de la structure, la résultante des efforts et celle des moments des efforts appliqués par le fluide sur la structure. En considérant une structure rigide on s'est affranchi d'une des difficultés mentionnées précédemment. En effet, la structure étant définie grâce à un nombre fini de degrés de liberté, son mouvement va être régulier en espace et il ne s'agit plus d'un couplage parabolique-hyperbolique.

Remarque 6 *Les équations de conservation du moment cinétique et du moment d'inertie peuvent se retrouver en partant de la formulation variationnelle (1.12) du système couplé. En effet, il suffit de choisir les fonctions tests structure* $\boldsymbol{b}$ *sous la forme de vitesses associées à des mouvements rigides :* $\boldsymbol{b} = \overline{\boldsymbol{\tau}} + \overline{\omega} \wedge R(\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}_g)$ *et de remarquer que l'énergie mécanique associée à un mouvement rigide est nulle.*

Remarque 7 *La pression du fluide est, dans ce problème, définie à une constante additive près. En effet, contrairement à la remarque 3, le solide étant rigide, le volume de* $\Omega^f(t)$ *est automatiquement constant au cours du temps.*

Pour chacune de ces équations différentielles, il faut bien sûr se donner des conditions initiales et on pose $\boldsymbol{d}_0 = \boldsymbol{\tau}_0 + R_0(\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}_g)$ et $\boldsymbol{d}_1 = \boldsymbol{\tau}_1 + R_1 \wedge R_0(\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}_g)$.

Sur ce système fluide-structure nous avons montré, en collaboration avec Y. Maday, dans [12], qu'il existait une unique solution régulière en temps petit à condition que la densité de la structure et son moment d'inertie soient suffisamment petits.

La démonstration de ce résultat se fait en plusieurs étapes. On commence d'abord par réécrire les équations du fluide dans un domaine indépendant du temps $\Omega^f(0)$, afin de travailler dans un domaine espace-temps cylindrique. La contrepartie est que l'on obtient un système très non linéaire. Ce changement de variables s'effectue à l'aide du flot χ associé au fluide. Les équations obtenues sont les équations de Navier-Stokes écrites en configuration lagrangienne et ont pour nouvelles inconnues $\boldsymbol{w}(t, \hat{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{u}(t, \chi(t, \hat{\boldsymbol{x}}))$ et $q(t, \hat{\boldsymbol{x}}) = p(t, \chi(t, \hat{\boldsymbol{x}}))$. Nous découplons ensuite le problème et étudions un problème fluide avec une condition de Dirichlet non homogène sur le bord du solide. Pour un tel problème nous montrons qu'il existe une solution régulière grâce à un théorème de point fixe. La démarche est la même que dans les articles [Bea81], [All87], [Sol88a], [Sol88b] dans lesquels les auteurs se sont intéressés à des écoulements fluides instationnaires à frontière libre : les équations sont réécrites en coordonnées lagrangiennes et l'existence d'une solution est démontrée dans des espaces réguliers, soit du type de ceux que l'on considère ici ([All87],[Bea81]) soit du type $W^{1,p}$ avec p strictement supérieur à la dimension ([Sol88b]), ou bien encore dans des espaces de Hölder ([Sol88a]). On en déduit alors les contraintes fluide et donc un déplacement du solide $\widehat{\mathcal{B}}$. Il s'agit ensuite de recoupler les équations, ce qui est fait, ici encore, grâce à un argument de point fixe. Plus précisément, on montre

Théorème 1 *Soit* r *un réel,* $1 < r < 3/2$. *On suppose que* $\boldsymbol{u}_0 \in H^{r+1}(\Omega^f(0))$ *et que* $\boldsymbol{f}$ *est suffisamment régulière. On suppose de plus que les conditions de compatibilité sur les données sont vérifiées*

$$\textit{div}\ \boldsymbol{u}_0 = 0\ \textit{dans}\ \Omega^f(0), \quad \boldsymbol{u}_0 = 0\ \textit{sur}\ \Gamma^f,$$

et

$$\boldsymbol{u}_0(\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{d}_0(\hat{\boldsymbol{x}})) = \boldsymbol{d}_1(\hat{\boldsymbol{x}})\ \textit{sur}\ \partial\widehat{\mathcal{B}}.$$

Alors il existe $T^* > 0$ *dépendant de* $\Omega^f(0)$, $\|\boldsymbol{u}_0\|_{H^{r+1}(\Omega^f(0))}$ *et de* $\boldsymbol{f}$ *tel que le problème couplé fluide-solide rigide admet une solution avec* $\boldsymbol{w} \in H^{1+r/2}(0, T^*; L^2(\Omega^f(0)) \cap L^2(0, T^*; H^{r+2}(\Omega^f(0))$, $\nabla q \in H^{r/2}(0, T^*; L^2(\Omega^f(0)) \cap L^2(0, T^*; H^r(\Omega^f(0))$, $R \in H^{r/2+1}(0, T^*)$ *et* $R \in H^{r/2+2}(0, T^*)$.

Le réel r doit être choisi suffisamment grand de façon à ce l'on puisse définir et majorer les termes non linéaires qui apparaissent dans le problème en coordonnées lagrangiennes et également pour pouvoir transformer cette solution en une solution du problème initial (en coordonnées eulériennes). Par

ailleurs, quand r croît il est nécessaire d'imposer plus de conditions de compatibilités sur les données que celles que nous avons déjà exigées, ceci explique que l'on demande à r d'être inférieur à $3/2$.

Remarque 8 *On voit apparaître les restrictions sur la masse et le moment d'inertie de la structure qui doivent être assez grands à l'étape de point fixe qui permet de recoupler le fluide et la structure. Ces restrictions peuvent être dues à la façon dont on a choisi de montrer l'existence de solutions en découplant le problème fluide du problème structure. Il est à noter que cette restriction peut également apparaître d'un point de vue numérique : un schéma décalé en temps devient instable quand la masse de la structure est trop grande ([CGN05]) ou encore un algorithme de point fixe (non relaxé) à l'étape n ne converge pas ([LTM01]).*

Par la suite, de nombreux travaux ont été consacrés à ce type d'interaction. Dans ([Tak03], [TT04]) l'existence de solutions régulières tant qu'il n'y a pas de collisions solide-solide ou solide-paroi quand le domaine est borné est démontrée et ce sans restriction sur la masse et le moment d'inertie. Le système est ici aussi réécrit dans un domaine indépendant du temps mais le changement de variables n'est pas lié au flot du fluide. Par ailleurs aucun découplage fluide-structure n'est effectué. Dans ([CSMT00], [DE99]), [DE00])), l'existence de solutions faibles est démontrée, nécessitant des résultats de compacité afin de passer à la limite dans les termes non linéaires. Là encore les solutions existent tant qu'il n'y a pas de collisions. Les premiers résultats qui autorisent les collisions traitent du cas bidimensionnel ([HS99], [SMST02b]). Le problème de savoir si des collisions ont vraiment lieu dans un fluide visqueux régi par les équations de Navier-Stokes est abordé dans [Sta04]. Dans [Hil07] et [HT] la non collision d'un disque ou d'une sphère rigide sur respectivement une droite ou un plan est prouvée. Il est démontré dans ([GVHar]) l'existence de solutions fortes dans le cas où la frontière du solide est peu régulière ($C^{1,\alpha}, 0 < \alpha \leq 1$) et la possibilité de collisions d'un solide tombant sur une surface plane si $\alpha < 1/2$.

1.2.2 Interaction fluide-matériau linéaire élastique – *Ref : [2], [7], [11]*

Nous allons maintenant considérer le cas de matériaux élastiques et nous intéresser à l'existence de solutions faibles. Dans un premier temps nous considérons un solide plongé dans un fluide dont le déplacement s'écrit comme une combinaison linéaire finie de modes propres [11]. Ainsi, comme à la section précédente, le mouvement du matériau élastique est décrit par un nombre fini de degrés de liberté. Dans un deuxième temps nous considérons qu'une partie de la frontière du domaine fluide est constituée par une plaque élastique en flexion. Dans [7], nous avons étudié le cas où un terme visqueux régularisant est ajouté à l'équation de plaque. Dans [2], nous montrons que l'on peut passer à la limite quand cette viscosité additionnelle tend vers zéro.

Nombre fini de modes propres – *Ref : [11]*

Ce travail a été effectué en collaboration avec B. Desjardins, M. Esteban et P. Le Tallec.

On considère que le déplacement $\boldsymbol{d}$ d'une structure immergée dans une cavité $\Omega(t) = \Omega$ remplie de fluide se décompose sur un nombre fini de N modes propres :

$$\boldsymbol{d}(t, \hat{\boldsymbol{x}}) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(t) \boldsymbol{\phi}_i(\hat{\boldsymbol{x}}),$$

avec $\boldsymbol{\phi}_i$ solution de

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_s(\boldsymbol{\phi}_i) &= \lambda_i \boldsymbol{\phi}_i, \quad \text{dans } \widehat{\Omega}^s, \\ \boldsymbol{\sigma}_s(\boldsymbol{\phi}_i)\cdot \widehat{\boldsymbol{n}} &= \mathbf{0}, \qquad \text{sur } \widehat{\Sigma} = \partial\widehat{\Omega}^s, \end{aligned}$$

où $\boldsymbol{\sigma}_s$ est définie par (1.6) et $(\lambda_i)_{i>1}$ désigne la suite croissante de valeurs propres strictement positives associées aux vecteurs propres $\boldsymbol{\phi}_i$. On suppose que la frontière du domaine de référence de la structure est régulière ($\mathcal{C}^{2,1}$) ce qui entraîne que les $\boldsymbol{\phi}_i$ sont réguliers ($\mathcal{C}^1(\widehat{\Omega}^s)$). On supposera de plus que la configuration initiale $\Omega^s(0)$ du solide élastique correspond à sa configuration de référence $\widehat{\Omega}^s$. Ainsi $\boldsymbol{d}(0,\cdot) = \mathbf{0}$. On remarque que $\lambda_i = 0$ est une valeur propre du système de l'élasticité linéarisée avec conditions de Neumann au bord. Cette valeur propre est associée aux mouvements rigides infinitésimaux, i.e. $\boldsymbol{\phi}_i = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{x}$ avec $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^d$. La formulation variationnelle du problème est alors (1.12) mais avec comme contrainte supplémentaire sur les fonctions tests $\boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{N} \beta_i \boldsymbol{\phi}_i$. On s'est donc ramené, comme à la section précédente, à une structure dont le comportement est décrit par un nombre fini de degrés de liberté et donc aux couplage des équations de Navier-Stokes et d'une EDO. Ainsi les difficultés liées à la régularité en espace du déplacement ne se posent pas ici (on rappelle que les modes propres sont réguliers car le domaine structure l'est). En revanche contrairement au cas du solide rigide nous avons à imposer une contrainte de préservation du volume global de la structure :

$$\int_{\widehat{\Omega}^s} \det \nabla \boldsymbol{\Phi}^s = \left|\widehat{\Omega}^s\right|, \tag{1.22}$$

où $\boldsymbol{\Phi}^s = \mathcal{I} + \boldsymbol{d}$ désigne les déformations du matériau. Cette condition est équivalente à

$$\int_{\Sigma(t)} \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} = 0,$$

ou encore à

$$\int_{\hat{\Sigma}} \partial_t \boldsymbol{d} \cdot \operatorname{cof}(\nabla \boldsymbol{\Phi}^s)\cdot \widehat{\boldsymbol{n}} = 0,$$

où $\operatorname{cof}(A)$ désigne la matrice des cofacteurs de la matrice A. Cette contrainte supplémentaire (1.22) est une contrainte non linéaire sur les α_i. Cependant l'on peut remarquer que si N est assez grand alors il existe i_0 tel que $\displaystyle\int_{\widehat{\Sigma}} \boldsymbol{\phi}_{i_0}\cdot\boldsymbol{n} \neq 0$ et donc si on se donne $(\alpha_i)_{1\le i\le N, i\neq i_0}$ dans un voisinage de 0, on peut toujours trouver, grâce au théorème des fonctions implicites, α_{i_0} tel que cette contrainte est vérifiée. Dans [11] nous avons montré l'existence de solutions faibles (i.e. dans les espaces d'énergie) pour un tel système couplé tant que les déformations $\boldsymbol{\Phi}^s(t,\cdot)$ de la structure au temps t définissent un C^1-difféomorphisme de $\widehat{\Omega}^s$ dans $\Omega^s(t)$ et que le solide ne touche pas le bord de la cavité. Pour cela on introduit

$$\gamma(t) = \inf_{\hat{\boldsymbol{x}}\in\overline{\widehat{\Omega}^s}} \left|\det \nabla \boldsymbol{\Phi}^s\right|,$$

$$\delta(t) = d(\Omega^s(t), \partial\Omega),$$

et

$$\kappa(t) = \min_{1\le i\le N} \int_{\widehat{\Sigma}} \boldsymbol{\phi}_i \cdot (\ \operatorname{cof}\ \nabla \boldsymbol{\Phi}^s \cdot \widehat{\boldsymbol{n}}).$$

Cette dernière quantité est associée à la contrainte de conservation du volume global de la structure. Tant qu'elle est strictement positive l'espace contraint des déplacements structure

$$V_s = \left\{ \beta \in (W^{1,\infty}(0,T))^N,\ \int_{\widehat{\Omega}^s} \det \nabla \boldsymbol{\Phi}_\beta = |\widehat{\Omega}^s|,\ \text{ avec } \boldsymbol{\Phi}_\beta(t,\hat{\boldsymbol{x}}) = \hat{\boldsymbol{x}} + \sum_{i=1}^{N} \beta_i(t)\boldsymbol{\phi}_i(\hat{\boldsymbol{x}}) \right\}$$

est non vide. Avant d'énoncer le résultat d'existence nous allons réécrire la formulation variationnelle en introduisant un unique espace de fonctions tests

$$\mathcal{V} = \left\{ \boldsymbol{\phi} \in H^1((0,T)\times\Omega), \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega,\ \text{div } \boldsymbol{\phi} = 0 \text{ dans } \Omega^f(t), \boldsymbol{\phi}(t, \boldsymbol{\Phi}^s(t,\hat{\boldsymbol{x}})) = \sum_{i=1}^{N} \beta_i(t)\boldsymbol{\phi}_i(\hat{\boldsymbol{x}}) \right\}.$$

Cet espace dépend bien sûr de la solution et ses éléments vérifient la contrainte

$$\int_{\widehat{\Sigma}} (\sum_{i=1}^{N} \beta_i \boldsymbol{\phi}_i) \cdot (\ \mathrm{cof}\nabla \boldsymbol{\Phi}^s \cdot \widehat{\boldsymbol{n}}) = 0.$$

On introduit, de plus, une unique vitesse eulérienne associée au problème :

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \text{ dans } \Omega^f(t), \quad \boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{N} \dot{\alpha}_i \boldsymbol{\phi}_i((\boldsymbol{\Phi}^s)^{-1}) \text{ dans } \Omega^s(t).$$

Nous définissons maintenant la notion de solutions faibles du système couplé. La différence avec la formulation précédente (1.12) est que l'on a intégré par parties en temps. On dira que $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{d} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \boldsymbol{\phi}_i)$ est une solution faible du système si

- $\boldsymbol{v} \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, $\text{div } \boldsymbol{v} = 0$ dans $\Omega^f(t)$,
- $\alpha_i \in W^{1,\infty}(0,T)$,
- $\forall \boldsymbol{\phi} \in \mathcal{V}$ et en posant $\boldsymbol{b}(t,\hat{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{\phi}(t, \boldsymbol{\Phi}^s(t,\hat{\boldsymbol{x}})) = \sum_{i=1}^{N} \beta_i(t)\boldsymbol{\phi}_i(\hat{\boldsymbol{x}})$

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega^f(t)} \boldsymbol{u}(t)\cdot\boldsymbol{\phi}(t) + \int_0^t \int_{\Omega^f(s)} \boldsymbol{u}\cdot\partial_t\boldsymbol{\phi} + 2\nu \int_0^t \int_{\Omega^f(s)} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\phi}) + \int_0^t \int_{\Omega^f(s)} \boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\phi}) \\ - \int_{\widehat{\Omega}^s} \partial_t \boldsymbol{d}(t)\cdot\boldsymbol{\phi}(t) + \int_0^t \int_{\widehat{\Omega}^s} \partial_t\boldsymbol{d}\cdot\partial_t\boldsymbol{\phi} + \int_0^t \int_{\widehat{\Omega}^s} \boldsymbol{\sigma}_s(\boldsymbol{d}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{b}) = \\ \int_0^t \int_{\Omega^f(s)} \rho_f \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{\phi} + \int_0^t \int_{\widehat{\Omega}^s} \rho_s \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{b} + \int_{\Omega^f(0)} \boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{\phi}(0) + \int_{\widehat{\Omega}^s} \boldsymbol{d}_1\cdot\boldsymbol{b}(0), \quad (1.23) \end{aligned}$$

avec $\boldsymbol{d}_1 = \sum_{i=1}^{N} \dot{\alpha}_i^0 \boldsymbol{\phi}_i$.

Il est clair que les termes de structure peuvent être réécrits sous forme matricielle en faisant intervenir la matrice de masse et la matrice de rigidité associées aux modes propres élastiques. Nous pouvons maintenant énoncer le résultat d'existence

Théorème 2 *On suppose que les vitesses initiales* $(\boldsymbol{u}_0, \dot{\alpha}_i^0)$ *vérifient*

$$\boldsymbol{u}_0 \in L^2(\Omega^f(0)),\ \ div\ \boldsymbol{u}_0 = 0\ dans\ \Omega^f(0),\ \ \boldsymbol{u}_0 \cdot \boldsymbol{n} = 0\ sur\ \partial\Omega,$$

et

$$\boldsymbol{u}_0 \cdot \widehat{\boldsymbol{n}} = \sum_{i=1}^{N} \dot{\alpha}_i^0 \boldsymbol{\phi}_i \cdot \widehat{\boldsymbol{n}},\ \ sur\ \widehat{\Sigma}.$$

On suppose que les forces appartiennent à L^2*, alors tant que* $\gamma(t)\delta(t)\kappa(t) > 0$ *et que* $\boldsymbol{\Phi}^s(t,\cdot)$ *est injective de* $\widehat{\Omega}^s$ *sur* $\Omega^s(t)$ *le système couplé admet au moins une solution faible au sens défini précédemment. Cette solution vérifie de plus l'estimation d'énergie (1.15).*

La démonstration de ce résultat utilise les mêmes étapes que [DE00]. On démontre dans un premier temps l'existence d'une solution approchée par une procédure de point fixe puis on passe à la limite, grâce à un résultat de compacité des vitesses dans L^2.

Pour construire la solution approchée on régularise le mouvement de l'interface fluide-structure et la vitesse de convection fluide. Les équations fluide sont donc posées dans un domaine régulier qui n'est plus exactement décrit par le déplacement de la structure. Une des difficultés est de construire des solutions approchées vérifiant les mêmes estimations d'énergie que le problème de départ. Pour cela nous avons choisi de construire des régularisations qui satisfont à une égalité à l'interface : la vitesse régularisée de l'interface est égale à la vitesse de convection régularisée. Cette construction repose sur un lemme de représentation des vitesses eulériennes à l'aide de vitesses définies dans les domaines initiaux. Il y a une correspondance bijective entre $(\boldsymbol{u}, \dot{\alpha}_i)$ et $(\boldsymbol{w}, \dot{\alpha}_i)$ où $\boldsymbol{w}$ est définie par

$$\boldsymbol{w}(t,\hat{\boldsymbol{x}}) = (\text{cof}\ \nabla\boldsymbol{\Phi}^f)(t,\hat{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{\Phi}^f(t,\hat{\boldsymbol{x}})) - \boldsymbol{u}_\alpha(t,\boldsymbol{\Phi}^f(t,\hat{\boldsymbol{x}})),$$

où $\boldsymbol{\Phi}^f$ est le flot associé à la vitesse $\boldsymbol{u}_\alpha$, vitesse définie dans $\Omega^f(t)$ comme un relèvement à divergence nulle de la vitesse de l'interface. Avec cette construction $\boldsymbol{w} \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega^f(0))$ et est à divergence nulle. Lors du processus de régularisation il faut faire attention au fait que les α_i vérifient la condition non linéaire (1.22) qu'il est nécessaire de préserver.

L'existence de solutions approchées repose ensuite sur une procédure de point fixe. On régularise $(\boldsymbol{w}, (\alpha_i)_{i\neq i_0})$ et on construit, grâce au théorème des fonctions implicites, un α_{i_0} associé tel que les α_i régularisés vérifient la contrainte (1.22). Grâce au lemme de représentation des vitesses on associe alors une vitesse de convection et une vitesse de l'interface. On résout ensuite le système approché linéarisé et on obtient l'existence d'une vitesse fluide et d'un déplacement de la structure auxquels on associe un nouveau couple $(\overline{\boldsymbol{w}}, (\overline{\alpha}_i)_{i\neq i_0})$. Cette application admet un point fixe et la compacité nécessaire pour le montrer vient de résultats de régularité parabolique des solutions du système. Il s'agit alors de passer à la limite lorsque le paramètre de régularisation tend vers zéro. Là encore à cause des non linéarités les estimations d'énergie vérifiées par la suite de solutions approchées sont insuffisantes et des estimations supplémentaires qui permettent d'obtenir de la compacité sur les vitesses fluide et structure sont nécessaires. L'idée est ici de montrer qu'une quantité du type $\|\boldsymbol{v}(t+h) - \boldsymbol{v}(t)\|_{L^2_{xt}}$ tend vers zéro uniformément par rapport au paramètre de régularisation. Les bornes de la vitesse dans $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ et l'estimation supplémentaire entraîne, grâce à un lemme de compacité sur les espaces $L^p(0,T;X)$ où X est un espace de Banach [Sim87], la compacité de la vitesse dans $L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Ce type d'estimation s'obtient, schématiquement, en prenant $\boldsymbol{v}(t+h) - \boldsymbol{v}(t)$ comme fonction test dans

la formulation faible (1.23). Cependant, comme le problème est couplé et posé, en ce qui concerne les équations fluide, dans ouvert non cylindrique il est nécessaire de modifier cette fonction test de façon à ce qu'elle soit admissible.

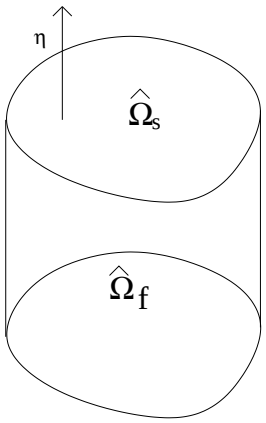
Le même type de résultat, reposant sur le même schéma de démonstration est obtenu dans [Bou03]. Dans cet article, l'existence d'une solution faible pour un fluide visqueux incompressible couplé à un matériau en grands déplacements et petites déformations décrit par le modèle étudié dans [4] est démontrée. Il est à noter qu'un terme visqueux est ajouté aux équations de la structure. Ce terme a pour effet de régulariser la vitesse de la structure et permet ainsi d'avoir un comportement « parabolique » du solide élastique. Nous obtenons la même chose en tronquant les hautes fréquences élastiques dans le résultat décrit précédemment.

Plaque en flexion : cas visqueux – *Ref : [7]*

Ce travail est le fruit d'une collaboration avec A. Chambolle, B. Desjardins et M. Esteban.

Nous nous sommes intéressés au cas d'une plaque en flexion à laquelle nous avons ajouté un terme visqueux. Ce terme a un effet régularisant sur la vitesse de la structure et donc la vitesse de l'interface. Il permet de contrôler les hautes fréquences en espace de la vitesse de la structure.

On suppose que le fluide remplit une cavité $\Omega(t) = \Omega^f(t)$ dont une partie de la frontière est constituée d'un matériau élastique dont le comportement est décrit par une plaque en flexion :



Le domaine $\widehat{\Omega}^s$ est un domaine de $\mathbb{R}^2$ et est donc maintenant confondu avec l'interface $\widehat{\Sigma}$. On note η son déplacement transverse ($\boldsymbol{d} = \eta \boldsymbol{e}_z$, où $\boldsymbol{e}_z$ désigne un vecteur unitaire vertical). Plus précisément on définit le domaine fluide par

$$\Omega^f(t) = \{(x, y, z)\mathbb{R}^3, (x, y) \in \widehat{\Omega}^s), 0 < z < 1 + \eta(t, x, y)\}.$$

Le déplacement η vérifie une équation de plaque à laquelle on a ajouté un terme visqueux régularisant : $\varepsilon\Delta^2\partial_t\eta$. L'estimation d'énergie du même type que (1.15) associée au système couplé montre que l'on peut chercher η dans $W^{1,\infty}(0, T; L^2(\widehat{\Omega}^s)) \cap H^1(0, T; H_0^2(\widehat{\Omega}^s))$. Néanmoins cette régularité implique que l'interface du domaine fluide est continue pour tout temps sans être lipschitzienne. Une des questions est donc comment définir correctement les espaces fonctionnels dans lesquels vit la vitesse du fluide ? Comment donner un sens rigoureux à la trace du fluide sur l'interface ? Ces questions ne se posaient pas précédemment car, compte tenu des régularités du déplacement de la structure, l'interface était au

moins lipschitzienne et la déformation $\mathbf{\Phi}^f$ était à chaque instant un C^1-difféomorphisme de $\widehat{\Omega}^f$ dans $\Omega^f(t)$.

En ce qui concerne les espaces fonctionnels il suffit d'introduire l'ouvert $\Omega_T^f = \cup_{t\in(0,T)}\Omega^f(t)\times\{t\}$. On définit ensuite

$$L^2(0,T;H^1(\Omega^f(t))) = \left\{ v \in L^2(\Omega_T^f),\, \nabla v \in L^2(\Omega_T^f) \right\},$$

$$L^2(0,T;H_0^1(\Omega^f(t))) = \overline{\mathcal{D}(\Omega_T^f)}^{L^2(0,T;H^1(\Omega^f(t)))},$$

$$\mathcal{V}_\delta = \left\{ \boldsymbol{v} \in C^1\left(\overline{\Omega_T^f}\right),\, \mathrm{d}iv\boldsymbol{v} = 0,\, \boldsymbol{v} = \mathbf{0} \text{ on } (0,T)\times\Gamma^f \right\},$$

et

$$V_\delta = \overline{\mathcal{V}_\delta}^{L^2(0,T;H^1(\Omega^f(t)))},$$

En ce qui concerne la deuxième question on peut facilement donner un sens dans L^2 à la quantité $\boldsymbol{u}(t,x,y,1+\eta(t,x,y))$ pour (x,y) sur $\widehat{\Omega}^s$. En effet le déplacement de la structure étant transverse et la vitesse du fluide étant H^1 en espace il suffit de remarquer que

$$\boldsymbol{u}(t,x,y,1+\eta(t,x,y)) = \int_0^{1+\eta(t,x,y)} \partial_z \boldsymbol{u}(t,x,y,s)ds.$$

Cette spécificité du problème est fortement exploitée dans [7]. En particulier elle nous permet de construire facilement des relèvements, à divergence nulle, de fonctions tests structure en remarquant que tout vecteur $(0,0,b(x,y))^T$ avec $b \in H^1(\widehat{\Omega}^s)$ est dans $H^1(\Omega^f(t))$ et est à divergence nulle. De plus, ne considérer que des déplacements transverses implique que l'ouvert $\Omega^f(t)$ est un sous graphe. Il en découle des propriétés de densité, la possibilité de « contracter » le domaine dans la direction z, la validité de l'inégalité de Korn...

Les solutions faibles que l'on considère dans [7] sont définies par (en choisissant toutes les constantes, exceptée les viscosités, égales à 1)

- $\boldsymbol{u} \in V_f \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega^f(t))$,
- $\eta \in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\widehat{\Omega}^s)) \cap H^1(0,T;H_0^2(\widehat{\Omega}^s))$,
- $\boldsymbol{u}(t,x,y,1+\eta(t,x,y)) = (0,0,\partial_t\eta(t,x,y))^T$, p.p. t, sur $\widehat{\Omega}^s$
- Pour tout $(\boldsymbol{\phi},b) \in \mathcal{V}_f \times C^1([0,T];H_0^2(\widehat{\Omega}^s))$ tel que $\boldsymbol{\phi}(t,x,y,1+\eta(t,x,y)) = (0,0,b(t,x,y))^T$,

$(t,x,y) \in [0,T] \times \widehat{\Omega}^s$, nous avons p.p. en t

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^f(t)} \boldsymbol{u}(t)\cdot\boldsymbol{\phi}(t) - \int_0^t \int_{\Omega^f(s)} \boldsymbol{u}\cdot\partial_t\boldsymbol{\phi} + 2\nu\int_0^t\int_{\Omega^f(s)} \nabla\boldsymbol{u} : \nabla\boldsymbol{\phi} \\ + \int_0^t\int_{\Omega^f(s)} (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\phi} - \int_0^t\int_{\widehat{\Omega}^s} (\partial_t\eta)^2 b + \int_{\widehat{\Omega}^s} \partial_t\eta(t)\, b(t) \\ - \int_0^t\int_{\widehat{\Omega}^s} \partial_t\eta\,\partial_t b + \varepsilon\int_0^t\int_{\widehat{\Omega}^s} \Delta\partial_t\eta\,\Delta b + \int_0^t\int_{\widehat{\Omega}^s} \Delta\eta\,\Delta b \\ = \int_0^t\int_{\Omega^f(s)} \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{\phi} + \int_0^t\int_{\widehat{\Omega}^s} g\; b + \int_{\Omega^f(0)} \boldsymbol{u}_0\boldsymbol{\phi}(0) + \int_{\widehat{\Omega}^s} \eta_1 b(0). \quad (1.24)\end{aligned}$$

Ici nous avons choisi d'écrire les termes de convection sous une forme un peu différente que dans (1.23) en faisant apparaître la vitesse de l'interface au bord. Nous allons par la suite exploiter cette écriture. Par ailleurs l'énergie de dissipation du fluide fait uniquement intervenir le gradient de $\boldsymbol{u}$ et non plus son gradient symétrisé. Cette simplification vient là encore de l'hypothèse de déplacement transverse. En effet en utilisant l'égalité des vitesses à l'interface et l'incompressibilité du fluide on a

$$(2\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{n})_3 = (\nabla\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})_3, \quad \text{sur } \partial\Omega^f(t)\setminus\Gamma^f,$$

ce qui permet de simplifier la formulation variationnelle.

