

Université Paris VII - Denis Diderot



Université Pierre et Marie Curie

Ecole Doctorale de Science Mathématiques de Paris Centre

Thèse de doctorat

Discipline : Mathématiques Appliquées

présentée par

Pierre Jounieaux

Sur l'optimisation de la forme des zones d'observation pour l'équation des ondes. Applications à la tomographie photoacoustique

---

dirigée par Yannick Privat et Emmanuel Trélat

Soutenue le ... devant le jury composé de :

Laboratoire Jacques-Louis Lions,
4, place Jussieu,
75 005 Paris

UPMC
Ecole Doctorale de Sciences
Mathématiques de Paris Centre
4 place Jussieu
75252 Paris Cedex 05
Boite courrier 290

Résumé

Résumé

Cette thèse se compose de deux parties principales. Dans la première partie, on considère l'équation des ondes posée sur un domaine ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ supposé de régularité Lipschitz. Il s'agit alors d'étudier le problème consistant à optimiser, en un sens à préciser, les forme et position optimales d'une surface de capteurs disposés sur le bord du domaine, $\Gamma \subset \partial\Omega$. Ce problème trouve naturellement sa place dans le contexte des problèmes inverses, lorsqu'il s'agit, par exemple, de maximiser la qualité de la solution reconstruite à partir d'une observation partielle.

Cette partie fait suite aux travaux [PTZ12, PTZ15], et suivant leur méthode, on cherche à maximiser par rapport aux surfaces $\Gamma \subset \partial\Omega$ de mesure de Hausdorff prescrite $\mathcal{H}^{n-1}(\Gamma) = L\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)$, avec $L \in]0,1[$, un critère spectral appelé *constante d'observabilité randomisée*. De fait, on montrera que cette constante qui consiste en une moyenne de la constante d'observabilité traditionnelle, sur une séléction aléatoire de conditions initiales, s'avère être particulièrement adaptée aux usages pratiques que vise l'optimisation du placement des capteurs.

C'est à travers une procédure de relaxation qu'on établira, sous certaines hypothèses géométriques d'ergodicité quantique sur le domaine Ω, la valeur optimale du critère randomisé. On étudiera notamment un certain nombre de cas particuliers de domaines Ω et de valeurs de L, pour lesquels nous pourrons obtenir l'existence, l'unicité la caractérisation de domaines optimaux. Pour autant, dans le cas général, de tels domaines peuvent ne pas exister. Afin de pouvoir, même dans ces cas, fournir des dispositions de capteurs efficaces et adaptés, on introduit une version approchée du problème initial, ne prenant en compte qu'un nombre fini de fréquences. Notons qu'un résultat de Γ-convergence, explicite la proximité entre le critère tronqué en fréquence et le critère initial. On prouve par ailleurs dans le cas du critère tronqué en fréquences, l'existence et l'unicité d'une disposition optimale de capteurs pour une large classe de domaines Ω, et on illustrera ce résultat à l'aide d'un certain nombre de simulations numériques.

La seconde partie de cette thèse concerne l'application de ces travaux à l'imagerie médicale, et plus précisément à la tomographie photoacoustique, un procédé d'imagerie médicale ultra-sonore en développement. Outre l'aspect non invasif de cette technique, elle constitue de surcroît une alternative précise et plus économique à l'imagerie X, ce qui en fait une technique d'avenir. Dans [BBHP14] et [Bon10] les auteurs modélisent les phénomènes thermiques et acoustiques en jeu dans ce procédé. C'est dans le cadre théorique proposé par ces articles, que l'on s'attache à modélier l'influence de la forme et de la disposition des capteurs dans le problème de reconstruction de la densité des tissus. Plus particulièrement, il s'agira de construire une fonctionnelle de la forme des capteurs, rendant compte de la qualité de l'image obtenue. A la base de cette fonctionnelle se trouve la notion d'observabilité au bord, étudiée dans le premier chapitre, mais également de nouvelles considérations propres au contexte de l'imagerie médicale. On s'interessera ensuite à l'existence d'une disposition maximisant cette fonctionnelle, et finalement à la mise en œuvre numérique des différents résultats établis. On conclue cette étude par un certain nombre de simulations.

Mots-clefs

observabilité, équation des ondes, optimisation de formes, modélisation, simulations numériques.

Optimal shape of boundary observation domains for the wave equation. Applications to photoacoustic tomography.

Abstract

This thesis consist in two main parts. In the first part, we consider the wave equation with Dirichlet boundary conditions on an open bounded subset Ω of $\mathbb{R}^n$ having a Lipschitz boundary. We investigate the problem of optimizing, in some appropriate sense, the shape and location of sensors spread on an arbitrary measurable

subdomain Γ of the boundary $\partial\Omega$. This kind of problem is frequently encountered in the context of inverse problems, where one aims, for instance, at maximizing the quality of a reconstruction of the solution, using only a partial observation.

Following the approach developed in [PTZ12, PTZ15], we introduce a spectral quantity called *randomized observability constant*, corresponding to the best constant in an average of the classical observability inequality, over random initial data. We show that it is relevant from a practical point of view to maximize this randomized observability constant, over all possible subsets $\Gamma \subset \partial\Omega$ of prescribed Hausdorff measure $\mathcal{H}^{n-1}(\Gamma) = L\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)$, with $L \in]0,1[$.

Thanks to a refined study of a relaxed version of this problem, we compute the optimal value for the initial problem under appropriate geometrical quantum ergodicity properties of the domain Ω, and we investigate in several particular cases the existence and uniqueness of an optimal set. Since optimal sets may not exist, we also introduce a spectral approximation of this problem involving only a finite number of modes. We prove existence and uniqueness results for this problem, provide some numerical simulations and investigate Γ-convergence properties of this problem.

The second part consists in applying the previous results to medical imaging, and more precisely to photoacoustic tomography. This imaging technique, constitutes a cutting-edge technology that has drawn considerable attention in the medical imaging area. Firstly because it is non-ionizing and non-invasive, and also because it constitutes a precise and cheap alternative to X imaging. In [BBHP14] and [Bon10] authors modelize the thermic and acoustic phenomenons involved in this imaging technique. In this framework, we propose here to model the influence of the shape and position of sensors in the inverse problem consisting in the reconstruction of the imaged body. In a nutshell, we build a functional of the shape of the sensors, providing an account for the reconstructed image quality. This functional is the sum of two terms : the first one is an observability term, inspired by the first part of this thesis and modeling the efficiency of the sensors location. The second one takes into account some necessary practical considerations due to the biological framework. We then focus on the existence of optimal domains for this functional. Finally, we introduce a method to compute those optimal domains and provide several numerical simulations.