Pour ce problème couplé le volume de la cavité doit être conservé au cours des déformations. Contrairement au cas précédent où cela imposait au déplacement de la structure de vérifier une condition non linéaire cela implique ici que η doit vérifier $\int_{\widehat{\Omega}^s}\partial_t\eta = 0$. Cette simplification vient encore de l'hypothèse de déplacement transverse. Les hypothèses que l'on impose aux données sont

$$\begin{cases} \min\limits_{\overline{\omega}}(1+\eta_0) > 0, \\ \text{div } \boldsymbol{u}_0 = 0 \text{ dans } \Omega^f(0), \\ \boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{n} = 0 \text{ sur } \Gamma^f, \\ \boldsymbol{u}_0(t,x,y,1+\eta_0(x,y))\cdot\widehat{\boldsymbol{n}} = (0,0,\eta_1)^T\cdot\widehat{\boldsymbol{n}} \text{ sur } \widehat{\Omega}^s, \\ \displaystyle\int_{\widehat{\Omega}^s}\eta_1 = 0. \end{cases} \quad (1.25)$$

Le résultat d'existence de solution faible peut alors s'énoncer de la façon suivante

Théorème 3 *En supposant que les données vérifient*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}\in L^2((0,T)\times\mathbb{R}^3),\ g\in L^2((0,T)\times\widehat{\Omega}^s), \\ \boldsymbol{u}_0\in L^2(\Omega^f(0)),\ \eta_1\in L^2(\widehat{\Omega}^s),\ \eta_0\in H_0^2(\widehat{\Omega}^s), \end{aligned} \quad (1.26)$$

et satisfont aux hypothèses de compatibilités (1.25), il existe au moins une solution faible $(\boldsymbol{u},\eta)$ au problème couplé et ce tant que la plaque ne touche pas le fond de la cavité. De plus cette solution vérifie une estimation d'énergie.

La démonstration de ce résultat suit le même schéma que celle du théorème 2 :

– construction de solutions approchées ;
– obtention de résultats de compacité afin de passer à la limite dans l'équation.

Les solutions approchées sont construites suivant le même principe : on ne va pas découpler le problème fluide et le problème structure mais, pour s'affranchir des difficultés liées au domaine inconnu peu régulier et aux non linéarités, nous allons régulariser le mouvement du domaine et la vitesse de convection. Contrairement au résultat précédent on ne va pas demander à ce que les vitesses régularisées du domaine et de convection coïncident. Il est alors nécessaire de modifier la formulation variationnelle de manière à conserver les estimations d'énergie, en remarquant que

$$\int_{\Omega^f(t)}(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u})\boldsymbol{\phi}=\frac{1}{2}\int_{\Omega^f(t)}(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u})\boldsymbol{\phi}-\frac{1}{2}\int_{\Omega^f(t)}(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{\phi})\boldsymbol{u}-\frac{1}{2}\int_{\widehat{\Omega}^s}(\partial_t\eta)^2 b,$$

avec $\boldsymbol{\phi}(x,y,1+\eta(x,y))=(0,0,b(x,y))^T$ sur $\widehat{\Omega}^s$. Ce terme est alors transformé en

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega^f_*(t)}(\boldsymbol{u}_*\cdot\nabla\boldsymbol{u})\boldsymbol{\phi}-\frac{1}{2}\int_{\Omega^f_*(t)}(\boldsymbol{u}_*\cdot\nabla\boldsymbol{\phi})\boldsymbol{u}-\frac{1}{2}\int_{\widehat{\Omega}^s}\partial_t\eta_*\partial_t\eta b,$$

où l'astérisque désigne des quantités régularisées.

L'existence de solution approchées est démontrée grâce à une procédure de point fixe de Schauder : on se donne un déplacement de maillage et une vitesse de convection, on résout le problème approché linéarisé par une méthode de Galerkin, et on obtient un nouveau déplacement de la structure et une nouvelle vitesse. La compacité nécessaire pour montrer l'existence d'un point fixe à cette application vient de la régularité de type elliptique vérifiée par la solution du système approché linéarisé. Ces résultats ne sont bien sûr pas valables uniformément par rapport au paramètre de régularisation. Ainsi pour passer à la limite quand ce paramètre tend vers zéro les estimations d'énergie vérifiées par la suite de solutions approchées ne sont pas suffisantes. Ces estimations permettent d'affirmer que la suite de solutions approchées est bornée uniformément dans $V_f\cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega^f(t))$ pour la vitesse de fluide et dans $W^{1,\infty}(0,T;L^2(\widehat{\Omega}^s))\cap H^1(0,T;H^2_0(\widehat{\Omega}^s))$ pour le déplacement de la structure. Il manque en particulier de la « compacité en temps » afin d'obtenir la compacité des vitesses fluide et structure dans L^2_{tx}. La compacité des vitesses fluide et structure vient alors de l'étude de quantités du type $\|\boldsymbol{u}(t+h)-\boldsymbol{u}(t)\|_{L^2_{tx}}$ et $\|\partial_t\eta(t+h)-\partial_t\eta(t)\|_{L^2_{tx}}$. La première quantité n'est pas aussi simple car les vitesses au temps t et au temps $t+h$ ne sont pas définies sur le même domaine il est donc nécessaire de les prolonger. Pour obtenir la convergence uniforme de ces termes vers zéro quand h tend vers zéro on choisit comme fonctions tests dans la formulation variationnelle des fonctions du type $\displaystyle\int_t^{t+h}\boldsymbol{u}$ et $\displaystyle\int_t^{t+h}\partial_t\eta$. Il est là encore nécessaire de les modifier de façon à ce qu'elles vérifient l'égalité des vitesses à l'interface en prenant garde de conserver des fonctions à divergence nulle dans le domaine fluide.

Remarque 9 *Au cours de la démonstration nous avons utilisé à plusieurs étapes (en particulier pour obtenir la compacité dans L^2 des vitesses) que, grâce au terme de régularisation visqueuse ajouté à l'équation de la plaque, la vitesse de la structure $\partial_t\eta$ était dans $L^2(0,T;H^1(\widehat{\Omega}^s))$. D'autres termes de régularisation permettent d'obtenir le même type de résultats en particulier si on ajoute seulement un terme du type $-\Delta\partial_t\eta$ ou si on ne néglige pas l'inertie de rotation $\Delta\partial_t t\eta$. La question suivante est de savoir si on peut s'affranchir de ces régularisations.*

Plaque en flexion – *Ref : [2]*

Nous expliquons pourquoi l'on peut passer à la limite dans le système couplé quand la viscosité ε de la plaque tend vers zéro. Pour cela, l'argument principal est que la dissipation venant du fluide permet de contrôler les hautes fréquences en espace de la vitesse de la structure.

A priori le déplacement de la structure pour $\varepsilon = 0$ possède seulement une régularité de type hyperbolique et appartient à $L^\infty(0,T;H_0^2(\widehat{\Omega}^s))\cap W^{1,\infty}(0,T;L^2(\widehat{\Omega}^s))$. On vérifie alors que ces régularités et l'hypothèse de déplacement transverse suffisent à définir les espaces fonctionnels définis à la section précédente, la trace $\boldsymbol{u}(t,x,y,1+\eta(t,x,y))$ sur $\widehat{\Omega}^s$. Cependant elles ne permettent pas d'obtenir de la compacité dans $L^2((0,T;L^2(\widehat{\Omega}^s))$ de la vitesse de la structure. Cette compacité reposait dans [7] sur le fait que $\partial_t\eta \in L^2(0,T;H^1(\widehat{\Omega}^s))$, grâce au terme de régularisation parabolique ajouté à l'équation de la plaque. Pour avoir un résultat analogue il suffit d'avoir un peu de régularité en espace de $\partial_t\eta$. L'idée ici est d'exploiter la condition cinématique $(0,0,\partial_t\eta(t,x,y))^T = \boldsymbol{u}(t,x,y,1+\eta(t,x,y))$ sur $\widehat{\Omega}^s$. En effet comme $\boldsymbol{u} \in L^2(0,T;H^1(\Omega^f(t))$, si η était lipschitzien en espace on obtiendrait facilement que $\partial_t\eta \in L^2(0,T;H^{1/2}(\widehat{\Omega}^s))$. On contrôlerait ainsi les hautes fréquences en espace de la vitesse de la structure. Toutefois ces régularités ne sont pas satisfaites. Cependant grâce aux injections de Sobolev, $\eta \in C^0([0,T],C^0(\overline{\widehat{\Omega}^s})) \cap L^\infty(0,T;H_0^2(\widehat{\Omega}^s))$ et cette régularité de la frontière permet de montrer que $\partial_t\eta \in L^2(0,T;H^s(\widehat{\Omega}^s))$ pour $s < 1/2$. On obtient donc de la « compacité en espace » pour la vitesse de la structure. Cependant là encore les estimations d'énergie vérifiées par $(\boldsymbol{u}_\varepsilon,\eta_\varepsilon)$, où $\boldsymbol{u}_\varepsilon,\eta_\varepsilon$ désigne la solution, construite dans [7], à $\varepsilon > 0$ fixé, ne sont pas suffisantes pour montrer la compacité des vitesses dans L^2_{tx} et passer à la limite quand ε tend vers zéro. Ces estimations permettent d'affirmer que la suite de solutions approchées est bornée uniformément dans $V_f \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega^f(t))$ pour la vitesse de fluide et dans $W^{1,\infty}(0,T;L^2(\widehat{\Omega}^s))\cap L^\infty(0,T;H_0^2(\widehat{\Omega}^s))\cap H^1(0,T;H^s(\widehat{\Omega}^s))$ pour le déplacement de la structure. En particulier la suite de déplacements structure converge uniformément dans $C^0([0,T];C^0(\overline{\widehat{\Omega}^s}))$. Cette propriété est très utile pour passer à la limite sur le domaine fluide. Il manque néanmoins de la « compacité en temps » afin d'obtenir la compacité des vitesses fluide et structure dans L^2_{tx}. Le principe est le même que dans [7] ou [11] où on étudie $\|\boldsymbol{u}(t)-\boldsymbol{u}(t+h)\|_{L^2_{tx}}$ et $\|\partial_t\eta(t)-\partial_t\eta(t+h)\|_{L^2_{tx}}$. Il est nécessaire de séparer ici l'étude des hautes et des basses fréquences en espace de la structure. Si on considère les modes propres $\boldsymbol{\xi}_i$ associés à l'opérateur bilaplacien avec des conditions de Dirichlet homogènes au bord et vérifiant la contrainte $\displaystyle\int_{\widehat{\Omega}^s} \boldsymbol{\xi}_i = 0$, qui constituent une base de $H_0^2(\widehat{\Omega}^s)\cap L_0^2(\widehat{\Omega}^s)$, alors la projection L^2, notée η^{N_0}, de η sur l'espace vectoriel engendré par les N_0 premiers vecteurs propres vérifie

$$\|\partial_t\eta - \partial_t\eta^{N_0}\|_{L^2(\widehat{\Omega}^s)} \leq C\lambda_{N_0}^{-s/2}\|\partial_t\eta\|_{H^s(\widehat{\Omega}^s)},$$

où λ_{N_0} est la valeur propre associée à $\boldsymbol{\xi}_{N_0}$. Par conséquent, on va pouvoir contrôler la partie hautes fréquences de $(\partial_t\eta_\varepsilon)$ et on a

$$\int_0^T \int_{\widehat{\Omega}^s} (\partial_t\eta_\varepsilon^{hf,N_0} - (\partial_t\eta_\varepsilon^{hf,N_0})(t-h))^2 \leq C\lambda_{N_0}^{-\frac{s}{2}},$$

avec $\eta^{hf,N_0} = \eta - \eta^{N_0}$.

Pour la partie basses fréquences $\partial_t\eta^{N_0}$ on utilise la formulation variationnelle pour obtenir une convergence uniforme par rapport à ε quand h tend vers zéro de $\|\boldsymbol{u}_\varepsilon(t+h)-\boldsymbol{u}_\varepsilon(t)\|_{L^2_{tx}}$ et de $\|\partial_t\eta_\varepsilon^{N_0}(t+$

$h) - \partial_t \eta_\varepsilon^{N_0}(t)\|_{L^2_{tx}}$ vers zéro. La fonction test structure est $b = \displaystyle\int_{t-h}^{t} \partial_t \eta_\varepsilon^{N_0}$. Les fonctions tests fluide sont en revanche à choisir et construire avec beaucoup d'attention. On montre ainsi que pour tout $\beta > 0$

$$\int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon^f(t)} |\boldsymbol{u}_\varepsilon(t) - \overline{\boldsymbol{u}}_\varepsilon(t-h)|^2 + \int_0^T \int_{\widehat{\Omega}^s} (\partial_t \eta_\varepsilon^{N_0}(t) - \partial_t \eta_\varepsilon^{N_0}(t-h))^2 \leq C_{N_0} h^{\frac{1}{3}} + C\lambda_{N_0}^{-\frac{s}{2}} + C\beta, \ \forall \varepsilon < \varepsilon_0,$$

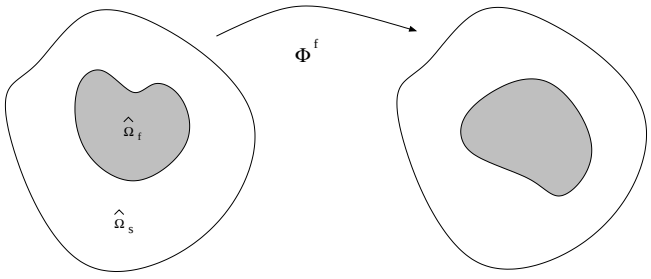
avec $s < \frac{1}{2}$ et où $\overline{\boldsymbol{u}}_\varepsilon$ désigne un prolongement de $\boldsymbol{u}_\varepsilon$ à un domaine qui contient tous les $\Omega_\varepsilon^f(s)$, $s \in [t-h, t]$. On aboutit donc finalement à

$$\int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon^f(t)} |\boldsymbol{u}_\varepsilon(t) - \overline{\boldsymbol{u}}_\varepsilon(t-h)|^2 + \int_0^T \int_{\widehat{\Omega}^s} (\partial_t \eta_\varepsilon(t) - \partial_t \eta_\varepsilon(t-h))^2 \leq C_{N_0} h^{\frac{1}{3}} + C\lambda_{N_0}^{-\frac{s}{2}} + C\beta, \ \forall \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Ce résultat et les estimations d'énergie vérifiées par la suite de solutions permettent alors d'obtenir la compacité des vitesses dans L^2_{tx} grâce à un lemme de compacité sur les espaces $L^p(0,T;E)$ [Sim87] et de passer à la limite dans la formulation variationnelle. On obtient ainsi l'existence d'une solution faible pour le système couplé Navier-Stokes-plaque tant que la plaque ne touche pas le fond de la cavité et ce sans terme additionnel de viscosité. Il est à noter que, même si ce résultat est à notre connaissance le premier résultat d'existence de solution faible dans ce cadre, il paraît difficile de l'étendre au cas où l'on ne néglige pas le déplacement longitudinal ou au cas de structure élastique tridimensionnelle. Dans ce dernier cas les résultats disponibles [CS05], [CS06] sont des résultat d'existence de solutions régulières demandant des hypothèses de compatibilité sur les données plus fortes que celles utilisées ici.

1.2.3 Interaction fluide-matériau élastique – *Ref : [9]*

Nous allons maintenant considérer le cas d'un matériau de Saint Venant-Kirchhoff et nous restreindre au cas stationnaire. La difficulté liée au couplage hyperbolique-parabolique n'existe donc plus. En revanche la structure vérifie une loi de comportement non linéaire. Nous nous plaçons en dimension 3 d'espace. Le fluide se trouve dans une cavité constituée d'un matériau élastique que l'on suppose encastrée sur sa frontière extérieure (celle qui n'est pas en contact avec le fluide).



En utilisant les mêmes notations que précédemment et en rappelant que $\boldsymbol{\Phi}^f$ est un relèvement dans le domaine de référence $\widehat{\Omega}^f$ des déformations de l'interface Σ données par $\mathcal{I} + \boldsymbol{d}$ les équations

fluide s'écrivent

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\nu\Delta\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}+\nabla p &=& \boldsymbol{f} & \text{dans } \boldsymbol{\Phi}^f(\widehat{\Omega}^f)\\ \text{div } \boldsymbol{u} &=& 0 & \text{dans } \boldsymbol{\Phi}^f(\widehat{\Omega}^f)\\ \boldsymbol{u} &=& 0 & \text{sur } \partial\boldsymbol{\Phi}^f(\widehat{\Omega}^f). \end{array}\right. \tag{1.27}$$

Comme le problème est stationnaire la vitesse du fluide est nulle sur l'interface et la vitesse du fluide dépend de la structure car le domaine dans lequel sont posées les équations est inconnu et est fonction des déformations élastiques. Ici la pression n'est *a priori* définie qu'à une constante additive près. Les équations de structure s'écrivent

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\text{div}\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{d}) &=& \boldsymbol{g} & \text{dans } \widehat{\Omega}^s\\ \boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{d}).\widehat{\boldsymbol{n}} &=& J^f\boldsymbol{\sigma}_f(\boldsymbol{u},p+c)\cdot(\boldsymbol{F}^f)^{-T}\cdot\widehat{\boldsymbol{n}} & \text{sur } \widehat{\Sigma}\\ \boldsymbol{u} &=& 0 & \text{sur } \Gamma^s, \end{array}\right. \tag{1.28}$$

où c est une constante qui fixe le niveau de pression et est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte de préservation de volume (1.22). Le déplacement de la structure dépend des efforts appliqués par le fluide sur l'interface, réécrits en configuration de référence. Le tenseur $\boldsymbol{\Pi}$ désigne le premier tenseur de Piola-Kirchhoff et, si on appelle λ et μ les constantes de Lamé du matériau, il est donné par

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{d}) &=& (\boldsymbol{I}+\nabla\boldsymbol{d})\bar{\boldsymbol{\Pi}}(\boldsymbol{d}),\\ \bar{\boldsymbol{\Pi}}(\boldsymbol{d}) &=& \lambda\text{tr }(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{d}))\boldsymbol{I}+2\mu\boldsymbol{E}(\boldsymbol{d}),\\ \boldsymbol{E}(\boldsymbol{d}) &=& \dfrac{1}{2}(\nabla\boldsymbol{d}+\nabla\boldsymbol{d}^t+\nabla\boldsymbol{d}^t\nabla\boldsymbol{d}). \end{array} \tag{1.29}$$

Pour démontrer qu'il existe une solution à ce système d'équations, on se ramène tout d'abord à la configuration de référence pour les équations fluide, en supposant que le déplacement de la structure élastique est assez petit et régulier pour pouvoir effectuer le changement de variables. Les équations fluide peuvent alors s'écrire

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\nu\text{div }((\boldsymbol{F}(\boldsymbol{d})\nabla)\boldsymbol{w}(\boldsymbol{d}))+(\boldsymbol{G}(\boldsymbol{d})\nabla)q(\boldsymbol{d})+(\boldsymbol{w}\cdot(\boldsymbol{G}(\boldsymbol{d})\nabla))\boldsymbol{w} &=& (\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{\Phi}^f)\ H(\boldsymbol{d}) & \text{dans } \widehat{\Omega}^f\\ \text{div }(\mathbf{G}(\boldsymbol{d})^T\ \boldsymbol{w}(\boldsymbol{d})) &=& 0 & \text{dans } \widehat{\Omega}^f\\ \boldsymbol{w}(\boldsymbol{d}) &=& 0 & \text{sur } \partial\widehat{\Omega}^f, \end{array}\right. \tag{1.30}$$

avec $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{d})=\boldsymbol{u}\circ\boldsymbol{\Phi}^f$ et $q(\boldsymbol{d})=p\circ\boldsymbol{\Phi}^f$. Les matrices $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{d})$ et $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{d})$ sont quant à elles définies par

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{F}^f)^{-1}(\boldsymbol{F}^f)^{-T}J^f,$$

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{d})=\ \text{cof }\nabla\boldsymbol{\Phi}^f,$$

et $H(\boldsymbol{d})$ désigne le jacobien de la transformation.

C'est ce système non linéaire couplé que nous allons étudier. Afin de pouvoir définir correctement tous les termes nous allons travailler dans des algèbres et plus précisément dans $W^{1,p}(\Omega)$ avec $p>3$. D'autre part le problème n'a de sens que si le déplacement est suffisamment petit et régulier de manière à ce que la déformation $\boldsymbol{\Phi}^f$ soit un C^1-difféomorphisme. Cette condition de petit déplacement va impliquer que les forces appliquées au système sont elles aussi suffisamment petites. Plus précisément, le théorème d'existence peut s'énoncer de la façon suivante :

Théorème 4 *Soient $\boldsymbol{f}$ donnée dans $L^p(\mathbb{R}^3)$ et $\boldsymbol{g}$ donnée dans $L^p(\widehat{\Omega}^s)$, avec $3 < p < \infty$. On suppose que $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{g}$ sont suffisamment petites, c'est-à-dire qu'il existe une constante $\mathcal{M} > 0$ telle que*

$$\mathcal{P}_1(\|\boldsymbol{g}\|_{L^p(\widehat{\Omega}^s)}) + \mathcal{P}_2(\|\boldsymbol{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}) \leq \mathcal{M},$$

où $\mathcal{P}_i$, $i = 1, 2$ sont des fonctions polynomiales à coefficients positifs telles que $\mathcal{P}_i(0) = 0$. On suppose de plus que $\|\boldsymbol{f}\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^3)} \leq C\nu^2$. Alors il existe $(\boldsymbol{w}, q, \boldsymbol{d}, c)$ solution unique de (1.28), (1.22), (1.29), (1.30), avec $\boldsymbol{w} \in W^{2,p}(\widehat{\Omega}^f) \cap W_0^{1,p}(\widehat{\Omega}^f)$, $q \in W^{1,p}(\widehat{\Omega}^f)$ and $\boldsymbol{d} \in W^{2,p}(\widehat{\Omega}^s) \cap W^{1,p}_{0,\Gamma^s}(\widehat{\Omega}^s)$.

La démonstration de ce théorème comporte plusieurs étapes. Tout d'abord nous étudions le problème fluide pour une déformation de la frontière du domaine donnée dans $W^{2-1/p,p}(\widehat{\Sigma})$. Cet espace est l'espace des traces sur l'interface de l'espace dans lequel on cherche les déplacements de la structure. Il s'agit alors de montrer que la solution du problème de Navier-Stokes dans un tel domaine appartient à $\left(W^{2,p}(\widehat{\Omega}^f) \cap W_0^{1,p}(\widehat{\Omega}^f)\right) \times \left(W^{1,p}(\widehat{\Omega}^f)\right)$. On étudie dans un premier temps le problème de Stokes seul pour lequel on montre que si la déformation de l'interface est proche de l'identité dans $W^{2-1/p,p}(\widehat{\Sigma})$ alors les régularités standards $W^{2,p}(\widehat{\Omega}^f) \times W^{1,p}(\widehat{\Omega}^f)$ (voir [GR86], [Tem77]) des solutions sont encore valables. Cette hypothèse de petites variations par rapport à une géométrie pour laquelle on connaît la régularité des solutions du problème de Stokes avec conditions de Dirichlet homogènes au bord va imposer une contrainte sur les forces appliquées au système fluide-structure qui ne doivent être trop grandes.

Remarque 10 *Si on avait une régularité $W^{2,\infty}$ de la frontière alors [Bel96] fournit le résultat de régularité souhaité. Il est néanmoins probable que ce résultat reste vrai dans notre cas sans demander à ce que les déformations restent proches d'une déformation régulière dans $W^{2-1/p,p}(\widehat{\Sigma})$.*

Ensuite la régularité de la solution pour le problème de Navier-Stokes est démontrée grâce à un argument de bootstrap.

La deuxième étape est l'étude des équations de l'élasticité avec conditions mixtes Dirichlet-Neumann et une condition de préservation globale de volume. La condition de Neumann sur l'interface fluide-structure sera fournie par les contraintes appliquées par le fluide sur la structure. Ainsi on cherche en même temps le déplacement $\boldsymbol{d}$ et la constante de pression c. Cette étude est basée sur l'application du théorème des fonctions implicites et reprend les mêmes lignes (mais avec une contrainte supplémentaire) que le cas classique (voir [Cia88]). On étudie le problème linéarisé autour de zéro (existence, régularité) qui est solution du problème non linéaire pour des forces extérieures nulles. Puis on montre que l'on peut appliquer le théorème des fonctions implicites au voisinage de cette solution. Cette étape va également imposer une contrainte de petitesse sur les forces appliquées.

La dernière étape est de recoupler les problèmes fluide et structure grâce à un argument de point fixe de Schauder-Tychonov (voir [Edw95], p : 161–163). On introduit l'application qui à un déplacement de l'interface associe une vitesse et une pression fluide, ce qui fournit des efforts et donc une nouvelle déformation du domaine structure. On montre que cette application admet au moins un point fixe. Pour cela, on munit $W^{2,p}(\widehat{\Omega}^s)$ de sa topologie faible, ainsi toute boule fermée de cet espace est faiblement compacte. De plus, l'injection compacte de $W^{2,p}(\widehat{\Omega}^s)$ dans $C^1(\overline{\widehat{\Omega}^s})$ suffit à montrer la continuité de l'application.

C'est également sur ce procédé de démonstration que sont basés les résultats [Sur07] (étude de l'interaction stationnaire fluide-coque), [GK] (étude de l'interaction stationnaire en domaine non borné

fluide-solide élastique) et pour le cas instationnaire les résultats novateurs et récents [CS06] où l'interaction fluide solide élastique est étudiée. Par ailleurs, en collaboration avec C. Madaré et B. Mauroy, nous sommes en train d'étudier un modèle stationnaire décrivant l'équilibre d'un globule rouge dans une conduite. Les équations de structure écrites dans un référentiel en mouvement de translation uniforme seraient basées sur le modèle décrit à la section suivante.

1.2.4 Structure en grands déplacements-petites déformations – *Ref : [4]*

Dans cette sous-section je vais présenter un résultat obtenu en collaboration avec P. Métier et Y. Maday. La version bidimensionnelle du modèle constituait un chapitre de la thèse de P. Métier, nous l'avons par la suite étendue au cas tridimensionnel. L'idée est de décomposer les déplacements de la structure en une translation, une rotation et des déplacements élastiques infinitésimaux. Ainsi même si on choisit la loi de Hooke comme loi de comportement pour le matériau les rotations sont bien représentées. On obtient alors un modèle appelé *géométriquement non linéaire*. Ce modèle avait été introduit par le mécanicien De Veubeuke dans [FDV76]. Il est maintenant utilisé dans le contexte de discrétisation éléments finis en particulier dans le cas de grands déplacements comme pour le mouvement d'avions [FPL00], [SWW08]. Le but du travail est de donner un cadre mathématique rigoureux à la décomposition et de montrer que le système d'équations non linéaires obtenu possède une unique solution.

Décompositions des déformations

L'idée est de décomposer la déformation $\mathbf{\Phi}^s$ du solide élastique en

1. une translation : $\hat{\boldsymbol{x}} \longmapsto \hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{\tau}$, avec $\boldsymbol{\tau}$ le vecteur associé, $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^d$.
2. une rotation : $\hat{\boldsymbol{x}} \longmapsto R(\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{g})$, où $\boldsymbol{g}$ désigne le centre de gravité du solide $\widehat{\Omega}^s$ et R est une matrice de rotation.
3. une déformation élastique $\begin{array}{rl} \overline{\widehat{\Omega}^s} & \longrightarrow \mathbb{R}^d \\ \hat{\boldsymbol{x}} & \longmapsto \hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{d}(\hat{\boldsymbol{x}}). \end{array}$

La déformation peut donc être écrite

$$\forall \hat{\boldsymbol{x}} \in \overline{\widehat{\Omega}^s}, \qquad \boldsymbol{\phi}(\hat{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{\tau} + R((\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{g}) + \boldsymbol{d}(\hat{\boldsymbol{x}})). \tag{1.31}$$

Une question naturelle est alors :

sous quelles conditions peut-on associer à $\boldsymbol{\phi}$ un unique triplet $(\boldsymbol{\tau}, R, \boldsymbol{d})$?