Keywords

observability, wave equation, shape optimization, modelization, numerical simulations.

Table des matières

General Introduction **11**

0.1 Optimal boundary observability for the Wave Equation 11

0.1.1 Introduction 11

Boundary observability of the wave equation 11

Modeling of the shape optimization problem 12

0.1.2 Solving the optimal design problem (10) 15

Solving of a relaxed version of Problem (10) 16

Optimal value for Problem (10) 18

0.1.3 Truncated problem and numerical simulations 18

Existence and uniqueness issues 19

0.2 Optimal position for sensors for photoacoustic tomography 20

0.2.1 The photoacoustic tomography 20

0.2.2 Optimal sensor positionning 22

Modeling the problem 22

Regularization and existence issues 25

0.2.3 Numerical simulations 28

Notations **33**

1 Observabilité frontière optimale pour l'équation des ondes **37**

1.1 Introduction 37

1.1.1 Observabilité frontière de l'équation des ondes 37

1.1.2 Le problème d'optimisation de forme 39

1.1.3 L'état de l'art 42

1.2 Étude du problème d'optimisation de forme (1.5) 44

1.2.1 Recherche de la valeur optimale pour le problème (1.5) 44

1.2.2 Le cas du carré 56

Résolution du problème relaxé 58

Retour au problème initial 60

1.2.3 Le cas du disque . . . 66
1.2.4 Comportement de la valeur optimale pour le problème (1.13) par rapport à L . . . 70
Point de saturation des solutions de Rellich . . . 70
Le cas des rectangles : un exemple de bifurcation . . . 75
La cas du secteur angulaire . . . 80
1.3 Le problème tronqué en fréquences et simulations numériques . 87
1.3.1 Valeur optimale du problème tronqué . . . 88
1.3.2 Existence et unicité de solutions dans $\mathcal{U}_L$ . . . 90
Cadre . . . 90
Preuve du théorème 3 . . . 92
1.3.3 Simulations numériques . . . 100
1.4 Remarques et problèmes ouverts . . . 104

2 Positionnement de capteurs pour la tomographie photoacoustique 109
2.1 La tomographie photoacoustique . . . 111
2.1.1 Principes physiques . . . 111
2.2 Positionnement optimal des capteurs . . . 113
2.2.1 Modélisation . . . 114
Cadre . . . 114
Modélisation du problème d'optimisation . . . 115
Une première approche . . . 120
2.2.2 Régularisations et résultat d'existence . . . 122
Régularisation du problème $(\mathcal{P}_\Sigma)$ . . . 122
Le problème relaxé . . . 128
Un résultat d'existence dans $\mathcal{U}_L$ . . . 131
2.2.3 Système d'optimalité pour le problème $\mathcal{P}_\Sigma$ . . . 133
2.3 Applications Numériques . . . 136
2.3.1 Reformulation de la pénalisation . . . 136
2.3.2 Méthode primale-duale . . . 137
2.3.3 Mise en œuvre numérique . . . 139

Conclusion 147

A Rappels Théoriques 151
A.1 Topologie . . . 151
A.1.1 Principes généraux . . . 151
A.1.2 Outils d'optimisation . . . 155

A.2 Observabilité-Contrôlabilité 156
A.3 Opérateurs pseudo-différentiels 157
A.4 Géométrie 159

B Preuve du théorème 2 et de la proposition 2 **163**
B.1 Preuve du théorème 2 163
B.2 Preuve de la proposition 2 167

Bibliographie **169**

General Introduction

This introduction will gather all the results developed at greater length in the core of this dissertation. We will present a precise summary of our work and provide all the relevant explanations. The proofs, as well as further comments, studies of particular cases and some open problems can be found in the main body of this work. In a word, this introduction will constitute a complete summary of our work, containing cross-references to the more detailed developments found in subsequent chapters sections.

0.1 Optimal boundary observability for the Wave Equation

0.1.1 Introduction

Boundary observability of the wave equation

Let T be a positive real number and Ω be a bounded open and connected set in $\mathbb{R}^n$, with a Lipschitz boundary $\partial\Omega$. Consider the homogeneous wave equation with Dirichlet boundary condition :

$$\begin{cases} \partial_{tt} y(t,x) - \Delta y(t,x) = 0 & \forall (t,x) \in [0,T] \times \Omega, \\ y(t,x) = 0 & \forall (t,x) \in [0,T] \times \partial\Omega, \\ y(0,x) = y^0(x),\ \partial_t y(0,x) = y^1(x) & \forall x \in \Omega. \end{cases} \tag{1}$$

It is well known that for all $(y^0, y^1) \in H_0^1(\Omega, \mathbb{C}) \times L^2(\Omega, \mathbb{C})$, there exists a unique weak solution y of (1) satisfying $y \in C^0([0,T], H_0^1(\Omega, \mathbb{C})) \cap C^1([0,T], L^2(\Omega, \mathbb{C}))$.

We endow the Lipschitz set $\partial\Omega$ with the usual $(n-1)$-dimensional Hausdorff measure $\mathcal{H}^{n-1}$. When the boundary Ω and the subset $\Gamma \subset \partial\Omega$ are regular enough, it is well-known that the quantity $\mathcal{H}^{n-1}(\Gamma)$ coincides with the surface area of Γ. In the sequel and in the absence of any ambiguity, we will say that $\Gamma \subset \partial\Omega$ is measurable whenever it is measurable for the Hausdorff measure $\mathcal{H}^{n-1}$.

For a given measurable subset Γ of $\partial\Omega$, consider the observable variable z_Γ defined by

$$\forall (t,x) \in [0,T] \times \partial\Omega, \quad z_\Gamma(t,x) = \chi_\Gamma(x) \frac{\partial y}{\partial \nu}(t,x), \tag{2}$$

where χ_Γ denotes the characteristic function of the set Γ, ν is the outward unit normal to $\partial\Omega$ defined almost everwhere, and $\frac{\partial y}{\partial \nu}$ is the normal derivative of y, solution of (1).

The system (1)-(2) is said *observable in time T* if there exists a positive constant C such that the inequality

$$C\|(y^0,y^1)\|^2_{H_0^1(\Omega,\mathbb{C})\times L^2(\Omega,\mathbb{C})} \leqslant \int_0^T \int_{\partial\Omega} \chi_\Gamma(x) \left| \frac{\partial y}{\partial \nu}(t,x) \right|^2 d\mathcal{H}^{n-1} dt, \tag{3}$$

holds for all $y^0 \in H_0^1(\Omega,\mathbb{C})$ and $y^1 \in L^2(\Omega,\mathbb{C})$.

We denote by $C_T(\chi_\Gamma)$ the largest constant C such that the inequality (3) holds and we will say that $C_T(\chi_\Gamma)$ is the observability constant associated to System (1)-(2)-(3).

Modeling of the shape optimization problem

The main unknown of the shape optimization problems we will consider will be χ_Γ, the characteristic function of the set Γ, equal to 1 in Γ and vanishing else. The objective of this study is to model and solve the problem of the optimization of the shape and location Γ of boundary sensors for the wave equation with Dirichlet boundary conditions.

Such an issue arises naturally when solving the inverse problem of recovering the initial data of the wave equation from boundary measurements. To model this optimal design problem, let us first note that the the observability constant $C_T(\chi_\Gamma)$ introduced above provides an account of the well-posedness character of the inverse problem. Indeed this constant constitutes the lowest ratio between the norm of the observable variable and the norm of the initial conditions to reconstruct. The quality of the reconstruction will also consequently be better if the observability constant is large. The observability constant is thus a first *naive* cost functional to model the efficiency of a given set of sensors.

Nevertheless, we do not choose as cost functional the observability constant $C_T(\chi_\Gamma)$ but an averaged version over random initial data. The reasons are two-fold : first, the observability constant $C_T(\chi_\Gamma)$ is difficult to handle and we are not able to compute it, even for very simple choices of domain Ω. Second, this constant is, by definition, *deterministic* and provides an account for the *worst possible case*.

Hence, in this sense, it is a *pessimistic* constant. In practice, when realizing a large number of measurements, it may be expected that this worst case will not occur too often, and one would like the observation to be optimal for most of experiments.

Such issues have been widely discussed in [PTZ12, PTZ15] and we refer to these articles for additional explanations.

As a consequence, maximizing the observability constant $C_T(\chi_\Gamma)$ over some admissible set of characteristic functions of boundary subdomains Γ does not appear relevant to model the problem of spreading boundary sensors in an optimal way. We will adopt in the sequel the point of view developed in [PTZ12, PTZ15], which consists in considering as criterion what is referred in these works as *the randomized observability constant* instead of the classical observability constant. This quantity can be interpreted as an average of the worst observation L^2-norms among almost every initial data.

Some reminders about this notion should be provided. Let us consider a decomposition of the solution y of (1) in a appropriate Hilbert basis of $L^2(\Omega)$. Let $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ denote a sequence of eigenfunctions of the Dirichlet-Laplacian operator on Ω, associated with the negative eigenvalues $(-\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$.

The solution $y \in\in C^0([0,T],H_0^1(\Omega,\mathbb{C}))\cap C^1([0,T],L^2(\Omega,\mathbb{C}))$ of (1) can be expanded as

$$y(t,x)=\sum_{j=1}^{+\infty}\left(a_j e^{i\sqrt{\lambda_j}t}+b_j e^{-i\sqrt{\lambda_j}t}\right)\phi_j(x), \tag{4}$$

with

$$a_j=\int_\Omega \frac{1}{2}\left(y^0(x)-\frac{i}{\sqrt{\lambda_j}}y^1(x)\right)\phi_j(x)\,dx,\quad b_j=\int_\Omega \frac{1}{2}\left(y^0(x)+\frac{i}{\sqrt{\lambda_j}}y^1(x)\right)\phi_j(x)\,dx, \tag{5}$$

for every $j\in\mathbb{N}^*$. Notice furthermore that

$$\|(y^0,y^1)\|^2_{H_0^1(\Omega,\mathbb{C})\times L^2(\Omega,\mathbb{C})}=\sum_{j=1}^{+\infty}\lambda_j(|a_j|^2+|b_j|^2).$$

As a consequence, the observability constant $C_T(\chi_\Gamma)$ can be rewritten in terms of the Fourier coefficients a_j and b_j, as

$$C_T(\chi_\Gamma)=\inf_{\substack{(\sqrt{\lambda_j}a_j),(\sqrt{\lambda_j}b_j)\in\ell^2(\mathbb{C})\\((a_j),(b_j))\neq(0,0)}}\frac{\displaystyle\int_0^T\int_\Gamma\left|\sum_{j=1}^{+\infty}\left(a_j e^{i\sqrt{\lambda_j}t}+b_j e^{-i\sqrt{\lambda_j}t}\right)\frac{\partial\phi_j}{\partial\nu}(t,x)\right|^2 d\mathcal{H}^{n-1}\,dt}{\sum_{j=1}^{+\infty}\lambda_j(|a_j|^2+|b_j|^2)}.$$

Then, using a change of variables, $C_T(\chi_\Gamma)$ rewrites

$$C_T(\chi_\Gamma) = \inf_{\substack{(\widetilde{a}_j),(\widetilde{b}_j)\in\ell^2(\mathbb{C}) \\ \sum_{j=1}^{+\infty}(|\widetilde{a}_j|^2+|\widetilde{b}_j|^2)=1}} \int_0^T \int_\Gamma \left| \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{\widetilde{a}_j}{\sqrt{\lambda_j}} e^{i\sqrt{\lambda_j}t} + \frac{\widetilde{b}_j}{\sqrt{\lambda_j}} e^{-i\sqrt{\lambda_j}t} \right) \frac{\partial \phi_j}{\partial \nu}(t,x) \right|^2 d\mathcal{H}^{n-1}\, dt.$$