Pour répondre à cette question on peut penser à trouver, pour $\boldsymbol{\phi}$ fixé, la translation et la rotation telles que le déplacement associé $\boldsymbol{d} = R^T(\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\tau} - (\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{g})$ est minimal en norme $L^2(\widehat{\Omega}^s)$. Ce problème de minimisation admet une solution qui sera unique pour des déformations particulières. En écrivant les conditions nécessaires d'optimalité (équations d'Euler) on obtient une correspondance bijective et continue entre les déformations $\boldsymbol{\phi}$ de $L^2(\widehat{\Omega}^s)$ vérifiant de plus que la plus petite valeur propre de la matrice $\mathcal{A}(\boldsymbol{\phi})$ définie par

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\phi}) := \begin{pmatrix} M & \mathbf{m} \\ \mathbf{m}^T & 0 \end{pmatrix}$$

avec $M = 2\int_{\widehat{\Omega}^s}\big(\boldsymbol{\phi}\cdot(\hat{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{g})\big)\mathrm{I}_3 - \int_{\widehat{\Omega}^s}\Big(\boldsymbol{\phi}\otimes(\hat{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{g}) + (\hat{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{g})\otimes\boldsymbol{\phi}\Big)$ et $\mathbf{m} = \int_{\widehat{\Omega}^s}\boldsymbol{\phi}\wedge(\hat{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{g})$, est simple et le triplet $(\boldsymbol{\tau}, R, \boldsymbol{d})$ avec $\boldsymbol{d}\in L^2(\widehat{\Omega}^s)$ et vérifiant $\displaystyle\int_{\widehat{\Omega}^s}\boldsymbol{d} = \mathbf{0}$, $\displaystyle\int_{\widehat{\Omega}^s}\boldsymbol{d}\wedge(\hat{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{g}) = \mathbf{0}$ et $\mathcal{M}(\boldsymbol{d})$ définie positive :

$$\mathcal{M}(\mathbf{d}) = 2\Big(\int_{\widehat{\Omega}^s}((\hat{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{g})+\mathbf{d})\cdot(\hat{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{g})\Big)\mathrm{I}_3 - \Big(\int_{\widehat{\Omega}^s}((\hat{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{g})+\mathbf{d})\otimes(\hat{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{g}) + (\hat{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{g})\otimes((\hat{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{g})+\mathbf{d})\Big).$$

Les deux premières conditions imposent que $\boldsymbol{d}$ soit orthogonal aux mouvements rigides infinitésimaux. La troisième condition interdit au solide de se déformer en se concentrant sur un plan. Elle est de plus vérifiée si la matrice des moments d'inertie du solide reste définie positive au cours des déformations. On remarque de plus que si $\boldsymbol{\phi}$ appartient à $H^s(\widehat{\Omega}^s)$ alors le déplacement $\boldsymbol{d}$ également.

Remarque 11 *Il est facile de voir que la translation est donnée par* $\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{|\widehat{\Omega}^s|}\displaystyle\int_{\widehat{\Omega}^s}\boldsymbol{\phi}$*. Pour la rotation il n'y a pas d'expression simple en dimension 3, par contre la rotation en dimension 2 étant caractérisée par un seul angle il suffit alors de résoudre un système linéaire* 2×2 *pour déterminer son cosinus et son sinus, ce système possédant une unique solution dans le cas où* $\boldsymbol{\phi}$ *vérifie la contrainte supplémentaire.*

On peut de plus montrer que l'application précédente est un C^1-difféomorphisme et que la décomposition de l'espace $L^2(\widehat{\Omega}^s)$ est valable :

$$L^2(\widehat{\Omega}^s) = \mathrm{vect}(\overline{\boldsymbol{\tau}}, \overline{\boldsymbol{\tau}}\in\mathbb{R}^3)\ \oplus \mathrm{vect}(\overline{\boldsymbol{\Theta}}\wedge R((\hat{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{g})+\mathbf{d}), \overline{\boldsymbol{\Theta}}\in\mathbb{R}^3)\oplus \mathrm{vect}(R\overline{\mathbf{d}}, \overline{\boldsymbol{d}}\in\mathcal{E}_0),$$

avec

$$\mathcal{E}_0 = \{\boldsymbol{b}\in L^2(\widehat{\Omega}^s), \int_{\widehat{\Omega}^s}\boldsymbol{b} = \mathbf{0}, \int_{\widehat{\Omega}^s}\boldsymbol{b}\wedge(\hat{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{g}) = \mathbf{0}\}.$$

Pour tout $\boldsymbol{v}$ in $L^2(\widehat{\Omega}^s)$, la décomposition

$$\boldsymbol{v} = \overline{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{v}) + \overline{\boldsymbol{\Theta}}(\boldsymbol{v})\wedge R((\hat{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{g})+\boldsymbol{d}) + R\overline{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{v}) \tag{1.32}$$

est obtenue en choisissant

$$\begin{cases} \overline{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{v}) = \dfrac{1}{|\widehat{\Omega}^s|}\displaystyle\int_{\widehat{\Omega}^s}\mathbf{v} \\ \overline{\boldsymbol{\Theta}}(\boldsymbol{v}) = B^{-1}\Big(\displaystyle\int_{\widehat{\Omega}^s}\boldsymbol{v}\wedge R(\hat{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{g})\Big) \\ \overline{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{v}) = R^T\Big(\boldsymbol{v} - \overline{\boldsymbol{\tau}} - \overline{\boldsymbol{\Theta}}\wedge R((\hat{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{g})+\boldsymbol{d})\Big), \end{cases}$$

où B est définie par

$$B = \Big(\int_{\widehat{\Omega}^s}((\hat{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{g})+\boldsymbol{d})\cdot(\hat{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{g})\Big)\mathrm{I}_3 - \int_{\widehat{\Omega}^s}R((\hat{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{g})+\mathbf{d})\otimes R(\hat{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{g}).$$

Cette décomposition de $L^2(\widehat{\Omega}^s)$ correspond à une décomposition en vitesse. Nous avons donc mis en évidence un jeu de coordonnées généralisées pour lesquelles nous pouvons écrire les équations du mouvement (c'est-à-dire les équations de Lagrange du solide élastique).

Équations du mouvement

On appelle m la masse du solide, ρ_s sa densité, $R\mathcal{I}(t)R^T$ sa matrice instantanée d'inertie de rotation et l'on suppose que le solide est soumis à des forces volumique $\boldsymbol{f}$ et surfacique $\boldsymbol{g}$. La matrice $\mathcal{I}(t)$ est donnée par

$$\mathcal{I}(t) = \rho_s \int_{\widehat{\Omega}^s} \|(\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{g}) + \boldsymbol{d}\|^2 I_3 - \rho_s \int_{\widehat{\Omega}^s} ((\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{g}) + \boldsymbol{d}) \otimes ((\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{g}) + \boldsymbol{d}).$$

Ainsi les dynamiques de la translation, de la rotation et des déformations élastiques s'écrivent

$$m\ddot{\boldsymbol{\tau}} = \int_{\widehat{\Omega}^s} \boldsymbol{f}, \tag{1.33}$$

$$\dot{R} = \boldsymbol{\omega} \wedge R, \tag{1.34}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(R\mathcal{I}(t)R^T\boldsymbol{\omega}\right) - \rho_s \int_{\widehat{\Omega}^s} \Big(R\partial_t \boldsymbol{d} \otimes R((\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{g}) + \boldsymbol{d})\Big) \cdot \boldsymbol{\omega} - \rho_s \int_{\widehat{\Omega}^s} \Big(R((\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{g}) + \boldsymbol{d}) \otimes R\partial_t \boldsymbol{d}\Big) \cdot \boldsymbol{\omega} \\ + \rho_s \int_{\widehat{\Omega}^s} R(\boldsymbol{d} \wedge \partial_{tt}\boldsymbol{d}) = \int_{\widehat{\Omega}^s} R((\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{g}) + \boldsymbol{d}) \wedge \boldsymbol{f} + \int_{\widehat{\Omega}^s} R((\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{g}) + \boldsymbol{d}) \wedge \boldsymbol{g}, \end{aligned} \tag{1.35}$$

$$\begin{aligned} \rho_s\Big(\int_{\widehat{\Omega}^s} \partial_{tt}\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{b} + 2\int_{\widehat{\Omega}^s} R(\partial_t \boldsymbol{d} \wedge \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{\omega} + \int_{\widehat{\Omega}^s} \Big((\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{g}) + \boldsymbol{d}) \otimes R\boldsymbol{b}\boldsymbol{\omega}\Big) \cdot \boldsymbol{\omega} \\ - \|\boldsymbol{\omega}\|^2 \int_{\widehat{\Omega}^s} \boldsymbol{b} \cdot ((\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{g}) + \boldsymbol{d}) + \int_{\widehat{\Omega}^s} R(\boldsymbol{d} \wedge \boldsymbol{b}) \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}\Big) + \int_{\widehat{\Omega}^s} \boldsymbol{\sigma}_s(\boldsymbol{d}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{b}) \\ = \int_{\widehat{\Omega}^s} \boldsymbol{f} \cdot R\boldsymbol{b} + \int_{\partial\widehat{\Omega}^s} \boldsymbol{g} \cdot R\boldsymbol{b} \qquad \forall \boldsymbol{b} \in H^1(\widehat{\Omega}^s) \cap \mathcal{E}_0, \end{aligned} \tag{1.36}$$

La première équation (1.33) est découplée des autres et décrit le mouvement du centre de gravité. L'équation (1.35) représente l'évolution du vecteur instantané de rotation $\boldsymbol{\omega}$ et est couplée à (1.36) qui ne sont rien d'autres que les équations de l'élasticité linéarisée en référentiel tournant dans lesquelles on voit apparaître les forces de Coriolis et centrifuge. Pour une rotation donnée ces équations sont linéaires en $\boldsymbol{d}$.

Remarque 12 *Les équations qui régissent la dynamique d'un mouvement rigide sont un cas particulier de ces équations et s'obtiennent en prenant* $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}$.

Résultat d'existence

Dans [4] nous avons montré l'existence et l'unicité de solution faible à ce système couplé. On construit une suite de solutions approchées par la méthode de Galerkin. La base de Galerkin utilisée est constituée des vecteurs propres de l'opérateur de l'élasticité linéarisée avec conditions de Neumann homogènes au bord orthogonaux aux mouvements rigides infinitésimaux. Pour montrer que le système approché admet une solution on retrouve la condition sur la matrice $\mathcal{M}(\boldsymbol{d})$ qui doit rester définie positive. C'est en effet une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice de masse du système

discret soit inversible. Cela impose de travailler sur un temps petit et la solution existe tant que cette condition est satisfaite.

Une des difficultés est de montrer la compacité nécessaire pour passer à la limite dans les équations couplées (1.35) et (1.36). La solution vérifie des estimations d'énergie dont on déduit des convergences faibles insuffisantes pour traiter les termes non linéaires, en particulier nous avons besoin de compacité sur la vitesse instantanée de rotation. Si il n'y avait pas de couplage entre l'équation de la rotation et celle du déplacement élastique cette propriété serait vérifiée. Il s'agit donc d'obtenir des estimations supplémentaires sur les accélérations de rotation et élastique simultanément. Dans [17] nous nous étions restreint au cas de données petites ce qui nous permettait d'obtenir les estimations voulues. Dans [4], pour s'affranchir de cette hypothèse supplémentaire, nous avons séparé l'étude des basses fréquences en espace de $\boldsymbol{d}$ de celle de ses hautes fréquences, ce qui permet de contrôler les termes non linéaires. En particulier ce résultat peut être interprété en disant que l'action de l'accélération de rotation sur les hautes fréquences de $\partial_{tt}\boldsymbol{d}$ tend asymptotiquement vers zéro.

Enfin nous avons démontré, en raisonnant par l'absurde, l'unicité de cette solution. Une des difficultés, comme pour l'équation des ondes, est que la vitesse de la structure n'est pas une fonction test admissible car elle ne possède pas la bonne régularité. On commence par vérifier que si elle était admissible on obtiendrait des estimations sur la différence de deux solutions qui nous donnerait par application du Lemme de Gronwall l'unicité. On procède ensuite en régularisant la vitesse de la structure de façon à avoir une fonction test admissible et on montre que les termes résiduels provenant de cette régularisation tendent vers zéro.

Remarque 13 *Dans [Bou03] le même modèle (auquel il a été ajouté un terme visqueux régularisant) est considéré dans le cadre de l'interaction fluide-structure et l'existence de solutions faibles est démontrée.*

1.2.5 Conclusions

Ces résultats d'existence de solutions permettent, en particulier, de donner un cadre à l'analyse numérique des schémas de discrétisation pour ces problèmes couplés. De plus, quand les démonstrations sont constructives, elles peuvent suggérer de nouvelles stratégies de discrétisation, de nouveaux algorithmes ou donner une idée des limites de validité de ces stratégies.

1.3 Analyse numérique – *Ref : [5], [8], [10], [27]*

Nous allons nous intéresser à la discrétisation en temps et en espace de systèmes couplés fluide-structure. Comme nous l'avons vu lors de l'analyse mathématique des différents systèmes on peut envisager plusieurs stratégies : considérer le système couplé d'un seul bloc ou bien découpler le fluide de la structure et les recoupler par la suite grâce à une procédure de point fixe. D'autre part, la gestion du domaine fluide, dépendant du déplacement de la structure et donc du temps dans le cas instationnaire, est souvent délicate et on a soit réécrit le problème dans un domaine fixe soit, à une étape intermédiaire, régularisé et linéarisé son mouvement. Ces deux aspects apparaissent également numériquement et plusieurs choix sont possibles pour élaborer des schémas de discrétisation stables, convergents et performants. Ces choix dépendent fortement du modèle et du type d'applications visées.

1.3.1 Schémas sur maillages mobiles : the Geometric Conservation Law – *Ref : [8], [10]*

Ces travaux, initiés lors d'un séjour de recherche de deux mois à l'université du Colorado à Boulder dans l'équipe de C. Fahrat, ont été effectués en collaboration avec C. Fahrat et P. Geuzaine.

Lorsque l'on considère un problème couplé où les déplacements de la structure sont importants les équations fluide, posées en configuration eulérienne, sont définies dans un domaine mobile. D'un point de vue numérique il est alors nécessaire d'élaborer des stratégies permettant le suivi de l'interface et de définir le domaine fluide à chaque pas de temps. Une des méthodes communément employées est d'utiliser un formalisme « Arbitraire Euler Lagrange » (ALE) pour écrire les équations du fluide [DGH82]. Nous n'aborderons pas ici les autres méthodes telle la méthode des domaines fictifs [GPP94] ou celle de la frontière immergée [PM89], ni les nombreux travaux qui leurs sont consacrés. La formulation ALE utilise une transformation $\mathbf{\Phi}^f$ définie du domaine de référence à valeur dans le domaine déformé. Cette transformation étend les déformations de la structure à l'interface au domaine fluide. Elle suit donc les déformations de l'interface sans suivre les mouvements du fluide à l'intérieur du domaine fluide où elle est arbitraire. C'est cette transformation qui définit le mouvement du maillage.

Si on considère une équation de conservation du type

$$\partial_t u + \text{ div } F(u) = 0, \quad \text{dans } \Omega^f(t),$$

sa formulation ALE s'écrit

$$\partial_t u|_{\hat{\boldsymbol{x}}} - \boldsymbol{w} \cdot \nabla u + \text{ div } F(u) = 0, \quad \text{dans } \Omega^f(t),$$

où $\boldsymbol{w}$ désigne la vitesse du maillage associée à $\mathbf{\Phi}^f$. Ici $\boldsymbol{w}$ est supposée donnée et quelqconque. Cette équation peut aussi être réécrite sous forme intégrale

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega^f(t)} u + \int_{\Omega^f(t)} \text{div } (F(u) - \boldsymbol{w}u) = 0.$$

Une des questions, si on utilise ce formalisme et donc si l'on travaille sur maillages mobiles, est : est-il nécessaire d'adapter les schémas élaborés sur maillages fixes dans le cas des maillages mobiles ? Doit-on prendre des précautions particulières pour conserver l'ordre de convergence ? La stabilité ?

Dans [8] et [10] nous avons tenté de répondre à ces questions. Nous nous sommes placés dans le cadre d'une discrétisation volumes finis pour une loi de conservation scalaire générale. Nous avons étudié l'influence du choix des schémas d'intégration en temps sur la stabilité dans le cas de schéma d'ordre 1 en temps ou plus généralement du θ-schéma [8] et sur l'ordre de convergence [10].

Si on considère une discrétisation volumes finis on obtient

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_i(t)} u + \int_{\Omega_i(t)} \text{div } (F(u) - \boldsymbol{w}u) = 0,$$

où $\Omega_i(t)$ désigne une cellule au temps t. En faisant apparaître le flux au bord de la cellule il vient

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_i(t)} u + \int_{\partial\Omega_i(t)} (F(u) - \boldsymbol{w}u) \cdot \boldsymbol{n}_i = 0,$$

soit

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_i(t)} u + \sum_{j\in V(i)} \int_{\partial\Omega_{ij}(t)} (F(u) - \boldsymbol{w}u) \cdot \boldsymbol{n}_{ij} = 0,$$

où $V(i)$ désigne l'ensemble des faces $\partial\Omega_{ij}(t)$ de la cellule i associée à la maille i et $\boldsymbol{n}_{ij}$ la normale extérieure unitaire à ces faces. Typiquement le flux à l'interface peut être approché par un flux numérique Φ

$$\int_{\partial\Omega_{ij}(t)} (F(u) - \boldsymbol{w}u)\cdot\boldsymbol{n}_{ij} = |\partial\Omega_{ij}(t)|\Phi(u_i, u_j, \boldsymbol{\nu}_{ij}(t), \boldsymbol{\kappa}_{ij}(t)),$$

où $|\partial\Omega_{ij}(t)|$ désigne la surface de la face. Les quantités u_i désignent les valeurs moyennes sur une cellule et $\boldsymbol{\nu}_{ij}(t)$, $\boldsymbol{\kappa}_{ij}(t)$ peuvent être définies par

$$\boldsymbol{\nu}_{ij}(t) = \frac{1}{|\partial\Omega_{ij}(t)|}\int_{\partial\Omega_{ij}(t)} \boldsymbol{n}_{ij}(t),$$

$$\boldsymbol{\kappa}_{ij}(t) = \frac{1}{|\partial\Omega_{ij}(t)|}\int_{\partial\Omega_{ij}(t)} \boldsymbol{w}(t)\cdot\boldsymbol{n}_{ij}(t).$$

On demande de plus au flux numérique d'être conservatif : $\boldsymbol{\Phi}(u, v, -\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\kappa}) = -\boldsymbol{\Phi}(v, u, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\kappa})$ et consistant $\boldsymbol{\Phi}(u, u, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\kappa}) = F(u)\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\kappa}u$.

Nous allons considérer un θ-schéma pour la discrétisation en temps de ce problème. Soit δt le pas de temps, et notons g^n les approximations de la quantité g au temps $n\delta t$; on a

$$|\Omega_i^{n+1}|u_i^{n+1} = |\Omega_i^n|u_i^n - \delta t\theta\sum_{j\in V(i)}|\overline{\partial\Omega}_{ij}|\Phi(u_i^{n+1}, u_j^{n+1}, \overline{\boldsymbol{\nu}}_{ij}, \overline{\boldsymbol{\kappa}}_{ij}) - \delta t(1-\theta)\sum_{j\in V(i)}|\overline{\partial\Omega}_{ij}|\Phi(u_i^n, u_j^n, \overline{\boldsymbol{\nu}}_{ij}, \overline{\boldsymbol{\kappa}}_{ij}). \tag{1.37}$$

Le paramètre θ appartient à $[0, 1]$. Pour $\theta = 1$ on retrouve le schéma d'Euler implicite et pour $\theta = 1/2$ le schéma, sur maillage fixe, est d'ordre 2 en temps. La question est maintenant de savoir comment calculer les valeurs moyennes, à l'interation $n+1$ en temps, de la normale $\overline{\boldsymbol{\nu}}_{ij}$, de la mesure du bord des faces des cellules $|\overline{\partial\Omega}_{ij}|$, et du flux de la vitesse de maillage à l'interface $\overline{\boldsymbol{\kappa}}_{ij}$. De plus, est-ce que les choix que l'on va faire peuvent influencer les propriétés de stabilité et de précision en temps du schéma ? Le choix le plus immédiat est de prendre, par exemple ces quantités égales à celles à l'instant $(n+1)\delta t$. Cependant, si aucune précaution n'est prise, des instabilités numériques ont été constatées [num96] en particulier en temps long. Ces instabilités peuvent être contrôlées en diminuant le pas de temps. Un guide pour calculer ces quantités géométriques est d'imposer que le schéma préserve un champ constant. Cette idée appelée *Discrete Geometric Conservation Law* (DGCL) est apparue pour la première fois dans [TL79]. Des schémas possédant cette propriété ont été développés pour des discrétisations d'ordre un ou deux en temps dans le contexte des volumes finis ou des éléments finis [NG94], [LF96], [FN99]. Ici pour le schéma considéré cette loi de conservation s'écrit en tenant compte de la consistance du flux :

$$|\Omega_i^{n+1}| - |\Omega_i^n| = \delta t\sum_{j\in V(i)}|\overline{\partial\Omega}_{ij}|\overline{\boldsymbol{\kappa}}_{ij}.$$

Les quantités $|\Omega_i^{n+1}|$ sont des quantités géométriques connues à partir du moment où on connaît le mouvement du maillage au cours du temps et donc le second membre de l'égalité doit être égal à

$$\delta t\sum_{j\in V(i)}|\overline{\partial\Omega}_{ij}|\overline{\boldsymbol{\kappa}}_{ij} = \int_{t^n}^{t^{n+1}}\left(\int_{\partial\Omega_i(t)}\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}_i(t)\right). \tag{1.38}$$

Dans cette égalité nous avons à droite une quantité exacte qui dépend de la vitesse de maillage tandis que le membre de gauche est une quantité approchée. Pour vérifier la DGCL il s'agit donc de trouver les quantités moyenne $\overline{\boldsymbol{\kappa}}_{ij}$, $|\overline{\partial\Omega}_{ij}|$ et $\overline{\boldsymbol{\nu}}_{ij}$ de façon à ce que (1.38) soit vérifiée. Le calcul de ces quantités dépend de la dimension, de la vitesse de maillage considérée (linéaire ou quadratique par morceaux sur (t^n, t^{n+1})), en éléments finis du degré des polynômes d'approximation....

Remarque 14 *Cette égalité signifie que l'on demande au schéma de conserver exactement les volumes et donc en particulier qu'il n'y ait pas de perte de masse.*

Dans [8] et [10] nous avons étudié les liens de la DGCL avec la stabilité et la précision du schéma.

Théorème 5 *On suppose que les flux sont monotones. Le θ-schéma (1.37) vérifie le principe du maximum discret indépendamment de la vitesse de maillage si et seulement si la DGCL est vérifiée.*

Remarque 15 *Si la DGCL n'est pas vérifiée alors on obtient une inégalité de stabilité du type $\|u^n\|_{L^\infty} \leq e^{\frac{C\delta t T}{1-C\delta t^2}} \|u^0\|_{L^\infty}$ où C dépend de la « perte de masse » . Dans [FN99] où le cas des éléments finis est considéré il est démontré que la DGCL est une condition suffisante pour qu'un schéma d'Euler implicite pour équation d'avection-diffusion sur maillage mobile soit stable indépendamment de la vitesse de maillage. Si cette condition n'est pas vérifiée alors la constante de stabilité dépend de la norme L^∞ en espace de la divergence de la vitesse de maillage, quantité qui là encore mesure la « perte de masse » du maillage.*

Numériquement les cas « pathologiques » d'instabilités numériques quand la DGCL n'est pas vérifiée peuvent être obtenus en temps long et pour des vitesses de maillage oscillant à hautes fréquences aussi bien pour des équations d'avection linéaire ou encore des systèmes non linéaires comme les équations d'Euler [8]. Enfin cette contrainte sur le pas de temps peut être contraignante dans le cas de l'interaction fluide-structure où la vitesse du maillage est inconnue.

En ce qui concerne la précision en temps dans [10] nous avons construit des schémas d'ordre 2 en temps pour des systèmes hyperboliques sur maillages mobiles en utilisant deux méthodes. Pour l'une le flux est calculé pour des quantités géométriques moyennes obtenues par combinaison de quantités géométriques à certains instants dans les intervalles (t^n, t^{n+1}), l'autre le système est résolu sur un maillage « moyen ». Les schémas obtenus ne vérifient pas nécessairement la DGCL. Inversement, les schémas simplement transposés de schémas sur maillages fixes et vérifiant la DGCL ne conservent pas nécessairement l'ordre du schéma, même si ceux-ci sont au moins d'ordre 1 [GF00]. Ainsi la DGCL ne constitue pas un moyen de préserver l'ordre en temps de schémas sur maillage fixe.

Pour les schémas d'ordre 2 (Crank-Nicolson, BDF2) la question de la stabilité indépendamment de la vitesse de maillage est abordée dans ([BG04], [FN04]) dans un contexte éléments finis. Il apparaît que pour de ce type de discrétisation en temps la DGCL n'est ni une condition nécessaire ni une condition suffisante pour obtenir la stabilité indépendamment de la vitesse de maillage.

1.3.2 Schémas stables : cas de forts effets de masse ajoutée – *Ref : [5], [27]*

Les résultats présentés dans cette section, initiés lors de mon accueil en délégation au sein du projet REO en 2004–2005, ont été obtenus en collaboration avec M. Fernandez et J.-G. Gerbeau pour [5] et avec M. Astorino, doctorant au sein de ce même projet pour [27].

Les conditions de couplage à l'interface entre le fluide et la structure sont de deux types l'une cinématique (égalité des vitesses), l'autre traduit le principe de l'action et de la réaction (égalité des contraintes normales). Elle peuvent s'écrire de manière simplifiée de la façon suivante (on omet la variation éventuelle du domaine fluide)

$$\boldsymbol{u} = \partial_t \boldsymbol{d}, \quad \boldsymbol{\sigma}_s \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{\sigma}_f \cdot \boldsymbol{n}, \quad \text{sur } \Sigma. \tag{1.39}$$

D'un point de vue numérique la manière la plus directe de satisfaire à la version discrétisée de (1.39) est de résoudre le fluide et la structure à l'aide d'un unique solveur. On obtient alors des méthodes appelées *monolithiques*. Des exemples d'une telle approche sont très nombreux. On peut par exemple citer (sans être exhaustif) [RB01], [Hei04] basés sur une formulation ALE, [DHPSB03],[Baa01] qui utilisent la méthode des domaines fictifs ou [FVCJ$^+$]. Par construction (1.39) est satisfaite et on parle alors de schémas fortement couplés. Ces méthodes conservent naturellement l'énergie à l'interface et sont donc généralement stables. Elles ne sont cependant pas très modulaires et permettent difficilement d'exploiter les spécificités de chaque sous-problème et d'intégrer les méthodes récemment développées pour la résolution du fluide seul ou de la structure seule.

Avec les méthodes dites *partitionnées* le fluide et la structure sont traités par deux solveurs spécifiques différents et la question est alors de savoir comment les coupler efficacement. Une première stratégie est d'utiliser un schéma décalé ou *faiblement couplé* ou encore *explicite* où l'on ne va résoudre le fluide et la structure qu'une seule fois par pas de temps. L'avantage de telles méthodes est qu'elles sont moins coûteuse puisqu'elles ne nécessitent l'évaluation des inconnues fluide et structure qu'une seule fois par itération en temps. Ces méthodes ont été très étudiées et très utilisées, en particulier pour la simulation d'écoulements compressibles (voir par exemple [Pip97], [PFL95], [PF03]). On trouvera dans [FvdZG06] un état de l'art sur ces méthodes. Cependant la condition (1.39) n'est pas vérifiée et cela peut conduire à des instabilités numériques, en particulier en cas de forts effets de masse ajoutée du fluide sur la structure. Ces instabilités ont été observées par exemple dans le cas des écoulements sanguins dans les artères, où un fluide incompressible interagit avec une structure dont la densité est proche de la densité du fluide. Le rôle de l'effet de la masse ajoutée sur la stabilité numérique avait été souligné dans [LTM01] et il a été démontré dans [CGN05] (et par la suite dans [FWR07] pour des schémas en temps plus généraux) que, même dans le cas d'un modèle très simple, un schéma décalé est inconditionnellement instable si le rapport des densités est plus petit qu'un certain seuil. Il semble que cela soit fortement lié à l'incompressibilité du fluide. Il est à noter que récemment dans [BNV08] un schéma décalé stable a été proposé basé sur des conditions de Robin à l'interface.

Par conséquent, des schémas dits *fortement couplés* ou *implicites* ont été développés et utilisés pour pallier ces problèmes. Ils sont stables par nature car ils conservent l'énergie à l'interface. Cependant ils restent très coûteux car ils demandent un grand nombre d'appels à chaque solveur par itération en temps. Ainsi, ses dernières années de nombreux efforts ont été faits pour accélérer la convergence des méthodes de point fixe (relaxation, linéarisation) [LTM01], [MWR01], [MW01], [DFF03], [RRLJ01] ou des méthodes de Newton inexactes [MS02], [MS03], [Tez01], [Hei04] ou exactes [FM03a], [FM03b], [FM04], [FM05] utilisées pour vérifier (1.39) de manière forte. On trouvera dans [DGHL04], [SMSTT05], [LTM00], [12], des études de stabilité, convergence, estimations d'erreur pour des schémas fortement couplés ou implicites..

La plupart de ces schémas sont basés sur une discrétisation type *Dirichlet-Neumann* pour lesquels le fluide est résolu en lui prescrivant la condition cinématique à l'interface, quant à la structure elle

dépend des efforts appliqués par le fluide. Pour des stratégies du type *Neumann-Neumann* on pourra se référer à [DDFQ05], [DDQ04].

Dans [5] et [26] nous avons proposé et analysé un schéma *semi-implicite*. L'idée est de séparer les efforts en pression des efforts visqueux appliqués par le fluide sur la structure, les premiers étant traités implicitement et les deuxièmes étant traités explicitement. Ce splitting est obtenu en utilisant le schéma de Chorin-Temam pour la résolution de la partie fluide [Cho68], [Cho69], [Tem68] (voir également [GMS06] pour un état de l'art sur les méthodes de projections). Dans [BQQ08], [QQ07] ce sont des méthodes de splitting algébrique qui sont utilisées.