Making a random selection of all possible initial data for the wave equation (1) consists in replacing $C_T(\chi_\Gamma)$ by

$$C_{T,\mathrm{rand}}(\chi_\Gamma) = \inf_{\substack{(\widetilde{a}_j),(\widetilde{b}_j)\in\ell^2(\mathbb{C}) \\ \sum_{j=1}^{+\infty}(|\widetilde{a}_j|^2+|\widetilde{b}_j|^2)=1}} \int_A \int_0^T \int_\Gamma \left| \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{\beta_{1,j}^\omega \widetilde{a}_j}{\sqrt{\lambda_j}} e^{i\lambda_j t} + \frac{\beta_{2,j}^\omega \widetilde{b}_j}{\sqrt{\lambda_j}} e^{-i\lambda_j t} \right) \frac{\partial \phi_j}{\partial \nu}(x) \right|^2 d\mathcal{H}^{n-1}\, dt\, dp_\nu, \tag{6}$$

where $(\beta_{1,j}^\omega)_{j\in\mathbb{N}^*}$ and $(\beta_{2,j}^\omega)_{j\in\mathbb{N}^*}$ denote two sequences of independent random variables on a probability space $(A, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ having mean equal to zero, variance equal to 1 and a super-exponential decay (for instance, independent Bernouilli random variables, see [Bur11, BT08a] for more details on randomization examples and their properties).

Introducing the random Fourier coefficients

$$a_j^\omega = \beta_{1,j}^\omega a_j \quad \text{and} \quad b_j^\omega = \beta_{1,j}^\omega b_j,$$

for every $j \in \mathbb{N}^*$, for given initial data $(y^0, y^1) \in H_0^1(\Omega,\mathbb{C}) \times L^2(\Omega,\mathbb{C})$, one defines a random solution y_ω of the wave equation (1) associated to the random initial data (y_ω^0, y_ω^1) determined by their Fourier coefficients a_j^ω and b_j^ω.

The constant $C_{T,\mathrm{rand}}(\chi_\Gamma)$ corresponds then to the largest constant in the following observability inequality

$$C_{T,\mathrm{rand}}(\chi_\Gamma) \|(y^0,y^1)\|^2_{H_0^1(\Omega,\mathbb{C})\times L^2(\Omega,\mathbb{C})} \leqslant \mathbb{E}\left(\int_0^T \int_\Gamma \left| \frac{\partial y_\omega}{\partial \nu}(t,x) \right|^2 d\mathcal{H}^{n-1} dt \right), \tag{7}$$

for all $(y^0, y^1) \in H_0^1(\Omega,\mathbb{C}) \times L^2(\Omega,\mathbb{C})$. Let us now compute the randomized observability constant $C_{T,\mathrm{rand}}(\chi_\Gamma)$.

The following result provides a simple and workable expression of the randomized observability constant $C_{T,\mathrm{rand}}(\chi_\Gamma)$.

Proposition 1. *Let Γ denote a measurable subset of $\partial\Omega$. There holds*

$$C_{T,rand}(\chi_\Gamma) = T \inf_{j\in\mathbb{N}^*} \left\{ \frac{1}{\lambda_j} \int_{\partial\Omega} \chi_\Gamma(x) \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial \nu}(x) \right)^2 d\mathcal{H}^{n-1} \right\}. \tag{8}$$

Remark 1. *Notice that the idea of considering random initial data and the associated random observability constant was first introduced in [PTZ12] and is highly inspired by the works of N. Burq and N. Tzvetkov on some nonlinear partial differential equations with random initial data (see [Bur11, BT08a, BT08b]).*

Let us now model the optimal shape and location of boundary sensors problem. An obvious remark is that, for any problem consisting of optimizing the observation, the optimal solution consists in observing the solutions over the whole domain $\partial\Omega$. This is however clearly not reasonable nor relevant, and in practice the domain covered by sensors is limited, due for instance to cost considerations. From the mathematical point of view, we model this basic limitation by considering as the set of unknowns, the set of all possible measurable subsets Γ of $\partial\Omega$ that are of surface area $\mathcal{H}^{n-1}(\Gamma) = L\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)$, where $L \in]0,1[$ is some fixed real number. Any such subset represents the sensors put in $\partial\Omega$, and the choice of z_Γ in (2) implies we are able to measure the restrictions of the solutions of (1) to Γ. The admissible set of unknowns is then defined by

$$\mathcal{U}_L = \left\{ \chi_\Gamma \mid \Gamma \subset \partial\Omega, \Gamma \text{of Hausdorff measure } \mathcal{H}^{n-1}(\Gamma) = L\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) \right\}. \tag{9}$$

According to all these considerations, we will tackle the following optimal design problem.

Optimal design problem. *Let $L \in]0,1[$. We investigate the problem of maximizing*

$$J(\chi_\Gamma) = \inf_{j\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{\lambda_j} \int_{\partial\Omega} \chi_\Gamma(x) \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial \nu}(x) \right)^2 d\mathcal{H}^{n-1}, \tag{10}$$

over the set of all characteristic functions χ_Γ belonging to $\mathcal{U}_L$.

0.1.2 Solving the optimal design problem (10)

This section is devoted to the investigation of the optimal value for Problem (10). This value is determined under several geometrical assumptions on the domain Ω. Theorem 1 compares the optimal values of a relaxed problem and the initial one (10). It constitutes the main result of this section. The interest of this theorem rests upon the fact that the optimal value for the relaxed problem can be determined under geometrical assumptions on Ω. Finally, a more complete answer is provided for some particular choices of Ω, namely a two-dimensional square and a circle.

Solving of a relaxed version of Problem (10)

Since the admissible set $\mathcal{U}_L$ is non compact for the usual $L^\infty(\partial\Omega,[0,1])$ weak-star topology (see for instance [HP06, Proposition 7.2.14]), it will be useful to investigate a relaxed version of Problem (11), namely

$$\sup_{a\in\overline{\mathcal{U}_L}} J(a), \tag{11}$$

where

$$J(a)=\inf_{j\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{\lambda_j}\int_{\partial\Omega}a(x)\left(\frac{\partial\phi_j}{\partial\nu}(x)\right)^2 d\mathcal{H}^{n-1}, \tag{12}$$

and $\overline{\mathcal{U}_L}$ is the closure of $\mathcal{U}_L$ for the usual $L^\infty(\partial\Omega,[0,1])$ weak-star topology, namely (see for instance [HP06])

$$\overline{\mathcal{U}_L}=\left\{a\in L^\infty(\partial\Omega,[0,1])\mid\int_{\partial\Omega}a(x)\,d\mathcal{H}^{n-1}=L\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)\right\}.$$

Under several geometric conditions on Ω, we will compute explicitly the optimal value for the relaxed problem by exhibiting a family of maximizers.