Présentation du schéma

Nous allons présenter le schéma pour le problème non linéaire couplé complet (1.1, 1.2, 1.5, 1.9, 1.11). Les équations du fluide sont discrétisées à l'aide d'une méthode de projection de Chorin-Temam et de la méthode ALE décrite précédemment. L'avancement en temps de la structure se fait à l'aide d'un schéma de Newmark. On se donne un pas de temps δt et on suppose que l'on connaît la vitesse du fluide $\boldsymbol{u}^n$, la pression p^n, le déplacement de la structure $\boldsymbol{d}^n$, la vitesse de la structure $\boldsymbol{u}_s^n$ et le domaine fluide $\Omega^{f,n}$ à l'instant $n\delta t$. L'algorithme s'écrit

– **Étape 0 -** Extrapolation de la position de l'interface :

$$\tilde{\boldsymbol{d}}^{n+1} = \boldsymbol{d}^n + \delta t \left(\frac{3}{2}\boldsymbol{u}_s)^n - \frac{1}{2}(\boldsymbol{u}_s)^{n-1} \right). \tag{1.40}$$

– **Étape 1-** Définition du nouveau domaine et de la vitesse ALE :

$$\boldsymbol{w}^{n+1}_{|\hat{\Sigma}} = \frac{\tilde{\boldsymbol{d}}^{n+1} - \boldsymbol{d}^n}{\delta t}_{|\hat{\Sigma}}, \quad \boldsymbol{w}^{n+1} = \mathrm{Ext}(\boldsymbol{w}^{n+1}_{|\Sigma}), \quad \Omega^{f,n+1} = \Omega^{f,n} + \delta t \boldsymbol{w}^{n+1}, \tag{1.41}$$

où Ext désigne une extension de la vitesse au bord à tout le domaine fluide.

– **Étape 2 :** Étape d'advection-diffusion :

$$\begin{cases} \rho_f \left. \dfrac{\tilde{\boldsymbol{u}}^{n+1} - \boldsymbol{u}^n}{\delta t} \right|_{\hat{\boldsymbol{x}}} + \rho_f(\tilde{\boldsymbol{u}}^n - \boldsymbol{w}^{n+1}) \cdot \nabla \tilde{\boldsymbol{u}}^{n+1} - 2\nu \ \mathrm{div}(\boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\boldsymbol{u}}^{n+1})) = \boldsymbol{0}, \quad \text{dans} \quad \Omega^{f,n+1}, \\ \qquad\qquad \tilde{\boldsymbol{u}}^{n+1} = \boldsymbol{w}^{n+1}, \quad \text{sur} \quad \Sigma^{n+1}. \end{cases} \tag{1.42}$$

– **Étape 3 -** Étape de projection (correction de la vitesse)

– **Étape 3.1 :**

$$\begin{cases} \rho_f \dfrac{\boldsymbol{u}^{n+1} - \tilde{\boldsymbol{u}}^{n+1}}{\delta t} + \nabla p^{n+1} = \boldsymbol{0}, \quad \text{dans} \quad \Omega^{f,n+1}, \\ \qquad\qquad \mathrm{div}\ \boldsymbol{u}^{n+1} = 0, \quad \text{dans} \quad \Omega^{f,n+1}, \\ \boldsymbol{u}^{n+1} \cdot \boldsymbol{n} = \dfrac{\boldsymbol{d}^{n+1} - \boldsymbol{d}^n}{\delta t} \cdot \boldsymbol{n}, \quad \text{sur} \quad \Sigma^{n+1}. \end{cases} \tag{1.43}$$

– **Étape 3.2 :**

$$\left\{\begin{array}{rl} \rho_s \dfrac{\boldsymbol{u}_s^{n+1}-\boldsymbol{u}_s^n}{\delta t} - \text{ div } \left(\dfrac{\boldsymbol{\sigma}_s^n+\boldsymbol{\sigma}_s^{n+1}}{2}\right) = \mathbf{0}, & \text{dans } \hat{\Omega}^s, \\ \dfrac{\boldsymbol{d}^{n+1}-\boldsymbol{d}^n}{\delta t} = \dfrac{\boldsymbol{u}_s^{n+1}+\boldsymbol{u}_s^n}{2}, & \text{dans } \hat{\Omega}^s, \\ \boldsymbol{\sigma}_s^{n+1}\cdot\widehat{\boldsymbol{n}} = J^{f,n+1}(\boldsymbol{\sigma}_f(\tilde{\boldsymbol{u}}^{n+1},p^{n+1})\circ\boldsymbol{\Phi}^{f,n+1})(\nabla\boldsymbol{\Phi}^{f,n+1})^{-T}\cdot\widehat{\boldsymbol{n}}, & \text{sur } \hat{\Sigma}. \end{array}\right. \tag{1.44}$$

L'intérêt de ce schéma est que tous les termes non linéaires (convection, non linéarités géométriques) sont traités à l'étape explicite d'advection-diffusion. Seule l'étape de projection, qui consiste en la résolution d'un problème de type Darcy, est couplée implicitement avec la structure. Les étapes 1 et 2 ne sont donc effectuées qu'une seule fois par pas de temps.

Remarque 16 *On a ici écrit l'étape de projection à l'aide d'une équation de Darcy mais on aurait aussi pu l'écrire comme un problème de Poisson sur la pression. On peut également imaginer des variantes où les étapes 2 et 3 sont interchangées, ou encore où d'autres extrapolations de la vitesse de maillage sont utilisées.*

Remarque 17 *Le résidu des efforts à l'interface n'est pas nul mais il ne contient que les efforts visqueux et pas les efforts en pression. On peut par conséquent espérer le contrôler et qu'il ne produise pas une énergie d'interface qui conduise à l'instabilité du schéma.*

Stabilité et convergence

Nous allons maintenant énoncer les résultats de stabilité et de convergence obtenus dans [5], [26]. On s'est pour ces études restreint au cas où les déplacements de la structure sont négligeables de façon à supposer que le domaine fluide ne varie pas : $\Omega^f(t)=\Omega^f$. Les équations sont donc posées dans la configuration de référence et on omettra les $\widehat{\ }$ pour simplifier. De plus la structure n'est pas discrétisée à l'aide d'un schéma de Newmark mais avec un schéma saute-mouton :

$$\left\{\begin{array}{rl} \rho_s \dfrac{\boldsymbol{d}^{n+1}-2\boldsymbol{d}^n+\boldsymbol{d}^{n-1}}{\delta t^2} - \text{ div } \left(\boldsymbol{\sigma}_s^{n+1}\right) = \mathbf{0}, & \text{dans } \Omega^s, \\ \boldsymbol{u}_s^{n+1} = \dfrac{\boldsymbol{d}^{n+1}-\boldsymbol{d}^n}{\delta t}, & \text{dans } \Omega^s, \\ \boldsymbol{\sigma}_s^{n+1}\cdot\boldsymbol{n} = \boldsymbol{\sigma}_f(\tilde{\boldsymbol{u}}^{n+1},p^{n+1})\cdot\boldsymbol{n}, & \text{sur } \Sigma. \end{array}\right. \tag{1.45}$$

D'autre part pour les besoins de l'analyse on suppose que le problème est discrétisé par des éléments finis. On appelle h le pas du maillage fluide et H le pas du maillage structure. On va supposer que les espaces éléments finis des vitesse et pression sont conformes dans $H^1(\Omega^f)$ et $L^2(\Omega^f)$ (on supposera que ces espaces vérifient une condition inf-sup ou LBB, même si cela ne joue aucun rôle dans notre analyse). De plus l'espace éléments finis de structure est une approximation conforme de l'espace V^s associé à la forme bilinéaire de la structure. En revanche on peut avoir une non conformité à l'interface entre le fluide et la structure. Cette non conformité peut venir de maillages incompatibles ou, même dans le cas de maillages coïncidant, de différence entre les opérateurs fluide et structure (on peut penser à un fluide couplé à une plaque où l'on a un opérateur d'ordre 4 pour décrire le comportement

en flexion de la plaque). Il est alors nécessaire d'introduire un opérateur π_h de raccord à l'interface qui peut être un simple opérateur d'interpolation ou en opérateur intégral de type mortier [BMP93], [BMP94], [BB99], [BBM97]. Les conditions cinématiques vérifiées par les vitesses fluide et structure ainsi que les fonctions tests qui interviennent dans la formulation variationnelle du problème discrétisé en temps et en espace s'écrivent donc (avec des notations évidentes)

$$\tilde{\boldsymbol{u}}_h^{n+1} = \pi_h \left(\frac{\boldsymbol{d}_H^n - \boldsymbol{d}_H^{n-1}}{\delta t} \right), \quad \text{sur } \Sigma$$

$$\boldsymbol{u}_h^{n+1} \cdot \boldsymbol{n} = \pi_h \left(\frac{\boldsymbol{d}_H^{n+1} - \boldsymbol{d}_H^n}{\delta t} \right) \cdot \boldsymbol{n}, \quad \text{sur } \Sigma$$

et pour les fonctions tests

$$\boldsymbol{v}_h = \pi_h(\boldsymbol{b}_H), \quad \text{sur } \Sigma.$$

Alors on a le résultat de stabilité suivant

Théorème 6 *On suppose que la restriction de l'opérateur d'interface π_h à l'espace des traces éléments finis associé à la structure est L^2-stable. Alors il existe une constante $C > 0$, indépendante des paramètres physiques du problème, telle que*

$$\rho_s \geq C \left(\rho_f \frac{h}{H^\alpha} + 2 \frac{\nu \delta t}{h H^\alpha} \right), \quad \textit{avec} \quad \alpha = \begin{cases} 0, & \textit{si} \quad \overline{\Omega^s} = \Sigma, \\ 1, & \textit{si} \quad \overline{\Omega^s} \neq \Sigma, \end{cases} \tag{1.46}$$

et les estimations discrètes d'énergie sont satisfaites

$$\frac{1}{\delta t} \left[\frac{\rho_f}{2} \|\boldsymbol{u}_h^{n+1}\|^2_{L^2(\Omega^f)} - \frac{\rho_f}{2} \|\boldsymbol{u}_h^n\|^2_{L^2(\Omega^f)} \right] + \frac{1}{\delta t} \left[\frac{\rho_s}{2} \left\| \frac{\boldsymbol{d}_H^{n+1} - \boldsymbol{d}_H^n}{\delta t} \right\|^2_{L^2(\Omega^f)} - \frac{\rho_s}{2} \left\| \frac{\boldsymbol{d}_H^n - \boldsymbol{d}_H^{n-1}}{\delta t} \right\|^2_{L^2(\Omega^s)} \right]$$
$$+ \frac{1}{2\delta t} \left[a_s(\boldsymbol{d}_H^{n+1}, \boldsymbol{d}_H^{n+1}) - a_s(\boldsymbol{d}_H^n, \boldsymbol{d}_H^n) \right] + \nu \|\boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\boldsymbol{u}}_h^{n+1})\|^2_{L^2(\Omega^f)} \leq 0. \tag{1.47}$$

Par conséquent le schéma est stable si (1.46) *est vérifiée.*

D'autre part on a également un résultat de convergence en vitesse

Théorème 7 *En supposant que les espaces éléments finis considérés ont de bonnes propriétés d'approximation, sous l'hypothèse de stabilité (1.46) et si la solution exacte du problème couplé est régulière, alors les solutions discrètes convergent vers la solution continue et vérifient les estimations d'erreur*

$$\frac{\rho_f}{2} \|\boldsymbol{u}_h^{n+1} - \boldsymbol{u}(t^{n+1})\|^2_{L^2(\Omega^f)} + \frac{\rho_s}{2} \left\| \frac{\boldsymbol{d}_H^{n+1} - \boldsymbol{d}(t^{n+1}) - \boldsymbol{d}_H^n - \boldsymbol{d}(t^n)}{\delta t} \right\|^2_{L^2(\Omega^s)}$$
$$+ \frac{1}{4} a_s(\boldsymbol{d}_H^{n+1} - \boldsymbol{d}(t^{n+1}), \boldsymbol{d}_H^{n+1} - \boldsymbol{d}(t^{n+1})) + \sum_{n=0}^{N} \nu \delta t \|\boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\boldsymbol{u}}_h^{n+1} - \boldsymbol{u}(t^{n+1}))\|^2_{L^2(\Omega^f)}$$
$$\leq C\delta t + Ch^{2k} + CH^{2m} + Ch^{2l}, \tag{1.48}$$

où k est le degré des polynômes de Lagrange associés à la discrétisation élément finis du fluide et m dépend du choix de l'espace d'approximation de l'espace des déplacements structure : pour $\boldsymbol{v}^s$ régulière m est tel que

$$\inf_{\boldsymbol{v}_H \in V_H^s} \|\boldsymbol{v}^s - \boldsymbol{v}_H\|_{V^s} \leq CH^m;$$

tandis que l dépend du choix de l'opérateur de raccord à l'interface π_h :

- *$l \leq \min\left(r - \frac{\alpha}{2}, k+1\right)$ pour l'opérateur d'interpolation ;*
- *$\frac{1}{2} \leq l \leq k$ pour l'opérateur « mortier ».*

Ces résultats appellent bien sûr quelques commentaires. Tout d'abord en ce qui concerne la stabilité. Elle est obtenue sous une condition suffisante. Cette condition implique que si on considère un fluide d-dimensionnel couplé à une structure d-dimensionnelle ($\alpha = 1$) alors, lorsque les effets de masse ajoutée sont forts, la stabilité est obtenue en raffinant le pas de maillage fluide par rapport au pas de maillage structure (d'où la nécessité de considérer des maillages incompatibles pour obtenir le résultat théorique). En revanche dans le cas où l'on considère un modèle réduit de type plaque ou coque ($\alpha = 0$) alors la condition ne fait pas intervenir le pas de maillage structure. Il est alors suffisant de jouer sur le pas de temps pour obtenir la stabilité. On verra à la section suivante que ces restrictions n'apparaissent pas et que le schéma est stable pour les jeux de paramètres que l'on a considérés et qui permettent d'obtenir des simulations physiologiques.

Remarque 18 *La condition suffisante provient de la nécessité de contrôler le résidu des efforts visqueux. Il est à noter que l'on arrive ici à le contrôler car on a choisi un schéma diffusif pour la structure. La question est ouverte si on considère un schéma de type Newmark. Dans ce cas dans [ACF08] il est démontré que le schéma est stable mais dans le cas où les conditions cinématiques à l'interface sont imposées de manière faible à l'aide de la méthode de Nitsche. Cependant d'un point de vue pratique l'utilisation d'un schéma de Newmark ne pose pas de problème de stabilité.*

En ce qui concerne le résultat de convergence en vitesse, on obtient que l'erreur en temps est au moins d'ordre $\sqrt{\delta t}$. Il est connu que le schéma de Chorin-Temam non incrémental a un ordre de convergence inférieur à δt pour la pression en norme $L^\infty(0,T;L^2(\Omega^f))$ et pour la vitesse en norme $L^\infty(0,T;H^1(\Omega^f))$ (voir [BC07], [EG04], [GQ98a], [GQ98b], [Ran91] pour plus de détails). Ici on l'obtient aussi sur la vitesse du fluide en norme $L^\infty(0,T;L^2(\Omega^f))$. Il est possible que cela soit dû à notre méthode de démonstration mais il est également possible que, comme on considère un problème couplé, l'erreur en pression se propage, par l'intermédiaire de la structure, à tout le schéma. Les simulations numériques tenteront de répondre à cette question. Le résultat de convergence appelle à un deuxième commentaire concernant le raccord incompatible à l'interface. L'estimation d'erreur est optimale dans tous les cas quand on considère un raccord intégrale type « mortier ». Ce résultat rejoint celui de [LTM00]. En revanche, l'optimalité pour le cas où le raccord utilise l'opérateur d'interpolation éléments finis associé au fluide dépend de la structure considérée et du degré des polynômes de Lagrange associés au fluide, comme l'illustre le tableau suivant :

π_h	structure d-dimensionnelle opérateur du 2^{nd} ordre $r=1,\ \alpha=1$	structure $(d-1)$-dimensionnelle opérateur du 2^{nd} ordre. $r=1,\ \alpha=0$	structure $(d-1)$-dimensionnelle opérateur du 4^{e} ordre. $r=2,\ \alpha=0$
Interpolation	non optimal	$k=1$ optimal	$k\leq 2$ optimal
Mortier	optimal $\forall k$	optimal $\forall k$	optimal $\forall k$

TAB. 1.1 – Optimalité de l'erreur en espace en fonction de l'opérateur d'interpolation

Pour une discussion sur les raccords incompatibles en fluide-structure on pourra également se reporter à [FLLT98].

Résultats numériques

Les résultats numériques illustrent les capacités et performances de ce schéma en terme de temps de calcul et de stabilité en particulier en cas de forts effets de masse ajoutée. Il est à noter que le schéma de Newmark est utilisé pour la structure et que dans tous les cas tests considérés les maillages fluide et structure sont compatibles sans que l'on ait pu observer d'instabilités pour les jeux de paramètres considérés. Dans tous les calculs présentés ici l'étape de projection est résolue grâce à un problème de Poisson en pression et non un problème mixte de type Darcy.

Tout d'abord nous avons comparé sur un cas bidimensionnel où la structure élastique occupe une partie de la frontière du domaine fluide et vérifie des équations de membrane le résidu de la puissance à l'interface pour un schéma *explicite*, *implicite* et *semi-implicite*.

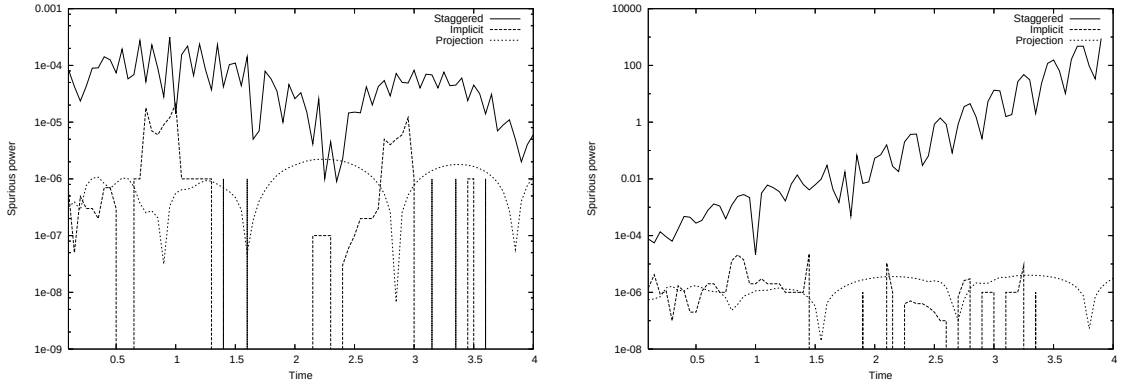


FIG. 1.1 – Figure de gauche : puissance résiduelle à l'interface en fonction du temps pour $\rho_s = 30$. Les effets de masse ajoutée sont trop faibles, les trois schémas sont stables. Figure de droite : puissance à l'interface en fonction du temps pour $\rho_s = 20$. Le schéma explicite est instable dans ce cas, tandis que les deux autres restent stables.

Le deuxième cas test concerne un problème tridimensionnel où la structure est modélisée par une

équation de coque non linéaire. Il s'agit du benchmark proposé dans [FGNQ01] (pour les paramètres utilisés on renvoie à [5]. Le fluide est discrétisé par des éléments $\mathbb{Q}_1/\mathbb{Q}_1$ et la structure par des éléments de coque MITC4 [CB03]. L'étape implicite du schéma est résolue à l'aide de l'algorithme de Newton.

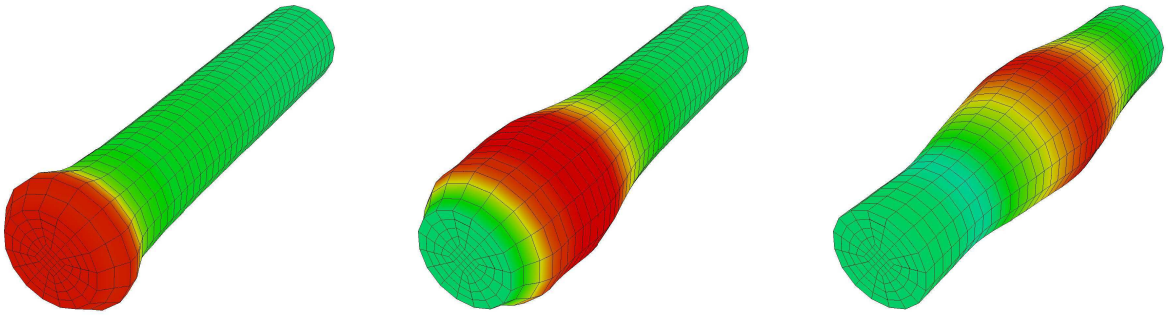


FIG. 1.2 – Propagation de l'onde de pression dans le cylindre, $t = 0.0018, 0.0058$ and 0.0098 s.

Les résultats sont en accord avec ceux de [FGNQ01], [GV03], [FM05].

Les gains en temps de calculs sont illustrés par le tableau suivant. On constate que le fait de traiter toutes les non linéarités du problème fluide lors d'une étape explicite diminue considérablement le coût de résolution du problème couplé.

COUPLAGE	ALGORITHME	CPU FLUIDE	CPU STRUCTURE	CPU TOTAL	**CPU TOTAL (sans dimension)**
Implicite	FP-Aitken	9449.43	2396.82	11846.25	**24.86**
	quasi-Newton	2399.68	485.01	2884.69	**6.05**
	Newton	2092.13	181.39	2273.52	**4.77**
Semi-Implicite	Newton	284.20	192.26	476.46	**1**

TAB. 1.2 – Temps CPU (en secondes et sans dimension) : cylindre droit, 50 pas de temps, $\delta t = 0.0002\, s$.

Concernant l'ordre de convergence de la méthode nous avons, en collaboration avec M. Astorino, exhibé une solution exacte d'un problème couplé bidimensionnel fluide-élasticité linéarisée et nous avons étudié l'erreur de convergence en temps des schémas *implicite*, *semi-implicite* avec étape de projection non incrémentale et incrémentale. Les tests ont été faits en utilisant Freefem++ [HPLHO].

On constate une réduction de l'ordre de convergence ($< \delta t$) pour le schéma semi-implicite non incrémental pour la pression et la vitesse de la structure. Nous ne sommes pas arrivés à mettre en évidence de réduction sur la vitesse du fluide. De plus la version incrémental du schéma semi-implicite se comporte de la même façon que le schéma implicite.

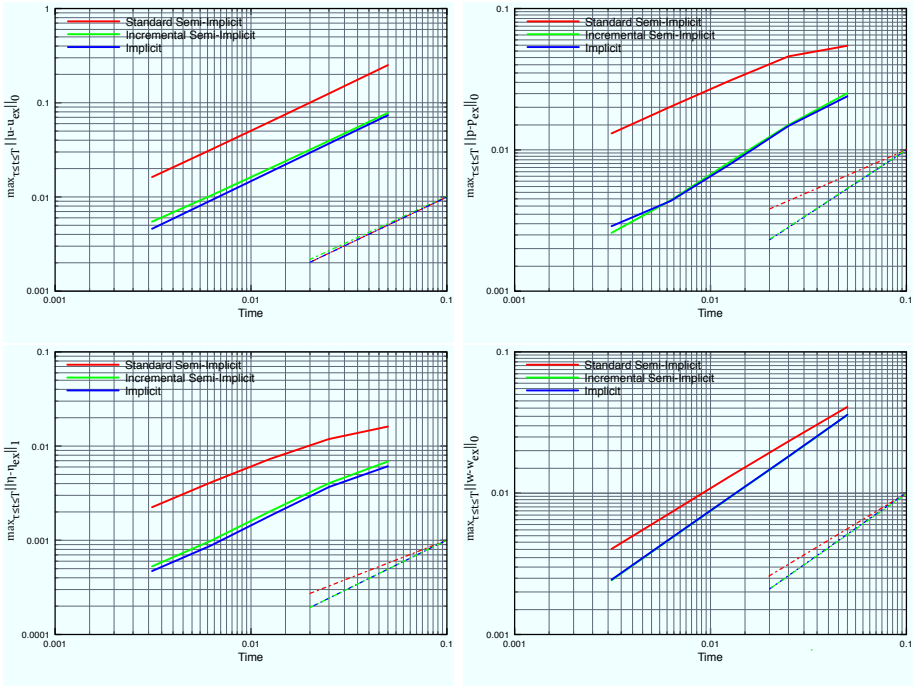


FIG. 1.3 – En rouge : schéma semi-implicite, en vert semi-implicite incrémental, en bleu implicite

La compréhension de ce schéma n'est bien sûr pas encore complète : l'ordre de convergence en temps est-il optimal ? Les conditions suffisantes sont-elles nécessaires ? Peut-on montrer que le schéma est stable avec le schéma de Newmark ? Comment se comporte la version incrémentale ? Quel est, dans ce cas, le rapport gain en précision/temps de calcul ? Comment adapter cet algorithme quand il est basé sur la résolution des équations de Poisson en pression au cas des structures, type coques, immergées ?

Les phénomènes d'interaction fluide-structure demandent, de par leur complexité (non linéarités, couplage), l'élaboration de méthodes numériques adaptées et performantes. Ces méthodes doivent intégrer au mieux les spécificités du fluide et de la structure qui ont des propriétés physiques très différentes. De plus les applications plus récentes, comme celles au monde de la santé, peuvent, à cause de leurs particularités mécaniques, physiques demander de nouveaux développements.

1.3.3 Conclusion

D'un point de vue numérique, les phénomènes d'interaction fluide-structure posent donc un grand nombre de questions de part la nature différentes des phénomèmes et la présence de nombreuses non linéarités. De plus, les stratégies qui allient coût de calcul et stabilité dépendent très fortement de l'application considérée : un schéma performant et stable dans le cadre de l'aéroélasticité peut s'avérer instable si l'on considère l'écoulement du sang dans les artères.

Chapitre 2

Modélisation de l'appareil respiratoire humain

Les phénomènes d'interaction fluide-structure sont des phénomènes très présents dans les écoulements physiologiques. L'application à la modélisation de l'appareil respiratoire est donc un prolongement naturel, mettant à profit les compétences acquises, de l'étude des phénomènes couplés fluide-structure.

La respiration implique le transport de l'air dans les voies aériennes allant de la bouche aux alvéoles pulmonaires, dont le nombre est d'environ 300 millions. Ces alvéoles, lieu de la diffusion de l'oxygène et du gaz carbonique, sont entourées d'un matériau viscoélastique, le parenchyme, constitué entre autre de vaisseaux sanguins et de fibres de collagène. Le déplacement de l'air est dû au déplacement du diaphragme et des côtes qui entraînent le parenchyme pulmonaire. L'air inhalé peut contenir des impuretés qu'il faut filtrer avant qu'elles n'atteignent les alvéoles. En revanche, les aérosols thérapeutiques doivent atteindre les zones que l'on souhaite traiter. Le poumon peut également ne plus remplir sa fonction correctement : inhalations accidentelles de corps étrangers, asthme, emphysème, fibrose, cancer peuvent être à l'origine de ces dysfonctionnements.

Le développement de modèles mathématiques et numériques peut alors être un moyen d'aider à la compréhension de ces phénomènes, d'aider au diagnostic ou encore d'optimiser les protocoles thérapeutiques. La motivation de ces travaux est donc l'obtention d'une hiérarchie de modèles facilement paramétrisables permettant de décrire certains phénomènes physiques, mécaniques et biologiques liés à la respiration humaine tels

- l'écoulement de l'air dans les voies aériennes ;
- les propriétés mécaniques du tissu pulmonaire ;
- les dépôts de particules dans les bronches ;

et d'aider à la compréhension de certaines pathologies ou à l'amélioration de dispositifs médicaux tels que les aérosols thérapeutiques.

2.1 Écoulement de l'air dans les voies aériennes – *Ref : [20], [28], [29]*

L'arbre bronchique peut être schématiquement divisé en trois parties :
- les voies aériennes supérieures (jusqu'à la septième génération), dans lesquelles on peut supposer que l'air est newtonien visqueux incompressible et donc que les équations de Navier-Stokes sont satisfaites. L'hypothèse d'incompressibilité est valide car le nombre de Mach est très inférieur à $0,3$, même en respiration forcée ;
- les bronches segmentaires et bronchioles (de la huitième génération à la dix-septième génération) dans lesquelles on peut supposer l'écoulement laminaire ;
- les acinis et sacs alvéolaires (de la dix-septième génération à la vingt-troisième génération) entourés du parenchyme qui sont le lieu de la diffusion des gaz dans le sang.

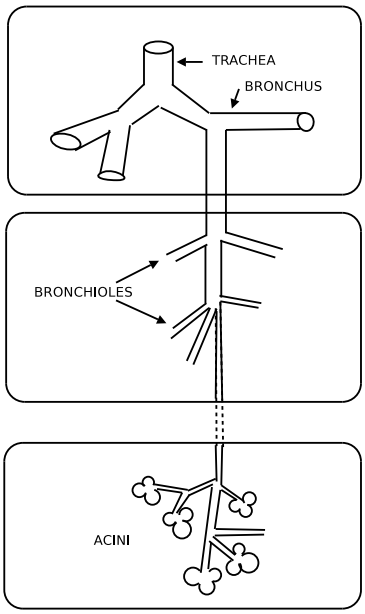


FIG. 2.1 – Décomposition de l'arbre en 3 parties.

Ainsi dans la partie supérieure de l'arbre l'écoulement de l'air peut être décrit par les équations de Navier-Stokes tridimensionnelles, mais on peut difficilement envisager de mener une simulation directe de ces équations (ou encore du système couplé air-particules) sur l'arbre complet : d'une part à cause des coûts de calcul, d'autre part à cause des limites de l'imagerie médicale classique qui ne permet de segmenter l'arbre bronchique au delà de la dixième génération. Il s'agit donc de déterminer des conditions aux limites permettant de prendre en compte la partie non simulée ou encore d'obtenir des modèles réduits que l'on couplera ensuite au reste de l'arbre. Une première solution est de caler des pressions en sortie de l'arbre (typiquement 2^7 sorties si on considère un arbre à 7 générations). Malheureusement de telles mesures expérimentales ne sont pas disponibles. Une deuxième solution est de dériver des modèles réduits permettant de décrire la partie distale de l'arbre de manière simplifiée et facilement paramétrable.