Let us first state an existence result for Problem (11).

Proposition 2. *Let $L\in]0,1[$. Problem* (11) *has a solution $a^*\in\overline{\mathcal{U}_L}$.*

The next results are devoted to the computation of the optimal value for Problem (11) under several geometrical assumptions on Ω. They will be expressed in terms of conditions on the Hilbert basis $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ of Dirichlet-Laplacian eigenfunctions.

In the sequel, we will consider three kinds of geometrical assumption. Let us make them precise.

Uniform boundedness (UB) property. There exists $A>0$ such that for every $j\in\mathbb{N}^*$,

$$\left\|\frac{\partial\phi_j}{\partial\nu}\right\|^2_{L^\infty(\partial\Omega)}\leqslant A\lambda_j. \tag{13}$$

Weak Quantum Ergodicity of Boundary values (WQEB) property. There exists a subsequence of $\frac{1}{\lambda_j}\left(\frac{\partial\phi_j}{\partial\nu}\right)^2 d\mathcal{H}^{n-1}$ converging vaguely to the uniform measure $\frac{2}{n|\Omega|}d\mathcal{H}^{n-1}$.

Quantum Uniform Ergodicity of Boundary values (QUEB) property. The sequence of measures $\frac{1}{\lambda_j}\left(\frac{\partial\phi_j}{\partial\nu}\right)^2 d\mathcal{H}^{n-1}$ is converging vaguely to the uniform measure $\frac{2}{n|\Omega|}d\mathcal{H}^{n-1}$.

We now introduce a particular family of elements that we will use in the sequel to compute explicitly the optimal value for the relaxed optimal design problem (11).

Defintion 1 (Rellich admissible functions)**.** *Let Ω be a bounded connected open subset of $\mathbb{R}^n$ either convex or with a $\mathcal{C}^{1,1}$ boundary. Let $x_0 \in \overline{\Omega}$. We will say that the function $a^*_{x_0}$ defined by*

$$a^*_{x_0}(x) = \frac{L\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)}{n|\Omega|}\langle x - x_0, \nu(x)\rangle, \tag{14}$$

for almost every $x \in \partial\Omega$, is a Rellich admissible function of the relaxed optimal design problem (11) *whenever it belongs to the admissible set $\overline{\mathcal{U}}_L$.*

Proposition 3. *Let Ω be either a $\mathcal{C}^{1,1}$ or a convex bounded connected open subset of $\mathbb{R}^n$. Assume*

(HQE) that Ω satisfies at the same time the (UB) and the (WQEB) properties;

(HRel) the existence of a Rellich admissible function of the relaxed optimal design problem (11)*.*

There holds

$$\max_{a\in\overline{\mathcal{U}_L}} J(a) = J(a^*_{x_0}) = \frac{2L\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)}{n|\Omega|}.$$

The following result characterize the domains satisfying the assumption *(HRel)*.

Proposition 4. *Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be a convex domain. Introduce the real positive number*

$$L^* = \frac{n|\Omega|}{R(\Omega)\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)},$$

where $R(\Omega)$ denotes the radius of the circumcircle of Ω [1]*. Then there exists a critical value $L_c \in [0,1]$ such that the assumption (HRel) holds if, and only if, $L \leqslant L_c$. Moreover, if Ω has a $\mathcal{C}^1$ boundary, then*

$$L_c = \min\left(1, L^*\right).$$

In the following paragraph, we will investigate the particular cases where Ω denotes either a rectangle, a disk or a angular sector in $\mathbb{R}^2$. In particular, we will explicitly compute at the same time the critical value L_c in such cases as well as the optimal value for the relaxed problem (11) when $L > L_c$, in other words when the assumption *(HRel)* is not satisfied anymore.

1. e.g. the smallest radius of balls containing Ω

Optimal value for Problem (10)

This section is devoted to the statement of one of the main results of this thesis. Under several geometrical assumptions, one provides the explicit optimal value for Problem (10). An important ingredient is the knowledge of the optimal value for the relaxed problem (11), stated in Proposition 3.

Notice that one has obviously

$$\sup_{\chi_\Gamma \in \mathcal{U}_L} J(\chi_\Gamma) \leqslant \sup_{a \in \overline{\mathcal{U}}_L} J(a).$$

Nevertheless, as an infimum of linear functions, the mapping $a \mapsto J(a)$ is upper semicontinuous and not lower semicontinuous for the usual $L^\infty(\partial\Omega)$ weak-star topology (see for instance [FL07]). Because of this lack of continuity, it is not clear whether the converse sense holds true or not.

Theorem 1 (No-Gap)**.** *Let Ω be either a $\mathcal{C}^{1,1}$ or convex bounded connected open set of $\mathbb{R}^n$, such that $\partial\Omega$ is a Whitney stratified manifold*[2]*. Assume*

(i) that Ω satisfies the (UB) and the (QUEB) properties;

(ii) the existence of a Rellich admissible function $a^*_{x_0}$ with $x_0 \in \overline{\Omega}$

Then,

$$\sup_{\chi_\Gamma \in \mathcal{U}_L} \inf_{j \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{\lambda_j} \int_{\partial\Omega} \chi_\Gamma(x) \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial \nu}(x) \right)^2 d\mathcal{H}^{n-1} = \frac{2L\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)}{n|\Omega|}. \tag{15}$$

Remark 2. *Note that the assumptions of Theorem 1 are not empty, they are satisfied for instance in the particular case where Ω is a $\mathbb{R}^2$ disk (see section 1.2.3).*

Moreover, one can find in chapter 1 the complete study for particular cases where Ω is either a $\mathbb{R}^2$ disk, a rectangle, an agular sector, or the $\mathbb{R}^3$ unit ball. In particular we state no-gap type results even when hypothesis of Theorem 1 do not hold.

0.1.3 Truncated problem and numerical simulations

In this section, we study a spectral approximation of Problem (10). Given the functional J, in view of designing a spectral approximation it is natural to consider the truncated functional defined by

$$J_N(a) = \inf_{1 \leqslant j \leqslant N} \frac{1}{\lambda_j} \int_{\partial\Omega} a(x) \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial \nu}(x) \right)^2 d\mathcal{H}^{n-1}. \tag{16}$$

2. See section A for a definition.

The optimal design problem we will investigate writes

$$\sup_{a\in\overline{\mathcal{U}_L}} J_N(a). \tag{17}$$

Even if the set of unknowns consists of density functions instead of characteristic functions, we will show that in many cases, this problem has a unique solution writing as the characteristic function of some subset of $\partial\Omega$.