Une première étape de modélisation, d'analyse mathématique et de développement numérique a déjà été effectuée dans [19], [20], [21], [28]. Cela constituait le sujet de la thèse d'A. Soualah (voir [SA07],

[19], [20]) et se poursuit actuellement par le post-doc INRIA de D. Yakoubi, financé par l'ANR M3RS. Ensuite, il s'agit d'exploiter ces modèles, en collaboration avec des pneumologues, biomécaniciens. Cela fait l'objet de deux collaborations : l'une avec le service de pneumologie de l'hôpital de la Salpétrière (T. Similowski, C. Straus) et B. Maury et S. Martin (université d'Orsay), l'autre avec les chirurgiens ORL de l'hôpital Paris sud et le laboratoire d'aéroélasticité du CNAM (F. Chaumeton).

2.1.1 Modélisation

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ avec $d = 2, 3$, représentant les premières générations de l'arbre bronchique. On suppose que, dans cette partie proximale, l'air est newtonien visqueux incompressible et satisfait aux équations de Navier-Stokes. Dans les arbres distaux, on fait l'hypothèse que la loi de Poiseuille est vérifiée dans chacune des branches. Ainsi l'écoulement dans le *ie* sous-arbre est caractérisé par une résistance équivalente R_i. Cette résistance peut être calculée par analogie avec un réseau électrique : l'intensité du courant correspond au débit dans les branches et la différence de potentiel au saut de pression [BT06], [Olu99]. Deux branches successives sont en série et les branches d'une même génération sont en parallèle. La résistance équivalente dépend donc de la viscosité du fluide et des caractéristiques géométriques des branches. On suppose ensuite que l'arbre bronchique débouche dans une boîte dont un des bords de surface S, mobile dans une seule direction, est relié à un ressort de raideur k. Ce bord mobile modélise le comportement du diaphragme, moteur de la respiration. Ainsi, le modèle couplé peut être schématiquement décrit par la figure suivante :

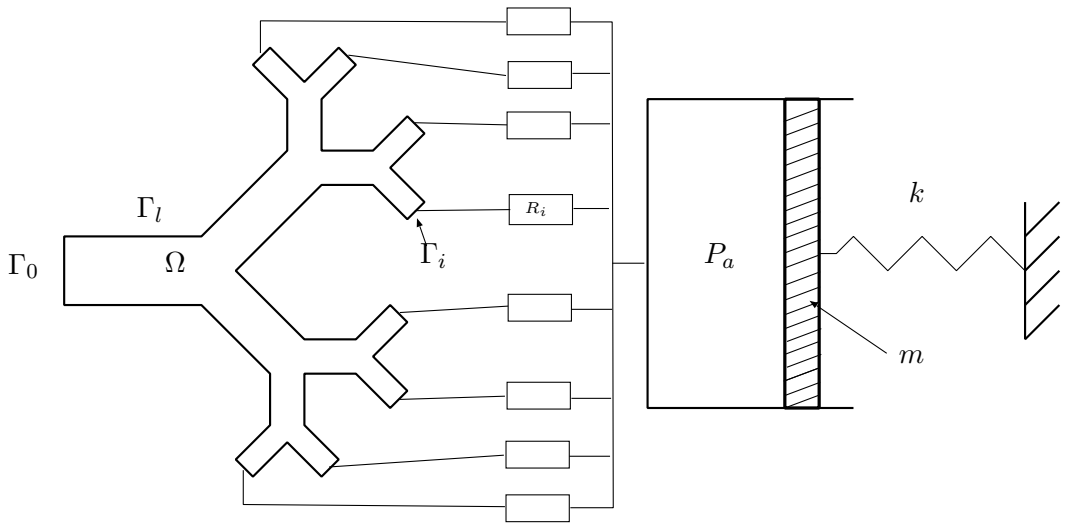


FIG. 2.2 – Modèle multiéchelles.

Dans le domaine Ω la vitesse $\boldsymbol{u}$ et la pression p du fluide vérifient les équations de Navier-Stokes avec une condition de Dirichlet homogène sur la paroi latérale Γ_l et des conditions de Neumann sur les sorties Γ_i. Les pressions p_i aux sorties artificielles $\Gamma_i, i \neq 0$, sont inconnues et liées à la pression alvéolaire P_a par la loi de Poiseuille $p_i - P_a = R_i \int_{\Gamma_i} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}$ où $\int_{\Gamma_i} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}$ est le débit du fluide à la sortie

Γ_i. Les conditions aux bords s'écrivent donc

$$\nu\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{n}} - p\boldsymbol{n} = -P_a\boldsymbol{n} - \left(R_i \int_{\Gamma_i} \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\right)\boldsymbol{n}, \quad \text{sur } \Gamma_i. \tag{2.1}$$

Ces conditions sont des conditions « dissipatives » qui correspondent à un couplage $3D$-$0D$. Elles représentent le modèle réeduit le plus simple appelé *lumped model*. Elles sont utilisées également pour la modélisation des écoulements sanguins (voir par exemple [VCFJT06], [VV05], [QV03], [QRV01]). Dans le cas des écoulements sanguins des modèles réduits hyperboliques sont également utilisés [FGNQ01], [FMN07], correspondant au phénomène de propagation d'une onde de pression. Cependant dans le cas de la ventilation il ne semble pas que de tels phénomènes de propagation d'ondes de pression apparaissent et l'hypothèse selon laquelle le fluide vérifie la loi Poiseuille dans la partie distale semble justifiée. La pression P_a ainsi que qu'une force extérieure f_{ext}, qui représente la force développée par le diaphragme, agissent sur le piston, dont la position est notée x. Enfin on suppose que le tissu élastique qui remplit la boîte est incompressible, ce qui se traduit par la relation

$$S\dot{x} = \sum_{i=1}^{N}\int_{\Gamma_i}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} = -\int_{\Gamma_0}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}, \tag{2.2}$$

où S représente la surface de la boîte.

Remarque 19 *Dans l'égalité précédente on a utilisé l'incompressibilité du fluide et le fait que la vitesse est nulle sur la paroi latérale considérée comme fixe. Si on avait tenu compte du mouvement de la paroi alors la vitesse de celle-ci serait apparue dans (2.2).*

Les équations globales du système s'écrivent donc :

$$\left\{\begin{array}{rcll}
\rho_f\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \rho(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} - \nu\Delta\boldsymbol{u} + \nabla p &=& \boldsymbol{0}, & \text{dans } (0,T)\times\Omega,\\
\nabla\cdot\boldsymbol{u} &=& 0, & \text{dans } (0,T)\times\Omega,\\
\boldsymbol{u} &=& 0, & \text{sur } (0,T)\times\Gamma_l,\\
\nu\nabla\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} - p\boldsymbol{n} &=& -P_0\boldsymbol{n} & \text{sur } (0,T)\times\Gamma_0,\\
\nu\nabla\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} - p\boldsymbol{n} &=& -P_a\boldsymbol{n} - R_i\left(\displaystyle\int_{\Gamma_i}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\right)\boldsymbol{n}, & \text{sur } (0,T)\times\Gamma_i,\\
& & & i=1,\ \ldots,\ N,\\
m\ddot{x} + kx &=& f_{ext} + SP_a, & \\
S\dot{x} &=& \displaystyle\sum_{i=1}^{N}\int_{\Gamma_i}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} = -\int_{\Gamma_0}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} &
\end{array}\right. \tag{2.3}$$

Ce problème admet comme formulation variationnelle, en supposant que $\boldsymbol{v}$ est une fonction test à divergence nulle, la formulation suivante

$$\left\{\begin{array}{l}
\displaystyle\int_\Omega \rho_f\partial_t\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} + \int_\Omega \rho_f(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} + \nu\int_\Omega \nabla\boldsymbol{u}:\nabla\boldsymbol{v} + \sum_{i=1}^{N} R_i\left(\int_{\Gamma_i}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\right)\left(\int_{\Gamma_i}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\right)\\
\displaystyle +\frac{m}{S^2}\left(\int_{\Gamma_0}\partial_t\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\right)\left(\int_{\Gamma_0}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\right) + \frac{k}{S^2}\left(\int_0^t\int_{\Gamma_0}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\right)\left(\int_{\Gamma_0}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\right)\\
\displaystyle = -P_0\int_{\Gamma_0}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} - \frac{f_{ext}}{S}\int_{\Gamma_0}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} + \frac{k}{S}x_0\left(\int_{\Gamma_0}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\right), \quad \forall\boldsymbol{v}.
\end{array}\right. \tag{2.4}$$

Tout a été écrit en fonction de la vitesse du fluide en utilisant l'incompressibilité globale du système (2.2). Il est à noter que la forme bilinéaire

$$a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \nu \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u} : \nabla \boldsymbol{v} + \sum_{i=1}^{N} R_i \left(\int_{\Gamma_i} \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} \right) \left(\int_{\Gamma_i} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} \right) \tag{2.5}$$

associée au système n'est pas la forme bilinéaire standard associée au problème de Stokes. Elle contient des termes supplémentaires associés à la dissipation venant des sous-arbres et faisant intervenir le produit des flux sur les sorties artificielles $\Gamma_i, i \neq 0$. Cette particularité nécessite l'élaboration de stratégies numériques adaptées.

En prenant $\boldsymbol{u}$ comme fonction test et en rappelant que $S\dot{x} = -\int \Gamma_0 \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}$, on obtient formellement l'égalité d'énergie suivante :

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{\rho_f}{2}\int_\Omega |\boldsymbol{u}|^2 + \frac{m}{2}|\dot{x}|^2 + \frac{k}{2}|x|^2\right)}_{\text{Énergie totale}} + \underbrace{\nu\int_\Omega |\nabla \boldsymbol{u}|^2}_{\text{Dissipation dans } \Omega} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} R_i \left(\int_{\Gamma_i} \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\right)^2}_{\text{Dissipation dans les sous-arbres}} \\ = &\underbrace{-\sum_{i=0}^{N}\int_{\Gamma_i} \frac{\rho_f}{2}|\boldsymbol{u}|^2(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})}_{\text{Flux d'énergie cinétique}} + \underbrace{P_0 S\dot{x}}_{\text{Puissance à l'entrée}} + \underbrace{f_{ext}\dot{x}}_{\text{Puissance des forces extérieures}} . \end{aligned} \tag{2.6}$$

Le signe du terme cubique en $\boldsymbol{u}$ représentant le flux d'énergie cinétique aux frontières est indéterminé. Cela peut poser un problème aussi bien d'un point de vue mathématique pour l'obtention d'estimations *a priori* que d'un point de vue numérique pour la stabilité des schémas [VC06].

2.1.2 Existence de solutions

Si l'on se pose la question de l'existence de solutions pour ce problème couplé une des premières difficultés est l'obtention d'estimations d'énergie et donc le contrôle des termes de flux d'énergie cinétique. On a

$$\left|\sum_{i=0}^{N}\int_{\Gamma_i} \frac{\rho_f}{2}|\boldsymbol{u}|^2(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})\right| = \left|\int_\Omega \rho_f(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}\right| \leq C \begin{cases} \|\boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\boldsymbol{u}\|^2_{L^2(\Omega)} \text{ si } d=2, \\ \|\boldsymbol{u}\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}\|\nabla\boldsymbol{u}\|^{\frac{5}{2}}_{L^2(\Omega)} \text{ si } d=3. \end{cases}$$

Par conséquent une estimation d'énergie pour le système couplé, avec une borne de $\boldsymbol{u}$ dans $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\cap L^2(0,T;H^1_{0,\Gamma_l}(\Omega))$, peut être obtenue uniquement dans le cas $d=2$, pour des données petites et un temps petit. Il est donc nécessaire soit de chercher d'autres estimations soit de modifier le problème afin d'obtenir des estimations d'énergie. Une première possibilité est de considérer la pression totale $p + \frac{\rho_f}{2}|\boldsymbol{u}|^2$ à la place de la pression p dans les contraintes fluides (voir [21]) ou d'ajouter un terme du type $\frac{\rho_f}{2}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})$ aux contraintes normales fluides. On peut alors obtenir l'existence de solutions faibles avec $\boldsymbol{u} \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1_{0,\Gamma_l}(\Omega))$. Une deuxième possibilité (voir [20]) est de contraindre

les vitesses du fluide à être proportionnelles à un profil donné :

$$\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x}) = \lambda_i(t)\boldsymbol{U}_i(\boldsymbol{x}) \text{ sur } \Gamma_i,$$

où $\boldsymbol{U}_i$ est donné et λ_i est une inconnue du problème.

Dans ce cas les conditions aux limites en contraintes s'écrivent

$$\int_{\Gamma_i} (\nu\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{n}} - p\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{U}_i = -P_a\int_{\Gamma_i}\boldsymbol{U}_i\cdot\boldsymbol{n} - R_i\lambda_i\left(\int_{\Gamma_i}\boldsymbol{U}_i\cdot\boldsymbol{n}\right)^2.$$

Sous ces conditions

$$\left|\sum_{i=0}^{N}\int_{\Gamma_i}\frac{\rho_f}{2}|\boldsymbol{u}|^2(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})\right| = \sum_{i=0}^{N}\gamma_i\lambda_i^3,$$

avec γ_i constantes dépendant des données. Ainsi le terme de convection s'écrit à l'aide d'un nombre fini de degrés de liberté. Or chacun des coefficients λ_i peut être contrôlé par la norme L^2 de la vitesse $\boldsymbol{u}$. En effet, en supposant que $\boldsymbol{U}_i\cdot\boldsymbol{n} \neq 0$ et en tenant compte de l'incompressibilité du fluide

$$|\lambda_i| = \frac{\|\boldsymbol{u}\|_{(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_i))'}}{\|\boldsymbol{U}_i\|_{(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_i))'}} \leq C_i\|\boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)},$$

où $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_i)$ est l'espace des traces de fonctions de $H^1(\Omega)$ nulles sur $\partial\Omega\setminus\Gamma_i$. Cette estimation permet donc de contrôler le terme convection par $\|\boldsymbol{u}\|^3_{L^2(\Omega)}$ et entraîne donc l'obtention d'estimations *a priori* au moins en temps petit. L'existence de solutions faibles peut alors être démontrée par la méthode de Galerkin. La compacité forte des vitesses, nécessaire pour passer à la limite dans le système approché, est obtenue de manière classique [GR86] grâce à des estimations supplémentaires sur des dérivées fractionnaires en temps de $\boldsymbol{u}$ et par application du lemme d'Aubin. L'existence pour tous temps est, quant à elle, obtenue pour des données (forces et conditions initiales) suffisamment petites.

Remarque 20 *Il est à noter que numériquement un telle contrainte stabilise également le système [KFH+09].*

Maintenant, si l'on considère le cas général non contraint, alors on démontre dans [28] l'existence de solutions plus régulières. La démarche est la même que dans [HRT96] ou [QV03]. Le premier résultat concerne le système de Navier-Stokes avec des conditions aux limites de type flux moyen prescrit ou pression moyenne prescrite. Le deuxième article s'intéresse à des modèles décrivant l'écoulement du sang. En particulier il y est démontré l'existence d'une solution en temps petit avec une condition de petitesse sur certaines données, analogues aux résistances de notre modèle, hypothèse dont on s'affranchit ici.

Le cadre fonctionnel dans lequel on se place est le suivant :

$$V = \{\boldsymbol{v}\in H^1(\Omega)^d,\ \nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0, \boldsymbol{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_l\}.$$

$$H = \overline{V}^{L^2},$$

Sur H on ne va pas mettre le produit scalaire usuel de $L^2(\Omega)$ mais un produit scalaire prenant en compte la partie inertielle venant du ressort. Soit $(\cdot,\cdot)_H$ le produit scalaire $H \times H$ défini par

$$(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})_H = \rho \int_\Omega \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} + \frac{m}{S^2}\left(\int_{\Gamma_0} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\right)\left(\int_{\Gamma_0} \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}\right), \tag{2.7}$$

Remarque 21 *Le flux* $\displaystyle\int_{\Gamma_0} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$ *d'une fonction* $\boldsymbol{v}$ *dans* H *n'est en fait pas défini. Cependant on peut en donner une définition rigoureuse par dualité* $H^{-\frac{1}{2}} - H^{\frac{1}{2}}$*, définition correspondant au flux dans le cas de fonctions régulières.*

De plus, on introduit un opérateur A adapté au problème dont les modes propres constituerons la base de Galerkin utilisée pour définir le problème approché.

$$\begin{aligned} D(A) &= \{\boldsymbol{v}\in V,\ |a(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})| \le C\|\boldsymbol{v}\|_H,\ \forall \boldsymbol{w}\in V\},\\ (A\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})_H &= a(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}),\ \forall(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\in D(A)\times V. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Cet opérateur est un opérateur de type Stokes avec des conditions aux limites mixtes Dirichlet-conditions dissipatives définies par (2.1). Il est autoadjoint, inversible de $D(A)$ dans H et d'inverse compact.

On dira alors que $\boldsymbol{u}$ est une solution de (2.3) si

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}\in L^2(0,T;D(A))\cap L^\infty(0,T;V)\cap H^1(0,T;H),\\ \dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_H + a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + a_2\left(\displaystyle\int_0^t \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right) = l(\boldsymbol{v}) \quad \forall\ \boldsymbol{v}\in V, \end{cases} \tag{2.9}$$

avec

$$b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = \rho\int_\Omega (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w},$$

la forme trilinéaire,

$$c(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = \frac{k}{S^2}\left(\int_{\Gamma_0}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\right)\left(\int_{\Gamma_0}\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}\right),$$

associée à l'énergie mécanique du ressort et

$$l(\boldsymbol{v}) = -P_0\int_{\Gamma_0}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} - \frac{f_{ext}}{S}\int_{\Gamma_0}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} + \frac{k}{S^2}Sx_0\left(\int_{\Gamma_0}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\right).$$

La démonstration de l'existence de solutions est basée sur des estimations obtenues en prenant successivement $A\boldsymbol{u}$ et $\partial_t\boldsymbol{u}$ comme fonctions tests. Il est à noter que $A\boldsymbol{u}$ est une fonction test admissible et elle est, en particulier, à divergence nulle grâce au choix de A.

La première estimation (en prenant $\boldsymbol{v} = A\boldsymbol{u}$), valable en temps petit, repose sur des propriétés de régularité de la solution de $A\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}$ avec $\boldsymbol{f}\in H$. En effet, on estime le terme de convection de la façon suivante

$$|b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})| \le \|\boldsymbol{u}\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)}\|A\boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)}.$$

De plus, comme $\boldsymbol{u} \in H^{3/2+\varepsilon}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ si $A\boldsymbol{u} \in H$ alors, par interpolation hilbertienne, il existe $\theta \in (0,1)$ tel que

$$\|\boldsymbol{u}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|\nabla \boldsymbol{u}\|^{\theta}_{L^2(\Omega)}\|A\boldsymbol{u}\|^{1-\theta}_{L^2(\Omega)}.$$

Par conséquent

$$|b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})| \leq C\|\nabla \boldsymbol{u}\|^{1+\theta}_{L^2(\Omega)}\|A\boldsymbol{u}\|^{2-\theta}_{L^2(\Omega)},$$

ce qui permet d'obtenir des estimations en temps petit de $\boldsymbol{u}$ dans $L^2(0,T;D(A)) \cap L^\infty(0,T;V)$.

Remarque 22 *L'étude des propriétés de régularité des solutions de $A\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}$ se ramène à l'étude de la régularité des solutions d'un problème de Stokes avec conditions mixtes Dirichlet-Neumann. Dans le cas où les Γ_i et la frontière latérale Γ_l sont régulières et se rencontrent à angle droit on montre que $\boldsymbol{w} \in H^{3/2+\varepsilon}(\Omega)$ ([OS95], [MR07]). Dans [HRT96] ou [QV03] une régularité H^2 de $\boldsymbol{w}$ était supposée qui ne semble pas être vérifiée. Cependant cela ne remet nullement en cause les résultats démontrés dans ces articles qui peuvent être obtenus grâce à la régularité $H^{3/2+\varepsilon}(\Omega)$ et en adaptant la démarche suivie dans [28].*

On montre par ailleurs l'unicité de la solution en raisonnant par l'absurde et en considérant la différence de deux solutions comme fonction test. L'existence globale en temps est, quant à elle, démontrée dans le cas où les conditions initiales et les forces appliquées sont suffisamment petites et si $k = 0$. Cette restriction vient du fait que, pour l'instant, nous n'avons aucune estimation de l'allongement du ressort.

2.1.3 Discrétisation du système

Comme nous l'avons fait remarquer précédemment, à cause des conditions aux limites non standard sur les frontières artificielles, la forme bilinéaire (2.5) associée au problème fait intervenir le flux des vitesses sur les Γ_i. Ainsi, si l'on cherche à discrétiser le problème continu à l'aide de la méthode des éléments finis, ces termes couplent tous les degrés de liberté des interfaces Γ_i. On peut pour les traiter envisager plusieurs stratégies :

- effectuer un traitement explicite. Cette solution permet d'utiliser les fonctionnalités de n'importe quel code résolvant les équations de Navier-Stokes. Cependant dans notre cas particulier cela implique que l'on ne résout pas les équations du ressort et pose des problèmes de stabilité numérique importants. De façon générale, traiter le terme de flux explicitement dans les conditions aux limites (2.1) pose des problèmes de stabilité des schémas quand les résistances sont grandes. D'autre part, si l'on n'intègre pas les termes résistifs dans la forme bilinéaire du système l'existence de solutions peut être obtenue mais sous une condition de petitesse des R_i, illustrant la possibilité d'instabilités numériques dans le cas de traitement explicite.
- effectuer un traitement implicite (voir [28]). Cela implique de modifier la matrice de rigidité du problème (ou uniquement le produit matrice-vecteur si la résolution du système linéaire est basée sur un algorithme itératif type GMRES). Cette matrice n'a alors pas une structure éléments finis usuelle et prend en compte la dissipation venant des sous-arbres. Se pose alors la question du conditionnement et de la construction de préconditionneurs adaptés.
- élaborer de nouvelles méthodes numériques qui permettent de résoudre le problème en ne résolvant que des problèmes standards. C'est ce type de méthode qui a été développé dans [29] en collaboration avec A. Devys, B. Grec, B. Maury et D. Yakoubi.

Dans [28], c'est la deuxième stratégie qui a été utilisée. Nous avons modifié la définition du produit matrice-vecteur éléments finis pour faire intervenir l'analogue discret du terme $\sum_{i=0}^{N}\left(\int_{\Gamma_i}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\right)\left(\int_{\Gamma_i}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\right)$. La résolution des équations de Navier-Stokes s'effectue par la résolution d'un problème mixte stabilisé en vitesse-pression, les termes de convection étant traités de manière semi-implicite. Le préconditionneur utilisé est celui associé à la matrice non modifiée et cela peut poser des problèmes quand le nombre de sorties est grand ou quand les valeurs des résistances modifient beaucoup le conditionnement de la matrice.

Dans [29], le but était de pouvoir utiliser n'importe quel solveur éléments finis sans avoir à redéfinir de produit matrice-vecteur. Nous allons expliciter l'algorithme sur un problème modèle de Stokes avec conditions aux limites dissipatives (2.1). En effet, hormis le terme convectif, après discrétisation en temps notre système de Navier-Stokes couplé au ressort se ramène à un système du type :

$$\left\{\begin{array}{rcll}\rho_f\dfrac{\boldsymbol{u}^n}{\delta t}-\nu\Delta\boldsymbol{u}^n+\nabla p^n &=& \rho\dfrac{\boldsymbol{u}^{n-1}}{\delta t}, & \text{in}\,\Omega,\\ \nabla\cdot\boldsymbol{u}^n &=& 0, & \text{dans}\,\Omega,\\ \boldsymbol{u}^n &=& 0, & \text{on}\,\Gamma_l,\\ \nu\nabla\boldsymbol{u}^n\cdot\boldsymbol{n}-p^n\boldsymbol{n} &=& -P_0\boldsymbol{n} & \\ \nu\nabla\boldsymbol{u}^n\cdot\boldsymbol{n}-p^n\boldsymbol{n} &=& P_i\boldsymbol{n}-R_i\left(\displaystyle\int_{\Gamma_i}\boldsymbol{u}^n\cdot\boldsymbol{n}\right)\boldsymbol{n}, & \text{sur}\ \Gamma_i\quad i=1,\ldots,N.\end{array}\right. \tag{2.10}$$

Pour calculer $\boldsymbol{u}^n$ nous allons utiliser un principe de superposition :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\boldsymbol{u}^n &=& \tilde{\boldsymbol{u}}^n+\displaystyle\sum_{i=0}^{N}\alpha_i^n\boldsymbol{u}_i\\ \text{et}\qquad p^n &=& \tilde{p}^n+\displaystyle\sum_{i=0}^{N}\alpha_i^n p_i,\end{array}\right. \tag{2.11}$$

où $(\boldsymbol{u}_i)_{i=0}^N$ et $(p_i)_{i=0}^N$ ne dépendent pas du temps et $\tilde{\boldsymbol{u}}^{n+1}$ and $\tilde{p}^{n+1}$ sont des corrections calculées à chaque itération :

- pour tout $i=0,\ldots N$, $(\boldsymbol{u}_i,p_i)$ est calculée **à l'étape de précalculs**

$$\left\{\begin{array}{rcll}\rho_f\dfrac{\boldsymbol{u}_i}{\delta t}-\nu\Delta\boldsymbol{u}_i+\nabla p_i &=& \boldsymbol{0}, & \text{dans}\ \Omega,\\ \nabla\cdot\boldsymbol{u}_i &=& 0, & \text{dans}\,\Omega,\\ \boldsymbol{u}_i &=& \boldsymbol{0}, & \text{sur}\ \Gamma_l,\\ \nu\nabla\boldsymbol{u}_i\cdot\boldsymbol{n}-p_i\boldsymbol{n} &=& \boldsymbol{0}, & \text{sur}\ \Gamma_j,\ \text{for}\ j\neq i,\\ \nu\nabla\boldsymbol{u}_i\cdot\boldsymbol{n}-p_i\boldsymbol{n} &=& -\boldsymbol{n}, & \text{sur}\ \Gamma_i\quad i=0,\ldots,N.\end{array}\right. \tag{2.12}$$

- Ensuite à chaque itération le calcul de $\tilde{\boldsymbol{u}}^n$ et $\tilde{p}^n$ prend en compte l'avancement en temps :

$$\left\{\begin{array}{rcll}\rho_f\dfrac{\tilde{\boldsymbol{u}}^n}{\delta t}-\nu\Delta\tilde{\boldsymbol{u}}^n+\nabla\tilde{p}^n &=& \rho\dfrac{\boldsymbol{u}^{n-1}}{\delta t}, & \text{dans}\,\Omega,\\ \nabla\cdot\tilde{\boldsymbol{u}}^n &=& \boldsymbol{0}, & \text{dans}\ \Omega,\\ \tilde{\boldsymbol{u}}^n &=& 0, & \text{sur}\,\Gamma_l,\\ \nu\nabla\tilde{\boldsymbol{u}}^n\cdot\boldsymbol{n}-\tilde{p}^n\boldsymbol{n} &=& \boldsymbol{0}, & \text{sur}\ \Gamma_i\quad i=0,\ldots,N.\end{array}\right. \tag{2.13}$$

- Enfin les coefficients α_i^n sont choisis de façon à satisfaire aux conditions aux limites (2.1) sur les sorties Γ_i. Les α_i^n sont ainsi solutions d'un système linéaire $N \times N$ faisant intervenir les résistances R_i et les flux des différentes vitesses pré-calculées. Cette matrice ne dépend que des précalculs et peut donc être assemblée une seule fois. En revanche, le second membre de ce système prend en compte les pressions extérieures appliquées et l'avancement en temps de la solution.

Remarque 23 *Un tel algorithme ne nécessite donc pas de modifier le code en profondeur et nous l'avons testé sur Freefem++ (voir [HPLHO]). Cependant pour l'adapter aux équations de Navier-Stokes il est nécessaire de traiter le terme convectif soit explicitement, soit à l'aide de la méthode des caractéristiques et ce afin de préserver le principe de superposition. C'est cette deuxième solution que nous avons retenue.*

Nous sommes actuellement en train de tester, pour ce schéma, différents algorithmes de discrétisation des équations de Stokes (basé sur une formulation mixte stabilisée, sur des schémas de projection type Chorin-Temam dans leur version non incrémentale et incrémentale...) afin diminuer les temps de calcul. D'autre part une étude comparative entre la première approche utilisée dans [28] et cette approche est nécessaire. En particulier pour comprendre si cet algorithme est plus performant que le premier quand la matrice associée à la forme bilinéaire (2.5) est mal conditionnée.

2.1.4 Simulations

Nous allons maintenant présenter quelques simulations numériques démontrant que le modèle permet d'obtenir des écoulements instationnaires tridimensionnels en géométrie réelle dont le seul moteur est la force extérieure exercée sur le ressort que l'on choisit en créneau en temps (qui modélise la force musculaire appliquée par le diaphragme). La géométrie utilisée est la même que celle employée dans [dRMiF$^+$06], [FMP$^+$05]. De plus, les simulations illustrent la capacité de ce modèle, en jouant sur les paramètres, à reproduire certains effets de pathologies comme une crise d'asthme (augmentation des résistances R_i des sous-arbres distaux) ou un emphysème (diminution de la raideur k). Pour les valeurs des coefficients utilisés et physiologiquement pertinents on renvoi à [28]. On a en particulier estimé les valeurs des résistances à l'aide des données anatomiques de [Wei63].