Existence and uniqueness issues

We first state an existence result and highlight the relationship between problems (11) and (17).

Proposition 5. *Let $L\in]0,1[$ and $N\in\mathbb{N}^*$. Problem (17) has at least a solution a_N in $\overline{\mathcal{U}_L}$.*

Moreover, every sequence $(a_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ of maximizers of J_N in $\overline{\mathcal{U}_L}$ converges (up to a subsequence) for the $L^\infty(\partial\Omega,[0,1])$ weak-star topology to a maximizer of J in $\overline{\mathcal{U}_L}$ and

$$\max_{a\in\overline{\mathcal{U}_L}} J(a) = \lim_{N\to+\infty} J_N(a_N^*).$$

The rest of this section is devoted to the uniqueness issue and the characterization of maximizers. Roughly speaking, we prove that Problem (17) has a unique solution writing as the characteristic function of a subset of $\partial\Omega$ for a large class of domains Ω. Our approach is based on the notion of genericity. Genericity is a measure of how often and with which degree of robustness a property holds.

Before stating the main result of this section, let us clarify the notion of genericity we will use.

Let $\alpha\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. In what follows, we will denote by $\mathcal{C}^\alpha_{\text{Diff}}$ the set of $\mathcal{C}^\alpha$-diffeomorphisms in $\mathbb{R}^n$.

We will say that a subset Ω of $\mathbb{R}^n$ is a $\mathcal{C}^\alpha$ topological ball whenever there exists $T\in\mathcal{C}^\alpha_{\text{Diff}}$ transforming the unit ball into Ω. In the sequel, to endow the class of subsets Ω of $\mathbb{R}^n$ with a workable structure, we will consider as topological space

$$\widetilde{\Sigma_\alpha} = \{T(B(0,1)),\ T\in\mathcal{C}^\alpha_{\text{Diff}}\},$$

endowed with the metric induced by that of $\mathcal{C}^k$-diffeomorphisms [3], making it a complete metric space. We now define Σ_α as the connected component of the identity

3. Recall that one can endow $\mathcal{C}^\alpha_{\text{Diff}}$ with its topology τ inherited from the family of semi-norms defined by

$$p_\eta(T) = \sup_{x\in K, j\in[\![1,\alpha]\!]^n, |j|\leqslant\eta} |\partial^j T(x)|.$$

in $\widetilde{\Sigma_\alpha}$, endowed with the same topology.

Since our approach is based on analyticity properties, it is convenient to introduce the set $\mathcal{D}$ of domains $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ having an analytic boundary, as well as $\mathcal{A}_\alpha = \mathcal{D} \cap \Sigma_\alpha$ seen as a subset of the topological space Σ_α.

In the next result, we will prove that a given property holds generically with respect to the domain Ω. This means that the set of domains Ω for which this property is verified is open and dense in $\mathcal{A}_\alpha$.

The following result is highly inspired by the main theorem in [PS10].

Theorem 2. *Let $\alpha \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ and $N \in \mathbb{N}^*$. The set of the domains $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ for which, for every $L \in [0,1]$, the optimal design problem* (17) *has a unique solution and writes therefore as the characteristic function of a measurable subset of $\partial\Omega$, is open and dense in $\mathcal{A}_\alpha$.*

As a result of this study, one can find in section 1.3.3 some numerical simulations. The approach of such computations consists in discretizing the underlying eigenvalue problem to obtain an approximation of the eigenfunctions on $\partial\Omega$, and to reduce the optimal observability problem to some minimization problem with constraints.

0.2 Optimal position for sensors for photoacoustic tomography

In this section we tackle the problem of optimizing the sensors positions, to maximize the quality of the reconstructed image, in a medical imaging framework. In the previous section, the objective function consisted in a randomized version of the observability constant. Due to several reasons exposed further on, this criterion cannot be used as the only objective function anymore. Here, we build a new objective function taking into account both the well-posedness of the inverse problem and necessary practical considerations brought by the medical framework.

0.2.1 The photoacoustic tomography

Photoacoustic tomography (PAT) constitutes a cutting-edge technology that has drawn considerable attention in the medical imaging area. It uniquely combines the absorption contrast between two media with ultrasound high resolution. Moreover, it is non-ionizing and non-invasive, and is the fastest growing new biomedical method,

for every $\eta \in \{1,\dots,\alpha\}$, $K \subset \mathbb{R}^n$ compact, and $T \in \mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, making it a complete metric space.

with clinical applications on the way. The idea is simple. the tissue to be imaged is usually irradiated by a nanosecond-pulsed laser at an optical wavelength. This energy is converted into heat. The energy absorption by molecules beneath the surface creates a thermally induced pressure jump that propagates as a sound wave, which can be deteced. By detecting the pressure waves, we can localize their heterogeneities (i.e., where heat was absorbed) and obtain important informations about the studied sample.

More precisely, the electromagnetic energy is distributed at a given time through the object. The induced increase of temperature depends on the local absoption properties. For example, cancerous tissues absorb more energy than healthy ones. This opens the way to the detection of heterogeneities via measurements of the pressure field. Heterogeneities behave like internal acoustic sources, and the signal recorded by pressure detectors outside the medium under study provides informations on their distribution (see for instance [HSS05, SGG$^+$09]).

In a word, the pressure wave p in the imaged body Ω is governed by the following system (see [Bon10, BBHP14]) :

$$\begin{cases} \partial_{tt} p(x,t) - \Delta p(x,t) = 0 & \text{on } \Omega \times [0,T] \\ p(x,0) = u(x) := \mu_{abs}(x) I(x) & \text{on } \Omega \\ \partial_t p(x,0) = 0 & \text{on } \Omega \end{cases} \tag{18}$$

where $T > 0$ is the duration of the acquisition, $\mu_{abs}(x)$ is the tissues aborption coefficient at x, and $I(x)$ is the intensity fluence. We may precise the boundary settings later on.

Finally, while dealing with soft and deep tissues, the fluence rate I, that is the average of the luminous intensity in all directions, satisfies the following diffusion equation (see for example [Arr99]) :

$$\mu_a(x) I(x) - \Delta I(x) = S(x), \quad \text{on } \Omega \tag{19}$$

where S is the incident light source.

The purpose of the PAT is to compute the initial condition $u(x)$ out of boundary measurements. Equation (19) then leads to μ_{abs} one wants to reconstruct.

In this study, we aim at proposing a practical sensor positionning producing a well-reconstructed image.

0.2.2 Optimal sensor positionning

Modeling the problem

According to the model introduced in the previous section, we suppose that the acoustic wave is a solution of the following Cauchy problem.

$$\begin{cases} \partial_{tt} p(x,t) - \operatorname{div}(c(x)\nabla p(x,t)) = 0 & \text{on } \mathcal{B}\times[0,T], \\ p(x,0) = p_0,\ \operatorname{supp}(p_0) \subset \Omega & \text{on } \mathcal{B}, \\ \partial_t p(x,0) = 0 & \text{on } \mathcal{B}, \\ p(x,t) = 0 & \text{on } \partial\mathcal{B}\times[0,T], \end{cases} \tag{20}$$

where $T > 0$, and Ω is an open and convex subset of $\mathbb{R}^n$ having a $\mathcal{C}^1$ boundary, representing the imaged body. We suppose that $\Omega \subset \mathcal{B}$, where the set $\mathcal{B}\backslash\Omega$ represents the ambient media (water or air), where the wave propagates. It has to be bounded for numerical simulations but we suppose $\mathcal{B}$ to be a ball chosen large enough in such a way that p vanishes on $\partial\Omega$ during the recording process (i.e. $t \leqslant T$). Finally c represents the sound speed, and is supposed to be constant in both Ω and $\mathcal{B}\setminus\Omega$:

$$c = c_1\chi_\Omega + c_2\chi_{\mathcal{B}\setminus\Omega}, \quad \text{with } (c_1,c_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2.$$

The following proposition provides existence and uniqueness of a solution for the Cauchy problem (20).

Proposition 6. *For every $p_0 \in H_0^1(\Omega)$, there exists a unique solution p for Problem* (20) *Moreover,*

$$p \in \mathcal{C}^1\left([0,T], L^2(\mathcal{B})\right) \cap \mathcal{C}\left([0,T], H_0^1(\mathcal{B}) \cap L^2(\mathcal{B})\right).$$

The sensors set. We denote by Σ a set of sensors, and we suppose that Σ, settled on the boundary of Ω, has a not-null *thickness* ε. In a more formal way, we suppose that there exists a $\mathcal{H}^{n-1}$-measurable set $\Gamma \subset \partial\Omega$ such that Σ is defined by

$$\Sigma = \{s + \mu\,\vec{n}(s), s \in \Gamma, \mu \in [0,\varepsilon]\} \tag{21}$$

where $\vec{n}(s)$ denotes the outward unit normal to Ω at s (see figure 1), and $\mathcal{H}^{n-1}$ denotes the usual $(n-1)$-dimensional Hausdorff measure on $\partial\Omega$. The set Σ is thus supported by the annular ring

$$\widetilde{\partial\Omega} := \{s + \mu\vec{n}(s), s \in \partial\Omega, \mu \in [0,\varepsilon]\}.$$

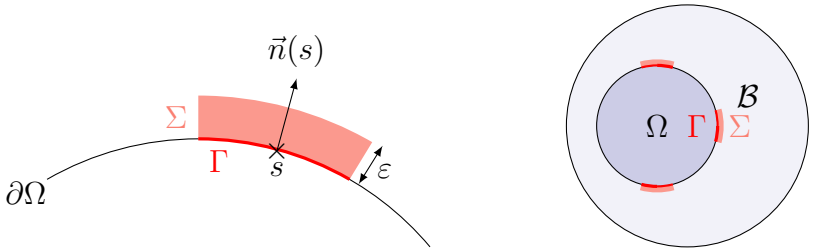


Figure 1 – The set of sensors.

As in the previous section it is natural to define a volumetric constraint on Σ. This constraint reads here as follows. We suppose that the trace of Σ on the boundary $\Gamma \subset \partial\Omega$, is subject to the surface area constraint

$$\mathcal{H}^{n-1}(\Gamma) = L\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega),$$

where $L \in]0,1[$ is some fixed real number. Equivalently one has $\chi_\Sigma \in \mathcal{U}_L$, with

$$\mathcal{U}_L = \{a \in L^\infty(\widetilde{\partial\Omega}),\ a(s+\mu\vec{n}(s)) = X(s),\ \forall (s,\mu) \in \partial\Omega \times [0,\varepsilon],\ \text{with } X \in \mathcal{V}_L\} \quad (22)$$

and

$$\mathcal{V}_L = \{a \in L^\infty(\partial\Omega),\ 0 \leqslant a \leqslant 1,\ a(1-a) = 0 \text{ a.e},\ \int_{\partial\Omega} a(x)d\mathcal{H}^{n-1} = L\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)\}.$$

Remark 3. *The definition of $\mathcal{U}_L$ makes sense since Ω is supposed to be $\mathcal{C}^1$ and convex. Indeed, under those assumptions the map $\partial\Omega \times [0,\varepsilon] \ni (s,\mu) \mapsto s + \mu\vec{n}(s) \in \widetilde{\partial\Omega}$ is bijective.*

The objective function. Introduce the following functional :

$$\begin{aligned} J(\chi_\Sigma, p_0) &= \gamma_1 \int_0^T \int_{\mathcal{B}} \chi_\Sigma(x)(p_{[p_0]}(x,t) - p_{obs}(x,t))^2 dxdt \\ &+ \gamma_2 \frac{\displaystyle\int_0^T \int_{\mathcal{B}} \chi_\Sigma(x)\partial_t p_{[p_0]}(x,t)^2 dxdt}{\| p_0 \|^2_{H^1(\Omega)}} \end{aligned} \quad (23)$$

with $(\gamma_1, \gamma_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ are fixed parameters, and p_{obs} is the actual pressure signal measured by the sensors Σ. We tackle the following optimization problem :

$$\sup_{\chi_\Sigma \in \mathcal{U}_L} \inf_{p_0 \in H_0^1(\Omega)} J(\chi_\Sigma, p_0). \quad (24)$$