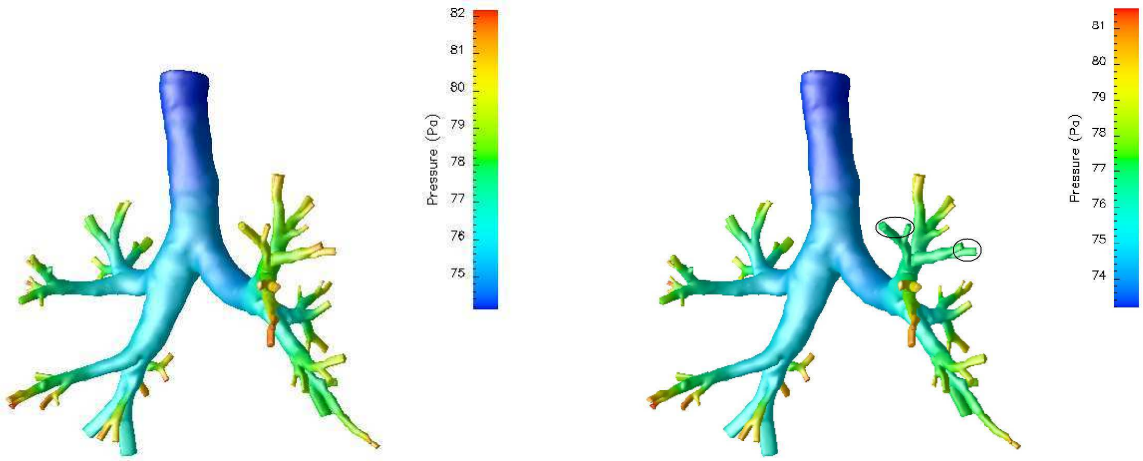


FIG. 2.3 – Champs de pression au pic d'expiration dans un cas normal (à gauche) et obstrué (à droite). Seules les sorties pour lesquelles la résistance R_i a été augmentée sont entourées.

On constate une différence quantitative de la pression moyenne dans la trachée, et ce uniquement en ayant augmenté quatre résistances sur 68.

Nous avons d'autre part regardé les isovaleurs du module de la vitesse dans deux plans de coupe après la première bifurcation :

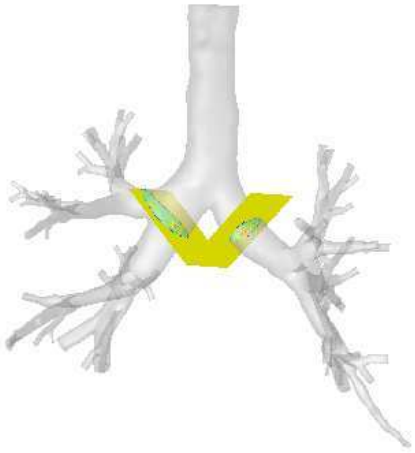


FIG. 2.4 – Géométrie reconstruite. Plans de coupe après la première bifurcation.

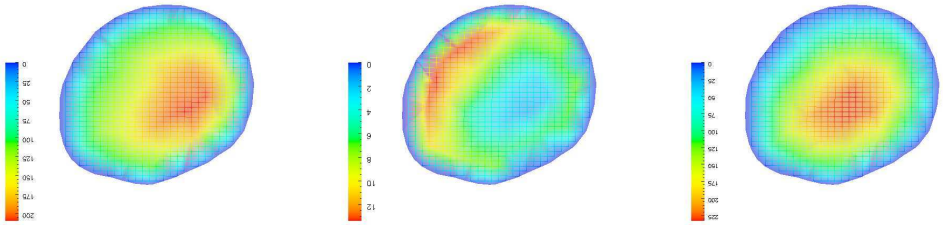


FIG. 2.5 – Isovaleurs de la vitesse dans le plan de coupe droite, au maximum de l'inspiration ($t = 0.4s$, à gauche), à la transition ($t = 1.6s$, au milieu), au maximum de l'expiration ($t = 1.9s$, à droite)

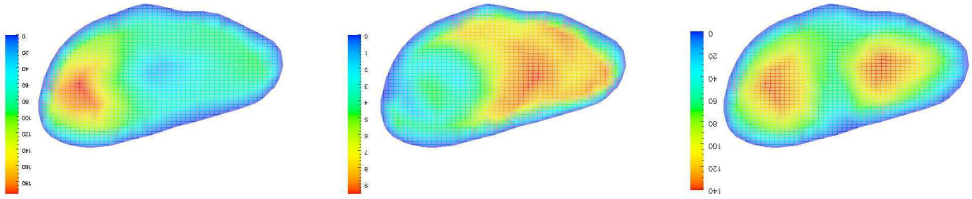


FIG. 2.6 – Isovaleurs de la vitesse dans le plan de coupe gauche, au maximum de l'inspiration ($t = 0.4s$, à gauche), à la transition ($t = 1.6s$, au milieu), au maximum de l'expiration ($t = 1.9s$, à droite)

On constate la présence de la forme en M caractéristique de la transition (voir par exemple [dRVF$^+$07] où des expériences sur modèle plastiné et des simulations numériques ont été réalisées sur la même géométrie).

Remarque 24 *On peut souligner que la plupart des études sur l'écoulement de l'air dans l'arbre bronchique considèrent que l'écoulement est laminaire [CFD$^+$06], [DBVD$^+$08], [FMP$^+$05]. Bien que nos simulations ne permettent pas capturer les éventuels effets turbulents de l'écoulement (ce qui nécessiterait un maillage beaucoup plus fin et un solveur parallèle) le modèle proposé pourrait quand même être utilisé dans le cadre de simulations directes (type DNS). La question de savoir si l'écoulement est turbulent est abordée dans [LTMH07] où un écoulement stationnaire est considéré avec des conditions aux limites type sortie libre. La présence de turbulence dépend alors fortement de la géométrie. Cependant dans un cadre oscillatoire il n'est pas clair que les instabilités aient le temps de se développer.*

Remarque 25 *Il est clair que le modèle doit être exploité d'un point de vue physiologique et mécanique. De plus, certaines hypothèses faites comme la rigidité des paroies peuvent avoir une influence non négligeables sur l'écoulement. On renvoie à [WR08] pour une étude de l'influence du mouvement des paroies et de la prise en compte de l'interaction fluide-structure.*

D'autre part, nous avons reproduit des expériences d'expiration forcée (avec un modèle de ressort non linéaire, voir [SS08], [28], [29]). Le but est d'obtenir des portraits de phase volume-débit à la bouche. Ce sont ces courbes que les pneumologues ont l'habitude de lire et qui leur permettent d'effectuer un premier diagnostic :

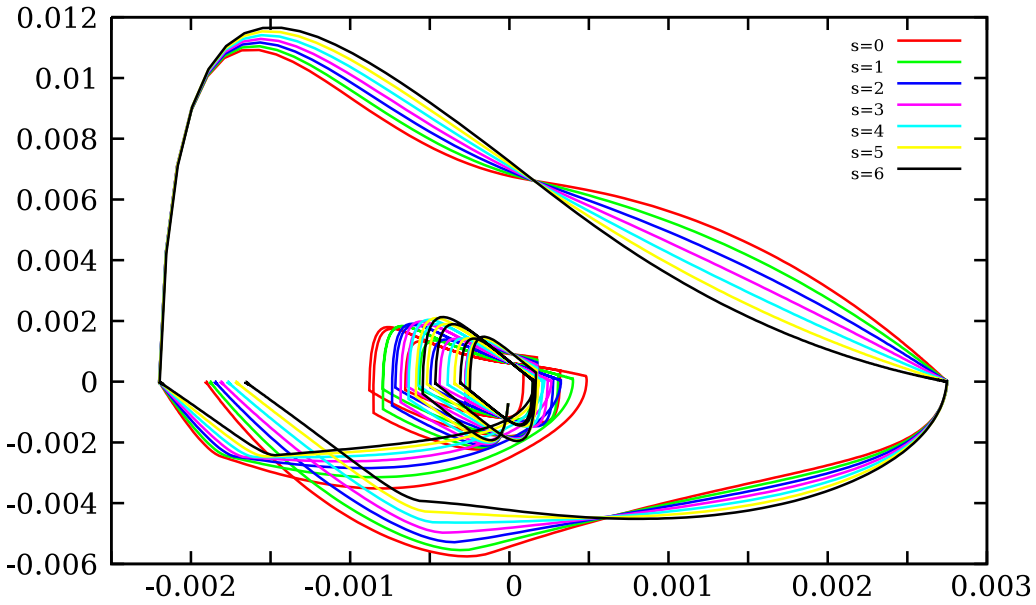


FIG. 2.7 – Courbes déplacement (en m)–débit(en $m^3 \cdot s^{-1}$) pour différentes valeurs de k. $k = 40.172 + 10^{s-3}$, $s = 0 \dots 6$. La zone des débits positifs correspond à la phase d'expiration et en inspiration les débits sont comptés négativement. Le début de l'expiration se fait au point de volume minimal. Dans une première phase le patient respire normalement puis inspire profondément, expire et inspire une nouvelle fois.

2.1.5 Conclusions

Ces courbes illustrent la capacité du modèle à reproduire des expériences de spirométrie. Une des questions est : quelle est l'adéquation réalité/simulations en ce qui concerne l'écoulement tridimensionnel ? Une exploitation des résultats d'un point de vue physiologique est en cours ainsi que la prise en compte de modèles de piston plus élaborés (effets non linéaires). Nous souhaitons également, en collaboration avec M. Boulakia, caler les paramètres du modèle à l'aide de mesures de volume-débit à la bouche et étudier la stabilité de ces paramètres par rapport aux mesures. Enfin, dans les modèles précédents, dont le but est la simulation de l'écoulement de l'air, le parenchyme pulmonaire est décrit de façon très simple. Un des avantages est le faible nombre de paramètres à caler mais il se peut que la réalité soit ainsi mal appréhendée. Il sera alors nécessaire de passer à des modèles plus fins, qu'il s'agira ensuite de coupler au reste de l'arbre bronchique.

2.2 Comportement mécanique du tissu pulmonaire – *Ref : [3], [6]*

Dans le modèle précédent le mouvement des tissus élastiques est simplifié à l'extrême. Je me suis donc également intéressée en collaboration avec B. Maury et N. Meunier d'une part, et L. Baffico, Y. Maday et A. Osses d'autre part, à la modélisation mécanique des tissus pulmonaires. Ce tissu, percé d'alvéoles pulmonaires remplies d'air, est constitué de fibres de collagène, de vaisseaux sanguins et se déforme sous l'action des forces développées par le diaphragme et la cage thoracique. Le but de ces

travaux est de déterminer des lois de comportement homogénéisées.

Dans [6], nous obtenons un modèle continu unidimensionnel où l'on considère que les alvéoles pulmonaires sont reliées par un arbre (l'arbre bronchique). Dans un premier temps nous nous sommes demandés si l'arbre bronchique, en tant que réseau de résistances, pouvait « tendre » vers l'infini. Nous avons donné un sens à cette notion d'arbre infini, qui nous conduit à un opérateur à noyau qui à un champ de pression en sortie de l'arbre (zone correspondant aux alvéoles idéalisées) associe le champ de vitesse correspondant. Il est à noter que dans le cas du poumon humain, nous avons « convergence » de l'arbre, ce qui montre une certaine « stabilité » du poumon vis à vis des variations du nombre de générations. Pour une généralisation de ce travail à la dimension 3 nous renvoyons à [MSV]. D'autre part dans [AST06b], [AST06a], [AST07], [AT08] les auteurs étudient différentes EDPs sur des géométries fractales, donnent un sens aux traces sur de tels domaines et dérivent des conditions aux limites transparentes de façon à ne calculer la solution que sur un sous-domaine.

Ensuite dans [6], le modèle unidimensionnel du tissu pulmonaire est obtenu comme limite d'un système masse-ressort dissipatif. Les masses (le parenchyme) sont séparées par des poches d'air (les alvéoles) reliées les unes aux autres par un arbre dyadique. L'originalité est que le terme de dissipation, lié à l'écoulement de l'air dans l'arbre, est non local et s'écrit, à la limite, à l'aide d'un opérateur à noyau. Nous avons par ailleurs étudié en collaboration avec C. Vannier (doctorante à Orsay sous la direction de B. Maury) le comportement en temps long des solutions de cette équation des ondes amorties.

L'article [3] est, quant à lui, consacré à l'obtention rigoureuse (développement asymptotique formel, passage à la limite deux échelles) d'un modèle homogénéisé décrivant le comportement moyen d'un matériau de type « mousse ». Il s'agit d'un matériau élastique contenant des inclusions de gaz parfait réparties périodiquement. Ici les alvéoles sont isolées les unes des autres. Il est à noter que le modèle obtenu est différent des ceux décrivant les milieux poreux qui sont parfois utilisés pour modéliser le parenchyme pulmonaire [OL01]. De plus, nous avons montré numériquement que la présence du gaz influençait le comportement du matériau limite, en particulier dans le cas des tissus vivants.

Je vais maintenant décrire un peu plus en détail chacun de ces résultats.

2.2.1 Modélisation unidimensionnelle du tissu pulmonaire – *Ref : [6]*

Soit $\Omega =]0, L[$ composé d'une succession de masses et de poches d'air reliées les unes aux autres par un arbre dyadique. Soit N le nombre de générations de l'arbre. On suppose que dans chaque branche de l'arbre le fluide vérifie la loi de Poiseuille qui est caractérisé par une résistance r_n à la génération n. Ainsi le vecteur des 2^N pressions aux sorties est lié aux 2^N débits par la relation :

$$\boldsymbol{p} = A^N \boldsymbol{q},\ A^N = \left(A^N_{ij}\right)_{0\leq i,j\leq 2^N},\ A^N_{ij} = R_{N-\nu_{ij}}, \tag{2.14}$$

où R_n est la résistance cumulée $r_0 + r_1 + \cdots + r_n$ et ν_{ij} mesure la distance de deux sorties à travers l'arbre. Comme il y a 2^N sorties à l'arbre on définit 2^N cellules

$$\Omega = \cup_{i=0}^{2^N-1} C^N_i,\ \text{avec } C^N_i =]ih_N; (i+1)h_N[,\ \text{et } h_N = \frac{L}{2^N}. \tag{2.15}$$

De plus, on pose $x^N_i = ih_N$, pour tout $i \in \{0, ..., 2^N\}$, et on note S^N_i (resp. T^N_i) les parties solides (resp. fluides) :

$$S^N_i =]x^N_i - \frac{1}{2}h_N\alpha_s, x^N_i + \frac{1}{2}h_N\alpha_s[,\ i \in \{1, ..., 2^N - 1\},$$

$$S_0^N =]x_0^N, x_0^N + \frac{1}{2}h_N\alpha_s[,\ S_{2^N}^N =]x_{2^N}^N - \frac{1}{2}h_N\alpha_s, x_{2^N}^N[,$$
$$T_i^N =]x_i^N + \frac{1}{2}h_N\alpha_s, x_{i+1}^N - \frac{1}{2}h_N\alpha_s[,\ i \in \{0, ..., 2^N - 1\}$$

où α_s et α_f désignent les proportions de solide et de fluide. Chaque masse est connectée à ses voisines par un ressort de raideur k_N. De plus on désigne par ρ la densité totale supposée constante sur $]0, L[$. Ainsi la masse m_N de chaque solide S_i^N est égale à $\rho\frac{\alpha_s L}{2^N} = \rho\alpha_s h_N$.

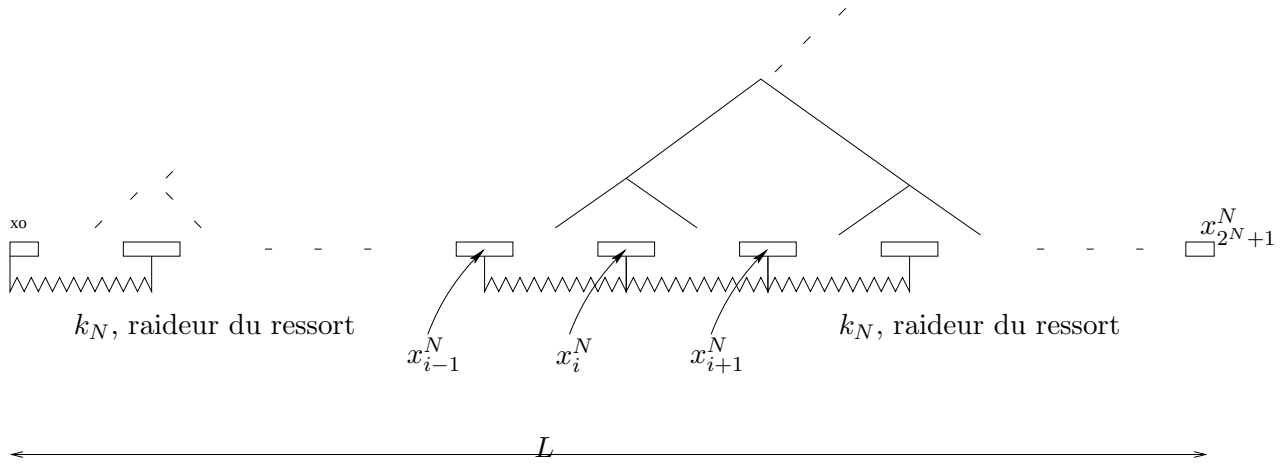


FIG. 2.8 – Système masse-ressort

Si on désigne par u_i^N le déplacement de x_i^N et f_i^N la force appliquée, alors la relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$m_N\ddot{u}_i^N(t) - k_N(u_{i+1}^N(t) - 2u_i^N(t) + u_{i-1}^N(t))$$
$$+ \sum_{j=1}^{2^N} A_{i-1,j-1}^N(\dot{u}_j^N(t) - \dot{u}_{j-1}^N(t)) - \sum_{j=1}^{2^N} A_{i,j-1}^N(\dot{u}_j^N(t) - \dot{u}_{j-1}^N(t)) = m_N f_i^N(t). \quad (2.16)$$

Les deux premiers termes représentent l'accélération et la force de rappel des ressorts, les deux suivants sont liés à la pression exercée par le fluide sur les masses, chaque pression dépendant de toutes les autres par l'intermédiaire de l'arbre. Ces termes sont exprimés à l'aide des variations de volume entre deux masses qui sont égales aux débits en sortie d'arbre.

Limite quand le nombre de générations tend vers l'infini

En supposant que le nombre de générations N tend vers l'infini, que $k_N = \frac{k}{2^N}$ et que la résistance globale de l'arbre $\sum_{i=0}^{N} \frac{r_n}{2^n}$ converge, alors la fonction u^N, affine par morceaux sur les cellules et valant

u_i^N aux nœuds x_i^n, converge vers $u \in H_0^1(0,L)$ solution faible de

$$\alpha_s \rho \partial_t u - k \partial_{xx} u - \partial_x \int_0^L \int_0^L K(x,y) \partial_y \partial_t u(y) dy = \rho \alpha_s f.$$

Le noyau K est constant par morceaux et est défini par

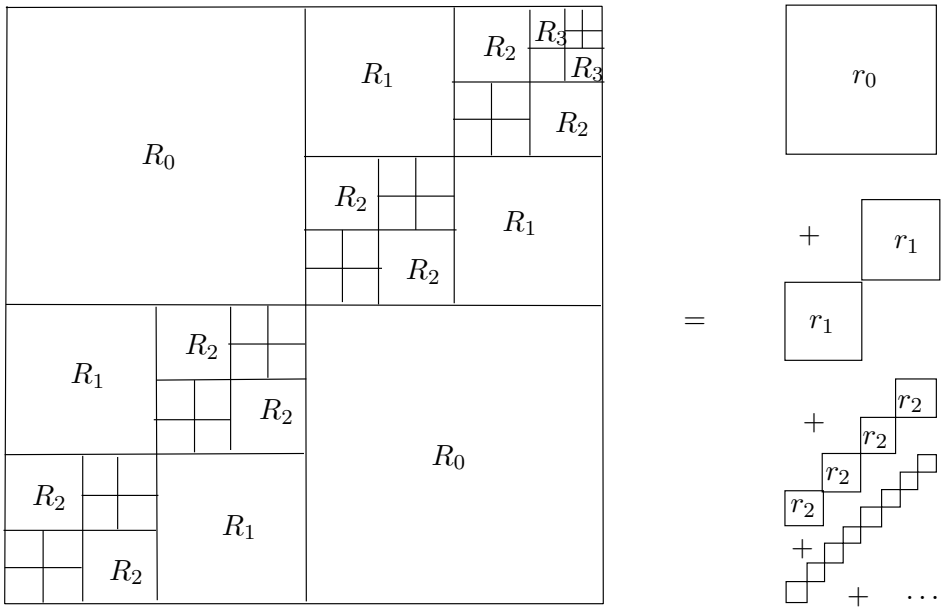


FIG. 2.9 – Noyau $K(x,y)$.

Par conséquent nous obtenons une équation des ondes avec un terme dissipatif non local qui prend en compte la dissipation du fluide circulant dans l'arbre. L'opérateur associé au noyau K a été étudié dans [6]. En particulier, c'est un opérateur compact dans $L^2(0,L)$ et la base de Haar est une base de vecteurs propres associés aux valeurs propres qui sont les restes de la série de terme général $\frac{r_n}{2^n}$. De plus, dans le cas d'un arbre géométrique (i.e. $r_n = r_0 \alpha^n$) on peut caractériser l'image de l'opérateur : c'est un espace défini à partir des fonctions de Haar, qui s'identifie, pour certaines valeurs de α, à l'espace de Sobolev H^s avec $s \in (-1/2, 1/2)$. Il est également possible d'estimer le noyau K, sa régularité L^p...

Remarque 26 *L'opérateur à noyau discret converge quand $\alpha < 2$. Dans le cas du poumon humain on peut supposer que l'arbre bronchique est géométrique et que la valeur de α est proche de $1,63$. Le cas $\alpha = 2$ correspond au minimiseur de la résistance équivalente globale d'un arbre fini sous une contrainte de volume [MFWS04]. Il se trouve que, dans ce cas, nous n'avons pas convergence vers la solution de l'équation des ondes dissipative mais u^N converge vers la condition initiale : tout reste bloqué (à la limite l'air ne peut plus passer à travers l'arbre).*

Comportement en temps long

En collaboration avec C. Vannier nous avons étudié le comportement en temps long des solutions dans le cas d'un arbre géométrique. Cette question fait l'objet de deux chapitres de sa thèse.

Nous montrons dans un premier temps, grâce au principe d'invariance de La Salle, que l'énergie du système $\rho\alpha_s\|u\|^2_{L^2(0,L)} + k\|\partial_x u\|^2_{L^2(0,L)}$ tend vers zéro quand t tend vers l'infini. De plus en utilisant un résultat dû à Haraux [HJ99] on montre, grâce à la coercivité L^2 de l'opérateur associé à la partie dissipative dans le cas $1 < \alpha < 2$, que l'énergie converge exponentiellement vers zéro. Si $\alpha \leq 1$ on ne sait pas conclure. Une des difficultés vient du fait que les fonctions propres de l'opérateur à noyau sont les fonctions de Haar et donc on est en présence de deux échelles différentes : la base de Fourier (liée au laplacien et aux espaces de Sobolev) et la base de Haar (liée à la dissipation visqueuse). Cette particularité ne nous permet pas non plus, pour l'instant, dans le cas $\alpha > 1$, d'estimer toutes les constantes en fonction de α et donc nous empêche de caractériser le taux de décroissance exponentielle en fonction de ce paramètre, ni de mettre en évidence d'éventuels phénomènes de sur-amortissement.

2.2.2 Modèle homogénéisé de mousse – *Ref : [3]*

Nous considérons ici un matériau linéaire élastique dans lequel des inclusions de gaz parfait sont réparties périodiquement. Ici, contrairement à l'étude précédente, les inclusions de gaz sont isolées. C'est l'hypothèse qui est faite dans [Gri03], [GN02] où sont étudiés les phénomènes de propagation d'ondes de pression dans un milieu unidimensionnel stratifié décrivant le tissu pulmonaire. Ces phénomènes se produisent à des échelles de temps telles que l'on peut supposer que l'air ne s'échappe pas des alvéoles.

Le but de ce travail est d'obtenir une loi de comportement homogénéisée lorsque le nombre d'inclusions tend vers l'infini. La configuration avant passage à la limite est

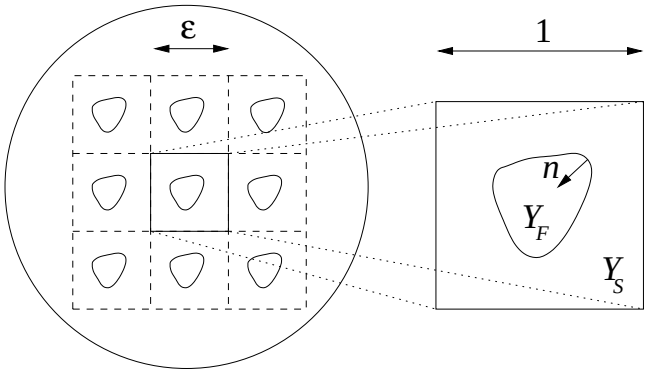


FIG. 2.10 – Le domaine Ω_ε et la cellule fluide-structure Y de référence.

On introduit les notations suivantes

$$Y^{\varepsilon,k} = \varepsilon(Y+k)\,, \quad Y_F^{\varepsilon,k} = \varepsilon(Y_F+k)\,, \quad Y_S^{\varepsilon,k} = \varepsilon(Y_S+k)\,, \quad \Gamma^{\varepsilon,k} = \partial Y_F^{\varepsilon,k}, \tag{2.17}$$

qui sont des translations et des images homothétiques de Y, Y_S, Y_F et de l'interface fluide-structure. On introduit également l'espace d'indices

$$\mathbb{Z}_\varepsilon^N = \{k \in \mathbb{Z}^N \ : \ \overline{Y^{\varepsilon,k}} \subset \Omega\}, \tag{2.18}$$

et le domaine perforé :

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}_\varepsilon^N} \overline{Y_F^{\varepsilon,k}}, \quad \Gamma^\varepsilon = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}_\varepsilon^N} \Gamma^{\varepsilon,k}. \tag{2.19}$$

Les cellules $Y_S^{\varepsilon,k}$ sont constituées de matériau élastique et les $Y_F^{\varepsilon,k}$ sont remplies de gaz parfait vérifiant la loi $p_\varepsilon v_\varepsilon = n_\varepsilon RT$ où p_ε est la pression, v_ε le volume, T la température supposée constante, n_ε le nombre de moles et $R = KN_a$, avec K la constante de Boltzmann et N_a le nombre d'Avogadro. On suppose de plus que n_ε est proportionnelle au volume de l'inclusion non déformée c'est-à-dire ε^d. La pression p_ε qui règne dans une inclusion $Y_{k,f}^\varepsilon$ de Ω_ε est donc inversement proportionnelle au volume de cette inclusion. Le volume de cette bulle de gaz peut être exprimé en fonction du déplacement élastique $\boldsymbol{d}_\varepsilon$ et est égal à $\displaystyle\int_{Y_{k,f}^\varepsilon} \det \nabla(\mathcal{I} + \boldsymbol{d}_\varepsilon)$. Il y a donc une dépendance non linéaire entre la pression dans les « alvéoles » et le déplacement du milieu élastique. Nous avons, dans un premier temps, linéarisé ce terme. Ainsi les équations du problème couplé fluide-structure, après linéarisation de la loi des gaz parfaits, s'écrivent

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\operatorname{div}\ \boldsymbol{\sigma}_s(\boldsymbol{d}^\varepsilon) &=& \boldsymbol{f}_S, \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ \boldsymbol{\sigma}_s(\boldsymbol{d}^\varepsilon)\cdot\boldsymbol{n}_\varepsilon + \dfrac{A}{\varepsilon^d}\left(\displaystyle\int_{\Gamma^{\varepsilon,k}} \boldsymbol{d}^\varepsilon\cdot\boldsymbol{n}_\varepsilon\, d\gamma\right)\boldsymbol{n}_\varepsilon &=& 0, \quad \text{sur } \Gamma^{\varepsilon,k},\ \forall k\in\mathbb{Z}_\varepsilon^N, \\ \boldsymbol{\sigma}_s(\boldsymbol{d}^\varepsilon)\cdot\boldsymbol{n} &=& \boldsymbol{0}, \quad \text{sur } \Gamma_N, \\ \boldsymbol{d}^\varepsilon &=& \boldsymbol{0}, \quad \text{sur } \Gamma_D, \end{array}\right. \tag{2.20}$$

où A est une constante et $\boldsymbol{\sigma}_s$ désigne le tenseur de l'élasticité linéarisée. On remarque que pour $A = 0$ on est ramené au cas d'un matériau perforé avec des conditions de Neumann au bord du trou. On voit ici apparaître le flux du déplacement à l'interface qui mesure les variations de volume au premier ordre de la cavité fluide. On retrouve ainsi le même type de conditions aux limites non locales qu'à la section précédente. Le même type de termes apparaissent dans [AC96] où l'homogénéisation et les vibrations de tubes rigides dans un fluide potentiel sont étudiées.

La question est maintenant quel modèle obtient-on quand ε tend vers zéro ? On va supposer que

$$\boldsymbol{d}^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{d}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}/\varepsilon) + \varepsilon\boldsymbol{d}^1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}/\varepsilon) + \varepsilon^2\boldsymbol{d}^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}/\varepsilon) + \ldots, \tag{2.21}$$

où $\boldsymbol{d}^k$ est périodique de période 1 par rapport à sa deuxième variable notée $\boldsymbol{y}$ (la variable rapide).

Le but est donc de déterminer le problème vérifié par $\boldsymbol{d}^0$. Dans un premier temps nous avons procédé de manière formelle par un développement asymptotique qui consiste à identifier les puissances de ε. Ce passage formel est ensuite justifié rigoureusement par passage à la limite deux échelles [Ngu89], [All92].

Remarque 27 *La convergence double échelles peut être décrite, très schématiquement, comme une convergence faible avec des fonctions tests « double échelles ». C'est-à-dire des fonctions $\phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}/\varepsilon)$ périodiques, de période 1, par rapport à la deuxième variable.*

Un des points délicats est d'écrire le terme de flux du déplacement à l'interface

$$\frac{A}{\varepsilon^d}\int_{\Gamma^{\varepsilon,k}} \boldsymbol{d}^\varepsilon \cdot \boldsymbol{n}^\varepsilon d\gamma = -\frac{A}{\varepsilon^d}\int_{Y_F^{\varepsilon,k}} \text{div }(\boldsymbol{d}^\varepsilon) d\boldsymbol{x}$$

en puissance de ε (ou de déterminer sa limite deux échelles). En effet, ce terme couple l'échelle lente et l'échelle rapide. Il s'agit donc de trouver le développement asymptotique (ou la limite deux échelles) de la projection L^2, sur les fonctions constantes par cellule, de $\text{div}(\boldsymbol{d}^\varepsilon)\chi_F^\varepsilon$, où χ_F^ε désigne la fonction indicatrice du domaine fluide.
Le système limite obtenu pour $\boldsymbol{d}^0$, qui ne dépend que de la variable lente $\boldsymbol{x}$, est alors :

$$-\text{div}_x\left(\boldsymbol{\sigma}^0_{sx}(\boldsymbol{d}^0) + \frac{1}{|Y_S|}\int_{Y_S}\boldsymbol{\sigma}^1_{sy}(\boldsymbol{d}^1)dy\right) = \boldsymbol{f}_S. \tag{2.22}$$

avec $\boldsymbol{\sigma}^0_s$ and $\boldsymbol{\sigma}^1_s$ définis par

$$\boldsymbol{\sigma}^0_s(\cdot) = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot) + \lambda_0 \text{div }(\cdot)I, \text{ avec } \lambda_0 = \lambda + A\frac{|Y_F|^2}{|Y_S|}, \tag{2.23}$$

et

$$\boldsymbol{\sigma}^1_s(\cdot) = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot) + \lambda_1 \text{div }(\cdot)I, \text{ avec } \lambda_1 = \lambda - A|Y_F|. \tag{2.24}$$

Ici les indices x (variable lente) ou y (variable rapide) précisent par rapport à quelle variable se font les dérivations. De plus, $\boldsymbol{d}^1$ satisfait au problème de cellule :

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\text{div}_y(\boldsymbol{\sigma}_{sy}(\boldsymbol{d}^1)) &=& 0, & \text{dans } Y_S, \\ \boldsymbol{\sigma}_{sy}(\boldsymbol{d}^1)\cdot\boldsymbol{n} + A\left(\displaystyle\int_\Gamma \boldsymbol{d}^1\cdot\boldsymbol{n}\right)\boldsymbol{n} &=& -\boldsymbol{\sigma}_{sx}(\boldsymbol{d}^0)\cdot\boldsymbol{n} + A(|Y_F|\text{div}_x\boldsymbol{d}^0)\boldsymbol{n}, & \text{sur } \Gamma, \\ \boldsymbol{d}^1 \ Y\text{-périodique.} & & & \end{array}\right.$$

Le problème de cellule obtenu fait toujours intervenir la condition aux limites non standard où le flux du déplacement à l'interface apparaît. D'autre part si $A = 0$ on retrouve le modèle homogénéisé pour un matériau linéaire élastique perforé. La présence de gaz dans les inclusions modifie ici en particulier le comportement à la compression du matériau (i.e. λ).

Nous avons également étudié le cas d'un matériau incompressible qui correspond à prendre la limite quand λ tend vers l'infini. Dans le cas des tissus pulmonaires, cette hypothèse d'incompressibilité est, en première approximation, justifiée puisqu'ils sont majoritairement constitués de fibres de collagène et de vaisseaux sanguins. Le système à ε fixé s'écrit

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\text{div}(\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{d}^\varepsilon, q^\varepsilon)) &=& \boldsymbol{f}_S, \quad \text{in } \Omega^\varepsilon, & \\ \text{div}\boldsymbol{d}^\varepsilon &=& 0, \quad \text{dans } \Omega^\varepsilon, & \\ \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{d}^\varepsilon, q^\varepsilon)\cdot\boldsymbol{n}^\varepsilon + \dfrac{A}{\varepsilon^d}\left(\displaystyle\int_{Y^{\varepsilon,k}} \boldsymbol{d}^\varepsilon\cdot\boldsymbol{n}^\varepsilon\, d\gamma\right)\boldsymbol{n}^\varepsilon &=& 0, \quad \text{sur } \Gamma^{\varepsilon,k},\ \forall k\in\mathbb{Z}^N_\varepsilon, & \\ \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{d}^\varepsilon, q^\varepsilon)\cdot\boldsymbol{n} &=& 0, \quad \text{sur } \Gamma_N, & \\ \boldsymbol{d}^\varepsilon &=& 0, \quad \text{sur } \Gamma_D, & \end{array}\right. \tag{2.25}$$

où q^ε est la pression associée à la structure.
Le système homogénéisé vérifié par $\boldsymbol{d}^0$ qui ne dépend que de la variable lente $\boldsymbol{x}$ est

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}_x(2\mu\boldsymbol{\varepsilon}_x(\boldsymbol{d}^0)) &= \frac{1}{|Y_S|}\int_{Y_S} f_S + \mathrm{div}_x\left(\frac{1}{|Y_S|}\int_{Y_S}\boldsymbol{\sigma}_{sy}(\boldsymbol{d}^1, q^0)\right) \\ &\quad + A\frac{|Y||Y_F|}{|Y_S|}\nabla_x \mathrm{div}_x d^0, \end{aligned} \tag{2.26}$$

et $\boldsymbol{d}^1$ satisfait au problème de cellule suivant

$$\begin{cases} -\mathrm{div}_y\boldsymbol{\sigma}_{sy}(\boldsymbol{d}^1, q^0) = 0, & \text{dans } Y_S, \\ \mathrm{div}_y\boldsymbol{d}^1 = -\mathrm{div}_x\boldsymbol{d}^0, & \text{dans } Y_S, \\ \boldsymbol{\sigma}_{sy}(\boldsymbol{d}^1, q^0)\cdot\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{\sigma}_{sx}(\boldsymbol{d}^0, 0)\cdot\boldsymbol{n} + A(|Y|\mathrm{div}_x\boldsymbol{d}^0)\boldsymbol{n}, & \text{sur } \Gamma, \\ q^0, \boldsymbol{d}^1 \ Y\text{-périodiques.} \end{cases}$$

Remarque 28 *Il est à noter que les limites quand ε tend vers zéro et quand λ tend vers l'infini sont commutatives.*

Remarque 29 *Lorsque $A = 0$ nous retrouvons le modèle homogénéisé périodique pour les équations de Stokes en domaine perforé obtenu dans [Con85].*

Le modèle limite que l'on obtient est compressible. Le problème de cellule ne fait plus intervenir le terme de flux du déplacement à l'interface et les conditions aux limites sur Γ sont des conditions de Neumann. Cela vient du fait que le matériau initial est incompressible et donc les variations de pression se transmettent instantanément à tout le milieu. Comme précédemment la présence du gaz modifie, entre autre, la réaction à la compression du milieu. Pour l'illustrer nous avons effectué des simulations numériques bidimensionnelles sur le deuxième modèle. Nous avons en particulier comparé les valeurs du tenseur des contraintes limite pour différentes valeurs de A et différentes valeurs de la constante de Lamé μ. Nous avons ainsi montré que la prise en compte de fluide, à la pression atmosphérique, dans les alvéoles influençait le comportement du matériau limite dans le cas de paramètres correspondant à des matériaux vivants. Par contre pour des matériaux « classiques » les différences entre le cas $A = 0$ et A non nul sont assez peu perceptibles.

2.2.3 Conclusions

Nous avons donc obtenu deux modèles homogénéisés, l'un unidimensionnel prenant en compte les connections entre les alvéoles, l'autre se rapprochant plus d'un modèle de mousse où les alvéoles sont isolées les unes des autres. Un des prolongement est donc d'obtenir un modèle viscoélastique tridimensionnel où l'on prend en compte l'arbre bronchique et de comprendre l'influence de l'arbre sur le comportement du matériau (comportement en temps long, contrôlabilité...). C'est sur l'obtention de modèles homogénéisés tridimensionnels par passage à la limite double échelle que nous travaillons actuellement avec P. Cazeaux (futur doctorant Paris 6 -REO) et Y. Maday. Ces modèles viscoélastiques font intervenir des opérateurs à noyaux non locaux dont les vecteurs propres sont très différents des

modes propres élastiques, rendant l'analyse difficile. Un des buts est ensuite d'étudier la propagation acoustique dans ce milieu (l'écoute du poumon est un des premiers moyens de diagnostic des médecins dans les pathologies pulmonaires). Dans ce cadre, une collaboration avec J. Hesthaven de Brown University est envisagée.

2.3 Interaction air-particules – *Ref : [1], [30]*

La motivation de ces recherches est de mieux comprendre comment se passe le dépôt de particules dans l'arbre bronchique, afin d'optimiser les caractéristiques des aérosols thérapeutiques et les protocoles d'injection. Dans le cadre de la thèse d'A. Moussa (ENS Cachan), que j'encadre informellement et partiellement avec L. Boudin (avec L. Desvillettes et M. Filoche comme directeurs effectifs), nous avons étudié les aspects mathématiques et numériques de modèles 3D fluides-cinétiques d'aérosols respiratoires. Dans [1], en collaboration avec L. Boudin, L. Desvillettes et A. Moussa nous avons montré l'existence de solutions faibles pour un problème couplé Vlasov/Navier-Stokes. Le couplage se fait par la force de traînée appliquée par le fluide sur les particules et l'on suppose que l'écoulement fluide est modifié par la présence des particules. La démonstration repose sur la construction de solutions approchées où l'on découple le problème fluide de l'équation de Vlasov. Une attention particulière doit être alors portée aux grandes vitesses des particules. La même stratégie est employée numériquement. D'autre part, en collaboration avec L. Boudin, A. Devys (doctorante Lille I), B. Grec (doctorante INSA Lyon) et D. Yakoubi (postdoc REO) une étude numérique préliminaire (utilisant Freefem++) du modèle bidimensionnel, afin de comprendre l'influence des particules sur le fluide, celle des paramètres géométriques et d'étudier le dépôt des particules dans diverses géométries d'arbres, a été réalisée (voir [30]).

2.3.1 Modélisation

Nous considérons toujours que le fluide porteur satisfait aux équations de Navier-Stokes incompressible. Nous modélisons le transport des particules à l'aide d'une description cinétique. On considère que l'aérosol est décrit par une densité de probabilité $f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, r, \dots)$ d'être, à l'instant t, à la position $\boldsymbol{x}$, à la vitesse $\boldsymbol{v}$ et d'avoir une taille caractéristique r (rayon en considérant que les particules sont sphériques). Cette fonction vérifie alors une équation du type

$$\partial_t f + \nabla_x \cdot (f\boldsymbol{v}) + \nabla_v \cdot (f\boldsymbol{a}) + \partial_r(f\Phi) = Q(f, f),$$

avec

- $\boldsymbol{a}$ l'accélération des particules qui peut dépendre du fluide porteur ;
- $Q(f, f)(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, r)$ l'opérateur de collision binaire entre particules ;
- $\alpha(t, \boldsymbol{x}) = 1 - \displaystyle\int_{\boldsymbol{v},r} \frac{m(r)}{\varrho_{\mathrm{p}}}\, f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, r)\, d\boldsymbol{v}\, dr$, la fraction volumique du fluide (qui est proche de 1), avec ϱ_{p} la densité des particules et $m(r)$ la masse de particules de rayon r ;

– $\boldsymbol{F}_p(t,\boldsymbol{x}) = -\displaystyle\int_{\boldsymbol{v},r} m(r)\ \boldsymbol{a}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},r)\ f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},r)\ d\boldsymbol{v}\ dr$, la force de rétroaction de l'aérosol sur le fluide porteur.

En fonction des différentes quantités on peut classer les types de sprays :

spray	$Q(f,f)$ (collisions)	α	rétroaction : $\boldsymbol{f}_p$
très fin	0	1	nulle
fin	0	1	non nulle
moyennement épais	0	$\alpha \neq 1$	non nulle
épais	$Q(f,f)$	$\alpha \neq 1$	non nulle

En ce qui concerne la modélisation des sprays thérapeutiques dans le poumon, on peut considérer que le spray est fin voir très fin [GCC02]. On néglige donc les collisions entre particules et on suppose que la fraction volumique du fluide est égale à 1. La question de savoir si les particules ont une action sur le fluide porteur n'est pas tranchée et dépend vraisemblablement du régime dans lequel on se place (respiration normale, respiration forcée) et des paramètres du modèle (densité de l'aérosol, vitesses initiales des particules de l'aérosol...). L'accélération a que l'on considérera est donnée par

$$\boldsymbol{a}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},r) = \frac{6\pi\nu r}{m(r)}(\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x}) - v).$$

Dans notre étude théorique, on fait de plus l'hypothèse que le l'aérosol est monodispersé et donc qu'il n'y a pas de dépendance par rapport au rayon. Enfin, le fluide agit sur le spray par l'intermédiaire d'une force de traînée. Ainsi le système couplé s'écrit, en prenant tous les coefficients égaux à 1 :

$$\partial_t f + \boldsymbol{v}\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}} f + \nabla_{\boldsymbol{v}}\cdot[(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})f] = 0 \qquad \text{dans } \Omega\times\mathbb{R}^3, \tag{2.27}$$

$$\partial_t \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{u} + \nabla_{\boldsymbol{x}} p - \Delta_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{u} = -\int_{\mathbb{R}^3} f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})(\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})-\boldsymbol{v})\ d\boldsymbol{v} + \boldsymbol{f}_{ext} \qquad \text{dans } \Omega, \tag{2.28}$$

$$\nabla_{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{u} = 0 \qquad \text{dans } \Omega. \tag{2.29}$$

Concernant les conditions aux limites, on suppose que les particules ne rebondissent pas sur les parois et ne créent pas de gouttelettes secondaires. Cette hypothèse semble vérifiée dans le cas de la modélisation de la ventilation car les parois bronchiques sont recouvertes de mucus (voir [BW08]). Par conséquent

$$f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) = 0 \text{ pour } \boldsymbol{x}\in\partial\Omega \text{ et } \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} < 0. \tag{2.30}$$

On fera de plus l'hypothèse que le fluide colle à la paroi,

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

Remarque 30 *Ces conditions aux limites ne sont pas réalistes si on considère un domaine de calcul où il existe des parties de la frontière par lesquelles le fluide et les particules peuvent entrer et sortir.*

Ce système couplé vérifie formellement une égalité d'énergie. En effet, en multipliant les équations de Navier-Stokes (2.28) par la vitesse $\boldsymbol{u}$ du fluide et l'équation de Vlasov (2.27) par $|\boldsymbol{v}|^2$ et en intégrant respectivement sur Ω et sur $\Omega \times \mathbb{R}^3$, obtient après intégration par parties :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{u}\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\int_{\Omega\times\mathbb{R}^3} f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})|\boldsymbol{v}|^2 + \|\nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{u}\|^2_{L^2(\Omega)} + \int\int_{\Omega\times\mathbb{R}^3} f(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})^2 = \int_\Omega \boldsymbol{f}_{ext}\cdot\boldsymbol{u}. \quad (2.31)$$

Dans ce bilan d'énergie, on voit apparaître les dérivées en temps des énergies cinétiques du fluide et des particules (qui correspond au moment d'ordre deux de f). De plus, le système dissipe de l'énergie, d'une part car le fluide est visqueux, d'autre part à cause de la force de traînée exercée par le fluide sur les particules et de la force de rétroaction exercée par les particules sur le fluide. Cette égalité d'énergie implique que les solutions de ce système vérifient des estimations d'énergie et que, dans le cas où il n'y a pas de force extérieure, l'énergie décroît.

2.3.2 Analyse mathématique *–Ref : [1]*

Nous allons maintenant nous intéresser à l'existence de solutions faibles de ce type de système couplé.

Le même type de modèle a été étudié dans [Ham98] où l'auteur considère en toutes dimensions l'équation de Vlasov, avec des conditions de rebond à la paroi, couplée aux équations de Stokes instationnaires. Les différences principales entre [1] et [Ham98] sont

- on ne néglige pas le terme de convection et considère les équations de Navier-Stokes ;
- on montre l'existence de solutions faibles (i.e. dans les espaces d'énergie) mais la preuve est limitée à $d \leq 3$;
- notre démarche est constructive et ne repose pas sur un argument de point fixe : nous construisons une suite de solutions approchées qui converge vers la solution du problème de départ.

La limite hydrodynamique du système Vlasov-Navier-Stokes dans des régimes particuliers a été étudiée dans [GJV04a], [GJV04b]. Dans [MV07a], Mellet et Vasseur ont démontré l'existence de solutions faibles pour l'interaction Vlasov-Fokker-Planck/Navier-Stokes-compressible pour des conditions d'absorption et de réflexion à la paroi et dans [MV07b] ils ont étudié les régimes asymptotiques de ce système couplé. D'autres résultats d'existence concernent des fluides modélisés soit par les équations d'Euler [BD06], soit par l'équation de Burgers [DR99], [Gou01].

Ici nous considérons le cas périodique et travaillons dans le tore $\Omega = \mathbb{T}^3$. Le système est donc

$$\partial_t f + \boldsymbol{v}\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}} f + \nabla_{\boldsymbol{v}}\cdot[(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})f] = 0 \qquad \text{dans } \mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3, \quad (2.32)$$

$$\partial_t \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{u} + \nabla_{\boldsymbol{x}} p - \Delta_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{u} = -\int_{\mathbb{R}^3} f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})(\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})-\boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{v} + \boldsymbol{f}_{ext} \qquad \text{dans } \mathbb{T}^3, \quad (2.33)$$

$$\nabla_{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{u} = 0 \qquad \text{dans } \mathbb{T}^3. \quad (2.34)$$

Les conditions aux limites à la paroi sont des conditions de périodicité. La solution de ce système vérifie au moins formellement (2.31). On considère H l'espace des fonctions périodiques de carré intégrable à divergence nulle et V le sous espace de H des fonctions H^1.

Théorème 8 *Soit $T > 0$. On suppose que les conditions initiales et la force extérieure vérifient*

$$f_0 \in L^\infty(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3),\ \int_{\mathbb{R}^3}|\boldsymbol{v}|^2 f_0 d\boldsymbol{v} \in L^\infty((0,T)\times\mathbb{T}^3),\ \boldsymbol{u}_0 \in L^2(\mathbb{T}^3),\ \boldsymbol{f}_{ext} \in L^2(0,T;L^2(\mathbb{T}^3)). \quad (2.35)$$

alors il existe au moins une solution faible du système $(f, \boldsymbol{u})$ *sur (0, T) telle que* $\boldsymbol{u} \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V) \cap \mathcal{C}^0([0,T];V')$, $f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) \geq 0$, *pour tout* $(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) \in (0,T)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3$, $f \in L^\infty(0,T;L^\infty(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3) \cap L^1(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3))$ *et* $f|\boldsymbol{v}|^2 \in L^\infty(0,T;L^1(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3))$. *De plus, cette solution vérifie une inégalité d'énergie et la borne* L^∞ *:*

$$\|f\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)} \leq e^{3T}\|f_0\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)}.$$

La démonstration de ce résultat est basée sur la construction d'une suite de solutions approchées que l'on obtient par régularisation de la vitesse de convection, de la vitesse du fluide apparaissant dans la force de traînée et par troncature des grandes vitesses des particules dans la force de rétroaction exercée par les particules sur le fluide. Une des difficultés vient du fait que la solution de ce système approché ne vérifie plus d'égalité d'énergie. On montre dans un premier temps, grâce à un contrôle suffisant des moments de f et en se restreignant à $d \leq 3$ que les solutions vérifient, par application d'un lemme de Gronwall surlinéaire, une estimation en temps petit. Les termes provenant de la convection ne posent par de problème grâce aux conditions aux limites périodiques. Pour montrer que la solution limite vérifie en fait une inégalité d'énergie sur $(0,T)$ il s'agit ensuite d'estimer les résidus provenant des régularisations dans le bilan d'énergie et de montrer qu'ils tendent vers zéro. La compacité nécessaire pour passer à la limite dans les termes non linéaires (terme de convection, force de traînée...) est obtenue grâce à des bornes sur $\partial_t \boldsymbol{u}$.

L'existence de solutions du système approché est, quant à elle, obtenue en considérant un problème linéarisé approché où l'on découple les équations de Navier-Stokes et l'équation de Vlasov. La régularisation de la vitesse du fluide dans la force de traînée permet également de définir la solution de l'équation de Vlasov grâce à la méthode des caractéristiques. On montre alors que la suite de solutions ainsi définie est de Cauchy. C'est à cette étape que l'on utilise le fait que l'on a tronqué les grandes vitesses des particules dans la force de rétroaction, afin de contrôler la force appliquée par l'aérosol sur le fluide. Enfin, la régularisation de la vitesse de convection permet d'obtenir des bornes *a priori* sur les termes faisant intervenir les termes convectifs.

Remarque 31 *Le schéma de discrétisation implémenté dans LifeV pour résoudre numériquement ce problème repose sur la même stratégie : c'est-à-dire le couplage explicite Navier-Stokes-équation de Vlasov.*

2.3.3 Résultats numériques *−Ref : [30]*

Ces travaux ont fait l'objet du post-doc de L. Weymans (univ. de Bordeaux) et d'un projet de recherche au CEMRACS 2008. Il font suite à l'étude de modélisation effectuée par L. Boudin et L. Weynans [BW08].

En collaboration avec L. Boudin, A. Devys, B. Grec et D. Yakoubi nous avons implémenté dans Freefem++ un schéma explicite basé sur la méthode des caractéristiques pour l'équation de Vlasov et sur une discrétisation éléments finis pour les équations de Navier-Stokes.

Le but de ce travail est d'étudier numériquement le dépôt de particules dans une structure de type arbre de déterminer dans quels cas il est nécessaire de prendre en compte la force de rétroaction des particules sur le fluide. Il s'agit d'une étude préliminaire et une exploitation des résultats est nécessaire.

La configuration typique dans laquelle on se place est la suivante :

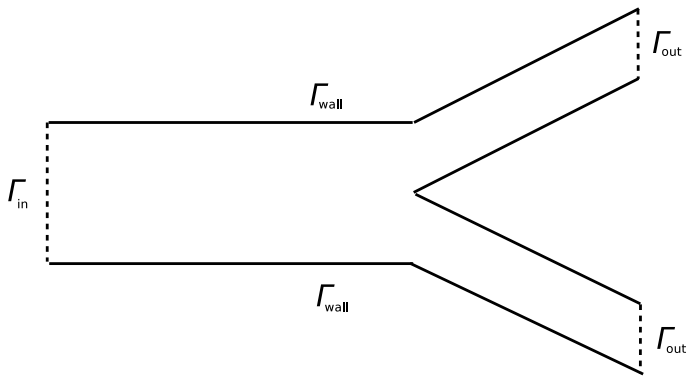


FIG. 2.11 – Géométrie.

Sur la frontière latérale Γ_l, on suppose qu'il y a adhérence du fluide porteur ($\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$) et que si les particules touchent ce bord elles y restent collées. De plus, on se donne un profil d'entrée sur Γ_{in} pour le fluide ($\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_{in}$) et des conditions de sorties libres sur les sorties Γ_{out} ($\nu \dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{n}} - p\boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}$).

Méthode numérique

Les particules sont décrites par leur position $\boldsymbol{x}$, leur vitesse $\boldsymbol{v}$ et leur rayon r (7 degrés de liberté en dimension trois) et leur densité de probabilité $f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, r)$ à l'instant t vérifie une équation de Vlasov où interviennent la force de traînée exercée par le fluide sans terme de diffusion ou de convection en rayon (le rayon n'est donc ici qu'un paramètre du problème que l'on fera varier). L'équation de Vlasov est discrétisée en utilisant une méthode particulaire et son évolution est alors décrite à l'aide de caractéristiques. Ainsi

$$f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, r) = \sum_{p=1}^{N} \omega_p(t) \delta_{\boldsymbol{x}_p}(\boldsymbol{x}) \delta_{\boldsymbol{v}_p}(\boldsymbol{v}) \delta_{r_p}(r),$$

où N est le nombre de particules numériques qui est en général bien inférieur au nombre de particules physiques N_p. Une particule numérique p donne un comportement moyen d'un ensemble de particules auquel est associé le poids ω_p (qui est approximativement égal à N_p/N).

L'avancement en temps utilise la méthode des caractéristiques :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\boldsymbol{x}_p = \boldsymbol{v}_p, \\ \dfrac{d}{dt}\boldsymbol{v}_p = \boldsymbol{a}, \\ \dfrac{d}{dt} r_p = 0. \end{cases}$$

En ce qui concerne le fluide porteur les vitesses et les pressions sont calculées, si on considère une discrétisation P_1 stabilisée, aux nœuds du maillage. Nous sommes ainsi en présence de deux descriptions différentes. Il s'agit alors de localiser les particules dans le maillage (qui est mobile car

on considère que le domaine fluide bouge en temps), d'interpoler la vitesse fluide en ces points pour calculer la force de traînée, de redistribuer aux nœuds la force appliquée par les particules sur le fluide et de détecter lorsqu'elles sortent du maillage (ce qui correspond soit à leur dépôt soit à leur sortie du domaine de calcul).

Remarque 32 *Un travail similaire a été effectué dans LifeV en collaboration avec L. Boudin et A. Moussa où l'on travaille en plus sur une géométrie variable en temps et donc avec une formulation ALE du fluide porteur.*

Validation du modèle

Nous avons effectué une étude très préliminaire du dépôt en fonction du nombre de Stokes

$$St = \frac{4\rho_p r^2 |\boldsymbol{v}|}{9\nu D},$$

où D est le diamètre local de l'arbre. Les figures suivantes illustrent les différentes zones de dépôt en fonction de deux nombres de Stokes différents :

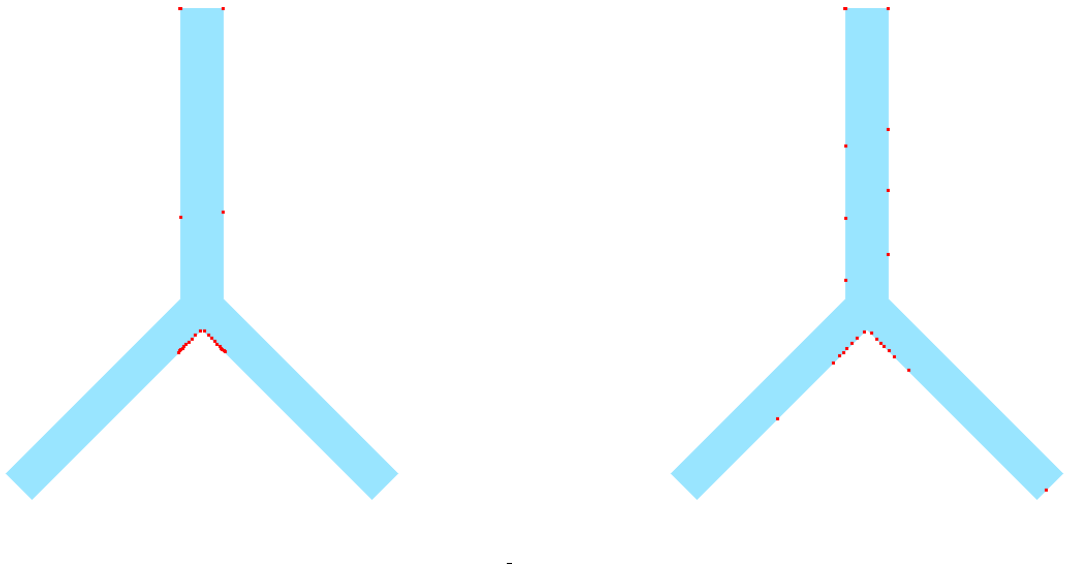


FIG. 2.12 – Dépôt d'aérosol (a) $St = 26.2$, et (b) $St = 9.42$

On note que la zone de dépôt privilégiée est la bifurcation. Le graphique suivant donne le nombre de particules sortant du domaine de calcul en fonction du nombre de Stokes. On retrouve ici les résultats expérimentaux de [APC84] qui montre l'existence d'un nombre de Stokes optimal si l'on souhaite minimiser le dépôt. Nos résultats demandent à être exploités et complétés.

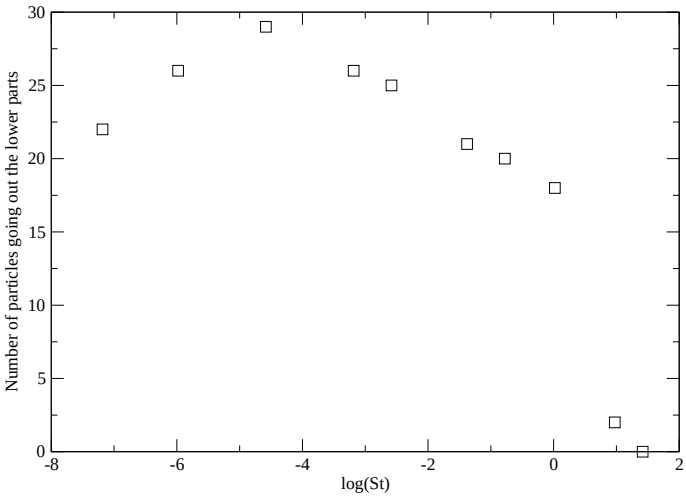


FIG. 2.13 – Nombre de particules sortantes en fonction de $\log_{10}(St)$.

Influence de la force de rétroaction

Dans [30], nous avons effectué une étude préliminaire de l'influence de la force de rétroaction des particules sur le fluide. On a choisi deux tailles de particules différentes $r = 100\mu m$ et $r = 1\mu m$. Dans chaque cas-test on injecte le même nombre de particules numériques mais avec différents poids numériques ($\omega_p = 10^4$ et $\omega_p = 10^2$). La conclusion de cette étude est que la force de rétroaction a une influence sur le fluide et plus particulièrement sa pression pour les grosses particules avec un poids numérique élevé. Il serait maintenant intéressant de savoir à partir de quels rayons et nombre de particules physiques il est nécessaire de tenir compte de cette rétroaction de façon à déterminer si les aérosols thérapeutiques sont des spray fins ou très fins. De plus, les simulations effectuées sont bidimensionnelles et ne permettent pas de capturer tous les effets souhaités (on peut choisir de conserver certaines quantités représentatives de l'écoulement en dimension 2, comme le nombre de Reynolds, la résistance de l'arbre mais il est impossible de les conserver toutes).

2.3.4 Conclusions

Sur ces modèles, plusieurs questions restent ouvertes : dans le cas où la frontière du domaine solide se déplace, le système est-il bien posé ? Le schéma implémenté est-il stable en particulier pour les grandes vitesses ? À partir de quelles taille, vitesse, densité des particules peut-on considérer que celles-ci n'ont plus d'influence sur le fluide porteur ? Outre ces questions de modélisation mathématique et de stratégies numériques, reste également la question de l'exploitation physiologique de ces modèles : on cherche à savoir en fonction des caractéristiques du spray (rayon des particules, densité, protocoles d'injection), quelles sont les zones de dépôt. Cette question fait l'objet d'une collaboration avec l'INSERM Tours et plus particulièrement L. Vecellio. D'autre part, la partie distale de l'arbre n'est pas prise en compte pour l'instant. Nous envisageons donc de coupler ces modèles avec l'approche multiéchelles précédente et de développer des modèles de dépôt d'aérosols dans les petites voies aériennes. Les phénomènes physiques ne sont alors plus les mêmes et le dépôt se fait ici par diffusion.

Bibliographie

[AC96] G. Allaire and C. Conca. Bloch-wave homogenization for a spectral problem in fluid-solid structures. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 135(3) :197–257, 1996.

[ACF08] M. Astorino, F. Chouly, and M. Fernandez. An added-mass free semi-implicit coupling scheme for fluid-structure interaction. C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I , 2008.

[All87] G. Allain. Small-time existence for the navier-stokes equations with a free surface. *Appl. Math. Optim.*, 16(1) :37–50, 1987.

[All92] G. Allaire. Homogenization and two-scale convergence. *SIAM J. Math. Anal.*, 23(6) :1482–1518, 1992.

[APC84] J.E. Agnew, D. Pavia, and S.W. Clarke. Aerosol particle impaction in the conducting airways. *Phys. Med. Biol.*, 29 :767–777, 1984.

[AST06a] Y. Achdou, C. Sabot, and N. Tchou. Diffusion and propagation problems in some ramified domains with a fractal boundary. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 40(4) :623–652, 2006.

[AST06b] Y. Achdou, C. Sabot, and N. Tchou. A multiscale numerical method for Poisson problems in some ramified domains with a fractal boundary. *Multiscale Model. Simul.*, 5(3) :828–860 (electronic), 2006.

[AST07] Y. Achdou, C. Sabot, and N. Tchou. Transparent boundary conditions for the Helmholtz equation in some ramified domains with a fractal boundary. *J. Comput. Phys.*, 220(2) :712–739, 2007.

[AT08] Y. Achdou and N. Tchou. Trace results on domains with self-similar fractal boundaries. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 89(6) :596–623, 2008.

[Baa01] F. Baaijens. A fictitious domain/mortar element method for fluid-structure interaction. *Int. Jour. Num. Meth. Fluids*, 35 :743–761, 2001.

[BB99] F. Ben Belgacem. The mortar finite element method with Lagrange multipliers. *Numer. Math.*, 84(2) :173–197, 1999.

[BBM97] F. Ben Belgacem and Y. Maday. The mortar element method for three-dimensional finite elements. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 31(2) :289–302, 1997.

[BC07] S. Badia and R. Codina. Convergence analysis of the FEM approximation the first order Projection method for incompressible flows with and without the inf-sup condition. *Numer. Math.*, 107(4) :533–557, 2007.

[BD06] C. Baranger and L. Desvillettes. Coupling Euler and Vlasov equations in the context of sprays : the local-in-time, classical solutions. *J. Hyperbolic Differ. Equ.*, 3(1) :1–26, 2006.

[Bea81] J.T. Beale. The initial value problem for the Navier-Stokes equations with a free surface. *Comm. Pure Appl. Math.*, 34 :359–392, 1981.

[Bel96] J. A. Bello. L^r regularity for the Stokes and Navier-Stokes problems. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 170 :187–206, 1996.

[BG04] D. Boffi and L. Gastaldi. Stability and geometric conservation laws for ALE formulations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 193(42-44) :4717–4739, 2004.

[BMP93] C. Bernardi, Y. Maday, and A. T. Patera. Domain decomposition by the mortar element method. In *Asymptotic and numerical methods for partial differential equations with critical parameters (Beaune, 1992)*, volume 384 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*, pages 269–286. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1993.

[BMP94] C. Bernardi, Y. Maday, and A. T. Patera. A new nonconforming approach to domain decomposition : the mortar element method. In *Nonlinear partial differential equations and their applications. Collège de France Seminar, Vol. XI (Paris, 1989–1991)*, volume 299 of *Pitman Res. Notes Math. Ser.*, pages 13–51. Harlow, 1994.

[BNV08] S. Badia, F. Nobile, and C. Vergara. Fluid-structure partitioned procedures based on Robin transmission conditions. *J. Comput. Phys.*, 227(14) :7027–7051, 2008.

[Bou03] M. Boulakia. Existence of weak solutions for the motion of an elastic structure in an incompressible viscous fluid. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 336(12) :985–990, 2003.

[BQQ08] S. Badia, A. Quaini, and A. Quarteroni. Splitting methods based on algebraic factorization for fluid-structure interaction. *SIAM J. Scientific Computing*, 30(4) :1778–1805, 2008.

[BT06] A. Ben-Tal. Simplified models for gas exchange in the human lungs. *J. Theor. Biol.*, 238 :474–495, 2006.

[BW08] L. Boudin and L. Weynans. Spray impingement on a wall in the context of the upper airways. In *Mathematical and numerical modelling of the human lung*, volume 23 of *ESAIM Proc.*, pages 1–9 (electronic). EDP Sci., Les Ulis, 2008.

[CB03] D. Chapelle and K.J. Bathe. *The Finite Element Analysis of Shells - Fundamentals*. Springer Verlag, 2003.

[CFD+06] C. Croce, R. Fodil, M. Durand, G. Sbirlea-Apiou, G. Caillibotte, J.-F. Papon, J.-R. Blondeau, A. Coste, D. Isabey, and B. Louis. In vitro experiments and numerical simulations of airflow in realistic nasal airway geometry. *Annals of biomedical engineering*, 34 :997–1007, 2006.

[CGN05] P. Causin, J.-F. Gerbeau, and F. Nobile. Added-mass effect in the design of partitioned algorithms for fluid-structure problems. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 194(42–44) :4506–4527, 2005.

[Cho68] A.J. Chorin. Numerical solution of the Navier-Stokes equations. *Math. Comp.*, 22 :745–762, 1968.

[Cho69] A.J. Chorin. On the convergence of discrete approximations to the Navier-Stokes equations. *Math. Comp.*, 23 :341–353, 1969.

[Cia88] P.G. Ciarlet. *Mathematical elasticity. Volume I.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1988. Three-dimensional elasticity.

[Con85] C. Conca. On the application of the homogenization theory to a class of problems arising in fluid mechanics. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 64(1) :31–75, 1985.

[CS05] D. Coutand and S. Shkoller. Motion of an elastic solid inside an incompressible viscous fluid. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 176(1) :25–102, 2005.

[CS06] D. Coutand and S. Shkoller. The interaction between quasilinear elastodynamics and the Navier-Stokes equations. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 179(3) :303–352, 2006.

[CSMT00] C. Conca, J. San Martín, and M. Tucsnak. Existence of solutions for the equations modelling the motion of a rigid body in a viscous fluid. *Comm. Partial Differential Equations*, 25(5-6) :1019–1042, 2000.

[DBVD+08] J.W. De Backer, W.G. Vos, A. Devolder, S.L. Verhulst, F.L. Germonpre, P. Wuyts, P.M. Parizel, and W. De Backer. Computational fluid dynamics can detect changes in airway resistance in asthmatics after acute bronchodilation. *Journal of Biomechanics*, 41 :106–113, 2008.

[DDFQ05] S. Deparis, M. Discacciati, G. Fourestey, and A. Quarteroni. Heterogeneous domain decomposition methods for fluid-structure interaction problems. Technical report, EPFL-IACS report 08.2005, 2005.

[DDQ04] S. Deparis, M. Discacciati, and A. Quarteroni. A domain decomposition framework for fluid-structure interaction problems. In *Proceedings of the Third International Conference on Computational Fluid Dynamics (ICCFD3)*, 2004.

[DE99] B. Desjardins and M. J. Esteban. Existence of weak solutions for the motion of rigid bodies in a viscous fluid. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 146(1) :59–71, 1999.

[DE00] B. Desjardins and M. J. Esteban. On weak solutions for fluid-rigid structure interaction : compressible and incompressible models. *Comm. Partial Differential Equations*, 25(7-8) :1399–1413, 2000.

[DFF03] S. Deparis, M.A. Fernández, and L. Formaggia. Acceleration of a fixed point algorithm for fluid-structure interaction using transpiration conditions. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 37(4) :601–616, 2003.

[DGH82] J. Donea, S. Giuliani, and J.P. Halleux. An arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions. *Comp. Methods in App. Mech. and Eng.*, 33 :689–723, 1982.

[DGHL04] Q. Du, M. D. Gunzburger, L. S. Hou, and J. Lee. Semidiscrete finite element approximations of a linear fluid-structure interaction problem. *SIAM J. Numer. Anal.*, 42(1) :1–29 (electronic), 2004.

[DHPSB03] J. De Hart, G.W.M. Peters, P.J.G. Schreurs, and F.P.T. Baaijens. A three-dimensional computational analysis of fluid-structure interaction in the aortic valve. *Journal of Biomechanics*, 36 :103–112, 2003.

[DR99] K. Domelevo and J.-M. Roquejoffre. Existence and stability of travelling wave solutions in a kinetic model of two-phase flows. *Commun. Partial Differ. Equations*, 24(1-2) :61–108, 1999.

[dRMiF+06] L. de Rochefort, X. Maˆ itre, R. Fodil, L. Vial, B. Louis, D. Isabey, C. Croce, L. Darrasse, G. . Sbirl a Apiou, G. Caillibotte, J. Bittoun, and E. Durand. Phase contrast velocimetry with hyperpolarized helium-3 for in vitro and in vivo characterization of airflow. *Magn Reson Med*, 55 :1318–1325, 2006.

[dRVF+07] L. de Rochefort, L. Vial, R. Fodil, X. Matre, B. Louis, G. Isabey, D.and Caillibotte, M. Thiriet, J. Bittoun, E. Durand, and G. Sbirlea-Apiou. In vitro validation of computational fluid dynamic simulation in human proximal airways with hyperpolarized ^{3}he magnetic resonance phase-contrast velocimetry. *J. Appl Physiol*, 102 :2012–2023, 2007.

[dV04] H. B. da Veiga. On the existence of strong solutions to a coupled fluid-structure evolution problem. *J. Math. Fluid Mech.*, 6(1) :21–52, 2004.

[Edw95] R. E. Edwards. *Functional analysis*. Dover Publications Inc., New York, 1995. Theory and applications, Corrected reprint of the 1965 original.

[EG04] A. Ern and J.-L. Guermond. *Theory and practice of finite elements*, volume 159 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 2004.

[FDV76] B. Fraeijs De Veubeke. The dynamics of flexible bodies. *Int. J. Engng Sci.*, 14 :895–913, 1976.

[Fei03] E. Feireisl. On the motion of rigid bodies in a viscous compressible fluid. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 167(4) :281–308, 2003.

[FGNQ01] L. Formaggia, J.-F. Gerbeau, F. Nobile, and A. Quarteroni. On the coupling of 3D and 1D Navier-Stokes equations for flow problems in compliant vessels. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 191(6-7) :561–582, 2001.

[FGNQ02] L. Formaggia, J.-F. Gerbeau, F. Nobile, and A. Quarteroni. Numerical treatment of defective boundary conditions for the Navier-Stokes equations. *SIAM J. Numerical Analysis*, 40(1) :376–401, 2002.

[FLLT98] C. Farhat, M. Lesoinne, and P. Le Tallec. Load and motion transfer algorithms for fluid/structure interaction problems with non-matching discrete interfaces : Momentum and energy conservation, optimal discretization and application to aeroelasticity. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 157 :95–114, 1998.

[FM03a] M.A. Fernández and M. Moubachir. An exact block-Newton algorithm for solving fluid-structure interaction problems. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 336(8) :681–686, 2003.

[FM03b] M.A. Fernández and M. Moubachir. An exact Block-Newton algorithm for the solution of implicit time discretized coupled systems involved in fluid-structure interaction problems. In K.J. Bathe, editor, *Second M.I.T. Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics*, pages 1337–1341. Elsevier, 2003.

[FM04] M. A. Fernández and M. Moubachir. Numerical simulation of fluid-structure systems via Newton's method with exact Jacobians. In P Neittaanmäki, T. Rossi, K. Majava, and O. Pironneau, editors, 4^{th} *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*, volume 1, Jyväskylä, Finland, July 2004.

[FM05] M.A. Fernández and M. Moubachir. A Newton method using exact Jacobians for solving fluid-structure coupling. *Comp. & Struct.*, 83 :127–142, 2005.

[FMN07] L. Formaggia, A. Moura, and F. Nobile. On the stability of the coupling of 3D and 1D fluid-structure interaction models for blood flow simulations. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 41(4) :743–769, 2007.

[FMP+05] C. Fetita, S. Mancini, D. Perchet, F. Prêteux, M. Thiriet, and Vial L. An image based computational model of oscillatory flow in the proximal part of tracheobronchial trees. *Comput. Meth. Biomech. Biomed. Eng.*, 8, 2005.

[FN99] L. Formaggia and F. Nobile. A stability analysis for the arbitrary Lagrangian Eulerian formulation with finite elements. *East-West J. Numer. Math.*, 7(2) :105–131, 1999.

[FN04] L. Formaggia and F. Nobile. Stability analysis of second-order time accurate schemes for ALE-FEM. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 193(39-41) :4097–4116, 2004.

[FPL00] C. Farhat, K. Pierson, and M. Lesoinne. The second generation of FETI methods and their application to the parallel solution of large-scale linear and geometrically nonlinear structural analysis problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 184 :333–374, 2000.

[FVCJ+] A. Figueroa, I. Vignon-Clementel, K.E. Jansen, T.J.R. Hughes, and C.A. Taylor. A coupled momentum method for modeling blood flow in three-dimensional deformable arteries. To appear in *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*

[FvdZG06] C. Farhat, K. van der Zee, and Ph. Geuzaine. Provably second-order time-accurate loosely-coupled solution algorithms for transient nonlinear computational aeroelasticity. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 195(17-18) :1973–2001, 2006.

[FWR07] C. Frster, W. A. Wall, and E. Ramm. Artificial added mass instabilities in sequential staggered coupling of nonlinear structures and incompressible viscous flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, pages 1278–1293, 2007.

[GCC02] T. Gemci, T. E. Corcoran, and N. Chigier. A numerical and experimental study of spray dynamics in a simple throat model. *Aerosol Sci. Technol.*, 36 :18–38, 2002.

[GF00] H. Guillard and C. Farhat. On the significance of the geometric conservation law for flow computations on moving meshes. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 190(11-12) :1467–1482, 2000.

[GJV04a] T. Goudon, P.-E. Jabin, and A. Vasseur. Hydrodynamic limit for the Vlasov-Navier-Stokes equations. I. Light particles regime. *Indiana Univ. Math. J.*, 53(6) :1495–1515, 2004.

[GJV04b] T. Goudon, P.-E. Jabin, and A. Vasseur. Hydrodynamic limit for the Vlasov-Navier-Stokes equations. II. Fine particles regime. *Indiana Univ. Math. J.*, 53(6) :1517–1536, 2004.

[GK] G. P. Galdi and M. Kyed. Steady flow of a navier–stokes liquid past an elastic body. preprint.

[GLS00] M. D. Gunzburger, H-C. Lee, and G. A. Seregin. Global existence of weak solutions for viscous incompressible flows around a moving rigid body in three dimensions. *J. Math. Fluid Mech.*, 2(3) :219–266, 2000.

[GMS06] J.-L. Guermond, P. Minev, and J. Shen. An overview of projection methods for incompressible flows. *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 195(44-47) :6011–6045, 2006.

[GN02] A. Grimal, Q. andWatzky and S. Nali. A one-dimensional model for the propagation of pressure waves through the lung. *Journal of Biomechanics*, 35 :1081–1089, 2002.

[Gou01] T. Goudon. Asymptotic problems for a kinetic model of two-phase flow. *Proc. R. Soc. Edinb., Sect. A, Math.*, 131(6) :1371–1384, 2001.

[GPP94] R. Glowinski, T.W. Pan, and J. Périaux. A fictitious domain method for Dirichlet problem and applications. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 111(3-4) :283–303, 1994.

[GQ98a] J.-L. Guermond and L. Quartapelle. On stability and convergence of projection methods based on pressure Poisson equation. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 26(9) :1039–1053, 1998.

[GQ98b] J.-L. Guermond and L. Quartapelle. On the approximation of the unsteady Navier-Stokes equation by finite element projection methods. *Numer. Math.*, 80(2) :207–238, 1998.

[GR86] V. Girault and P.-A. Raviart. *Finite element methods for Navier-Stokes equations*. Springer-Verlag, 1986.

[Gri03] Q. Grimal. *Etude dans le domaine temporel de la propagation d'ondes élastiques en milieux stratifiés ; Modélisation de la réponse du thorax à un impact*. PhD thesis, Université de Paris XIII, 2003.

[GV03] J.-F. Gerbeau and M. Vidrascu. A quasi-Newton algorithm based on a reduced model for fluid-structure interactions problems in blood flows. *Math. Model. Num. Anal.*, 37(4) :631–648, 2003.

[GVHar] D. Gérard-Varet and M. Hillairet. Regularity issues in the problem of fluid structure. *ARMA*, to appear.

[Ham98] K. Hamdache. Global existence and large time behaviour of solutions for the Vlasov-Stokes equations. *Japan J. Indust. Appl. Math.*, 15(1) :51–74, 1998.

[Hei04] M. Heil. An efficient solver for the fully coupled solution of large-displacement fluid-structure interaction problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 193(1-2) :1–23, 2004.

[Hil07] M. Hillairet. Lack of collision between solid bodies in a 2D incompressible viscous flow. *Comm. Partial Differential Equations*, 32(7-9) :1345–1371, 2007.

[HJ99] A. Haraux and M. A. Jendoubi. Convergence of bounded weak solutions of the wave equation with dissipation and analytic nonlinearity. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 9(2) :95–124, 1999.

[HPLHO] F. Hecht, O. Pironneau, A. Le Hyaric, and K. Ohtsuka. *FreeFem++ v. 2.11. User's Manual*. University of Paris 6.

[HRT96] J.G. Heywood, R. Rannacher, and S. Turek. Artificial boundaries and flux and pressure conditions for the incompressible Navier–Stokes equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 22 :325–352, 1996.

[HS99] K.-H. Hoffmann and V. N. Starovoitov. On a motion of a solid body in a viscous fluid. Two-dimensional case. *Adv. Math. Sci. Appl.*, 9(2) :633–648, 1999.

[HT] M. Hillairet and T. Takahashi. Collisions in 3d fluid structure interactions problems. to appear in SIAM Journal on Mathematical Analysis.

[KFH+09] H. J. Kim, C. A. Figueroa, T. J. R. Hughes, K. E. Jansen, and C. A. Taylor. Augmented Lagrangian method for constraining the shape of velocity profiles at outlet boundaries for three-dimensional finite element simulations of blood flow. *Accepted to Comput. Methods Appl. Mech.*, 2009.

[LF96] M. Lesoinne and C. Farhat. Geometric conservation laws for flow problems with moving boundaries and deformable meshes and their impact on aeroelastic computations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 134 :71–90, 1996.

[LTM00] P. Le Tallec and S. Mani. Numerical analysis of a linearised fluid-structure interaction problem. *Numer. Math.*, 87(2) :317–354, 2000.

[LTM01] P. Le Tallec and J. Mouro. Fluid structure interaction with large structural displacements. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 190 :3039–3067, 2001.

[LTMH07] C.-L. Lin, M. H. Tawhai, G. McLennanc, and E.A. Hoffman. Characteristics of the turbulent laryngeal jet and its effect on airflow in the human intra-thoracic airways. *Respiratory Physiology & Neurobiology*, 157 :295–309, 2007.

[MFWS04] B. Mauroy, M. Filoche, E. R. Weibel, and B. Sapoval. The optimal bronchial tree is dangerous. *Nature*, 427 :633–636, 2004.

[MR07] V. Maz'ya and J. Rossmann. L_p estimates of solutions to mixed boundary value problems for the Stokes system in polyhedral domains. *Math. Nachr.*, 280(7) :751–793, 2007.

[MS02] H.G. Matthies and J. Steindorf. Partitioned but strongly coupled iteration schemes for nonlinear fluid-structure interaction. *Comp. & Struct.*, 80(27–30) :1991–1999, 2002.

[MS03] H.G. Matthies and J. Steindorf. Partitioned strong coupling algorithms for fluid-structure interaction. *Comp. & Struct.*, 81 :805–812, 2003.

[MSV] B. Maury, D. Salort, and C. Vannier. Trace theorems for trees, application to the human lung. to appear in Networks and Heterogeneous Media.

[MV07a] A. Mellet and A. Vasseur. Global weak solutions for a Vlasov-Fokker-Planck/Navier-Stokes system of equations. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 17(7) :1039–1063, 2007.

[MV07b] A. Mellet and A. Vasseur. On the barotropic compressible Navier-Stokes equations. *Comm. Partial Differential Equations*, 32(1-3) :431–452, 2007.

[MW01] D. P. Mok and W. A. Wall. Partitioned analysis schemes for the transient interaction of incompressible flows and nonlinear flexible structures. In K. Schweizerhof W.A. Wall, K.U. Bletzinger, editor, *Trends in computational structural mechanics*, Barcelona, 2001. CIMNE.

[MWR01] D. P. Mok, W. A. Wall, and E. Ramm. Accelerated iterative substructuring schemes for instationary fluid-structure interaction. In K.J. Bathe, editor, *Computational Fluid and Solid Mechanics*, pages 1325–1328. Elsevier, 2001.

[NG94] B. Nkonga and H. Guillard. Godunov type method on nonstructured meshes for three-dimensional moving boundary problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 113(1-2) :183–204, 1994.

[Ngu89] G. Nguetseng. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization. *SIAM J. Math. Anal.*, 20(3) :608–623, 1989.

[num96] The first AFOSR conference on dynamic motion CFD. In L. Sakell and D.D. Knight, editors, *On the mathematical theory of fluid dynamic limits to conservation laws*. 1996.

[OL01] M. R. Owen and M. A. Lewis. The mechanics of lung tissue under high-frequency ventilation. *SIAM J. Appl. Math.*, 61(5) :1731–1761 (electronic), 2001.

[Olu99] M.S. Olufsen. Structured tree outflow condition for blood flow in larger systemic arteries. *Am. J. Physiol.*, 276 :257–H268, 1999.

[OS95] M. Orlt and A.-M. Sändig. Regularity of viscous Navier-Stokes flows in nonsmooth domains. In *Boundary value problems and integral equations in nonsmooth domains (Luminy, 1993)*, volume 167 of *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, pages 185–201. Dekker, New York, 1995.

[PF03] S. Piperno and C. Farhat. Design of efficient partitioned procedures for the transient solution of aeroelastic problems. In *Fluid-structure interaction*, Innov. Tech. Ser., pages 23–49. Kogan Page Sci., London, 2003.

[PFL95] S. Piperno, C. Farhat, and B. Larrouturou. Partitioned procedures for the transient solution of coupled aeroelastic problems. Part I : Model problem, theory and two-dimensional application. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 124 :79–112, 1995.

[Pip97] S. Piperno. Explicit/implicit fluid/structure staggered procedures with a structural predictor and fluid subcycling for 2D inviscid aeroelastic simulations. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 25(10) :1207–1226, 1997.

[PM89] C. S. Peskin and D. M. McQueen. A three-dimensional computational method for blood flow in the heart. I. Immersed elastic fibers in a viscous incompressible fluid. *J. Comput. Phys.*, 81(2) :372–405, 1989.

[QQ07] A. Quaini and A. Quarteroni. A semi-implicit approach for fluid-structure interaction based on an algebraic fractional step method. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 17(6) :957–983, 2007.

[QRV01] A. Quarteroni, S. Ragni, and A. Veneziani. Coupling between lumped and distributed models for blood flow problems. *Comput. Vis. Sci.*, 4(2) :111–124, 2001. Second AMIF International Conference (Il Ciocco, 2000).

[QTV00] A. Quarteroni, M. Tuveri, and A. Veneziani. Computational Vascular Fluid Dynamics : Problems, Models and Methods. *Comp. Vis. Science*, 2 :163–197, 2000.

[QV03] A. Quarteroni and A. Veneziani. Analysis of a geometrical multiscale model based on the coupling of ODEs and PDEs for blood flow simulations. *Multiscale Model. Simul.*, 1(2) :173–195 (electronic), 2003.

[Ran91] R. Rannacher. On Chorin's projection method for the incompressible Navier-Stokes equations. *Lecture Notes in Mathematics*, 1530 :167–183, 1991.

[RB01] S. Rugonyi and K.J. Bathe. On finite element analysis of fluid flows coupled with structural interaction. *CMES - Comp. Modeling Eng. Sci.*, 2(2) :195–212, 2001.

[RRLJ01] P. Raback, J. Ruokolainen, M. Lyly, and E. Järvinen. Fluid-structure interaction boundary conditions by artificial compressibility. In *ECCOMAS Computational Fluid Dynamics Conference, Swansea, 2001*, 2001.

[SA07] A. Soualah-Alilah. *Modélisation mathématique et numérique du poumon humain.* PhD thesis, Université Paris-Sud–Orsay, 2007.

[Ser87] D. Serre. Chute libre d'un solide dans un fluide visqueux incompressible. Existence. *Japan J. Appl. Math.*, 4(1) :99–110, 1987.

[Sim87] J. Simon. Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 146 :65–96, 1987.

[SMST02a] J. A. San Martín, V. Starovoitov, and M. Tucsnak. Global weak solutions for the two-dimensional motion of several rigid bodies in an incompressible viscous fluid. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 161(2) :113–147, 2002.

[SMST02b] Jorge Alonso San Martín, Victor Starovoitov, and Marius Tucsnak. Global weak solutions for the two-dimensional motion of several rigid bodies in an incompressible viscous fluid. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 161(2) :113–147, 2002.

[SMSTT05] J. San Martín, J.-F. Scheid, T. Takahashi, and M. Tucsnak. Convergence of the Lagrange-Galerkin method for the equations modelling the motion of a fluid-rigid system. *SIAM J. Numer. Anal.*, 43(4) :1536–1571 (electronic), 2005.

[Sol88a] V.A. Solonnikov. On the transiant motion of an isolated volume of viscous incompressible fluid. *Math. USSR Izvestiya (Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.)*, 31 :381–405, 1988.

[Sol88b] V.A. Solonnikov. Unsteady motion of a finite mass of fluid, bounded by a free surface. *J. Soviet Math.*, 40 :672–686, 1988.

[SS08] B. Maury T. Similowski S. Martin and C. Straus. Modelling of respiratory system mechanics involving gas exchange in the human lungs. *ESAIM : PROCEEDINGS*, 23 :30–47, June 2008.

[Sta04] V. N. Starovoitov. Behavior of a rigid body in an incompressible viscous fluid near a boundary. In *Free boundary problems (Trento, 2002)*, volume 147 of *Internat. Ser. Numer. Math.*, pages 313–327. Birkhäuser, Basel, 2004.

[Sur07] C. Surulescu. On the stationary interaction of a Navier-Stokes fluid with an elastic tube wall. *Appl. Anal.*, 86(2) :149–165, 2007.

[SWW08] J. Salomon, A. A. Weiss, and B. I. Wohlmuth. Energy-conserving algorithms for a corotational formulation. *SIAM J. Numer. Anal.*, 46(4) :1842–1866, 2008.

[Tak03] T. Takahashi. Analysis of strong solutions for the equations modeling the motion of a rigid-fluid system in a bounded domain. *Adv. Differential Equations*, 8(12) :1499–1532, 2003.

[Tem68] R. Temam. Une méthode d'approximation de la solution des équations de Navier-Stokes. *Bull. Soc. Math. France*, 96 :115–152, 1968.

[Tem77] R. Temam. *Navier-Stokes equations. Theory and numerical analysis.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1977. Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 2.

[Tez01] T.E. Tezduyar. Finite element methods for fluid dynamics with moving boundaries and interfaces. *Arch. Comput. Methods Engrg.*, 8 :83–130, 2001.

[TL79] P. D. Thomas and C. K. Lombard. Geometric conservation law and its application to flow computations on moving grids. *AIAA J.*, 17(10) :1030–1037, 1979.

[TT04] T. Takahashi and M. Tucsnak. Global strong solutions for the two dimensional motion of a rigid body in a viscous fluid. *J. Math. Fluid Mech.*, 6(1) :53 – 77, 2004.

[VC06] I. Vignon-Clementel. *A coupled multidomain method for computational modeling of blood flow.* PhD thesis, Stanford University, 2006.

[VCFJT06] I. E. Vignon-Clementel, C. A. Figueroa, K. E. Jansen, and C. A. Taylor. Outflow boundary conditions for three-dimensional finite element modeling of blood flow and pressure in arteries. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 195(29-32) :3776–3796, 2006.

[VT04] I. E. Vignon and C. A. Taylor. Outflow boundary conditions for one-dimensional finite element modeling of blood flow and pressure waves in arteries. *Wave Motion*, 39(4) :361–374, 2004. New computational methods for wave propagation.

[VV05] A. Veneziani and C. Vergara. Flow rate defective boundary conditions in haemodynamics simulations. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 47(8-9) :803–816, 2005.

[Wei63] E.R. Weibel. *Morphometry of the human lung.* 1963.

[WR08] W. A. Wall and T. Rabczuk. Fluidstructure interaction in lower airways of CT-based lung geometries. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2008.