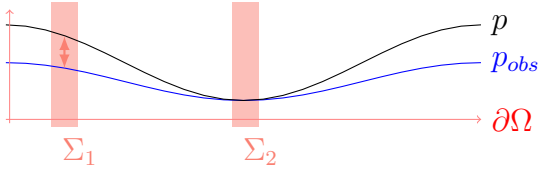
We now briefly introduce each term of J. Let us denote

$$A_1(\chi_\Sigma, p_0) = \int_0^T \int_{\mathcal{B}} \chi_\Sigma(x)(p_{[p_0]}(x,t) - p_{obs}(x,t))^2 dxdt$$

and

$$A_2(\chi_\Sigma, p_0) = \frac{\int_0^T \int_{\mathcal{B}} \chi_\Sigma \partial_t p_{[p_0]}(x,t)^2 dxdt}{\| p_0 \|^2_{H^1(\Omega)}}.$$

- The first term $A_1(\chi_\Sigma, p_0)$ is a least-square method inherited term. In Problem (24), this term is supposed to ensure that the reconstructed image is as close as possible to the actual initial condition of the pressure wave. We thus want to minimize A_1 with respect to p_0. In a second time we want Σ to be as acurate as possible, that is to say to maximize A_1 with respect to Σ. Consider for instance the following illustration, where $A_1(\Sigma_1) > A_1(\Sigma_2)$.



- The second term $A_2(\chi_\Sigma, p_0)$, is directly inherited from the notion of observability. Indeed, if we set the observation variable $z_\Sigma(x,t) = \chi_\Sigma(x)\partial_t p(x,t)$, then the opimization problem

$$\sup_{\chi_\Sigma \in \mathcal{U}_L} \inf_{p_0 \in H^1_0(\Omega)} A_2(\chi_\Sigma, p_0)$$

  is equivalent with maximizing the observability constant associated with System (20) and the above observation variable, with respect to $\chi_\Sigma \in \mathcal{U}_L$.
  Note that we define the observation variable accordingly with the fact that the sensors are piezoelectric microphones, and thus are supposed to record time variations of the pressure.
  Recall that the observability constant gives an account for the well-posedness of the inverse problem consisting in reconstructing unknown initial conditions out of the observation variable. As modeled in this work, the PAT precisely writes as an inverse problem. As a consequence, the bigger the observability constant is, the better is the reconstructed image quality.

Remark 4. *Taken as objective function, the observability term A_2 does not take into account the observed signal p_{obs}. It thus produces an optimal sensors position intrinsic to Ω. In the seek of optimizing the reconstruction quality, it seems natural to take into account the a priori position of heterogeneities, and thus p_{obs}. On the*

other hand, taking A_1 as objective function leads to a sensor set Σ adapted to the observed signal p_{obs}, but we do not have any information on the location of badly reconstruted zones. Maximizing A_1 with respect to Σ does not help upgrading the well-posedness of the inverse problem, nor the quality of the reconstruction. The optimization problem (24) leads to a sensor set adapted to the signal p_{obs}, with a limited negative effect on the global reconstructed image quality.

Consider the optimization problem whith Σ fixed in $\mathcal{U}_L$:

$$\min_{p_0 \in H_0^1(\Omega)} J(\chi_\Sigma, p_0). \tag{25}$$

The next result proves that this problem is generally ill-posed, and consequently that, settled as such, the optimal design problem (24) is not workable.

Proposition 1. *Set $L < 1$ and $\Sigma \subset \widetilde{\partial\Omega}$ such that $\chi_\Sigma \in \mathcal{U}_L$. Define $\Gamma \subset \partial\Omega$ associated to Σ as in (21). Suppose that there exists an open subset $\mathcal{O} \subset \partial\Omega$ such that $\mathcal{O} \subset (\partial\Omega \backslash \Gamma)$. Then every minimizing sequence $(p_0^k)_{k\in\mathbb{N}} \in (H_0^1(\Omega))^{\mathbb{N}}$ for Problem (25) satisfies*

$$A_2(\chi_\Sigma, p_0^k) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Moreover there exists a minimizing sequence $(\widetilde{p_0^k})_{k\in\mathbb{N}} \in (H_0^1(\Omega))^{\mathbb{N}}$ for Problem (25) such that $\| \widetilde{p_0^k} \|_{H^1(\Omega)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Regularization and existence issues

Define the set

$$\mathcal{K} := \left\{ p_0 \in H_0^1(\Omega), p_0 \geqslant 0 \right\},$$

and the functional J defined on $\mathcal{U}_L \times \mathcal{K}$ by

$$\begin{aligned} J(\chi_\Sigma, p_0) &= \gamma_1 \int_0^T \int_{\mathcal{B}} \chi_\Sigma(x)(p(x,t) - p_{obs}(x,t))^2 dxdt \\ &+ \gamma_2 \frac{\displaystyle\int_0^T \int_{\mathcal{B}} \chi_\Sigma(x) \partial_t p(x,t)^2 dxdt}{\| p_0 \|^2_{H^1(\Omega)}} + \gamma_3 \| p_0 \|^2_{H^1(\Omega)}, \end{aligned} \tag{26}$$

with $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$. We consider the following optimization problem

$$\max_{\chi_\Sigma \in \mathcal{U}_L} \min_{p_0 \in \mathcal{K}} J(\chi_\Sigma, p_0). \tag{27}$$

Proposition 7. *For any fixed $\chi_\Sigma \in \mathcal{U}_L$, every minimizing sequence $(p_0^k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{K}^{\mathbb{N}}$ of J is weakly converging in $H_0^1(\Omega)$ to $p_0^* \in \mathcal{K}$.*

One also has the following result.

Proposition 8. *Suppose that $n = 2$ or 3, and $c_1 = c_2 = 1$. Suppose also that p_{obs} satisfies the following assumption :*

(H_{obs}) : *There exists $p_0^h \in \mathcal{K}$ such that,* $\int_0^T \int_\Sigma (p_{[p_0^h]} - p_{obs})^2 dx\, dt < \int_0^T \int_\Sigma p_{obs}^2 dx\, dt.$

Fix $\chi_\Sigma \in \mathcal{U}_L$. For every minimizing sequence $(p_0^k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{K}^{\mathbb{N}}$ of J, there exist two constants $K_2 > 0$ and $K_3 > 0$ such that $\gamma_1 > K_2\gamma_2 + K_3\gamma_3$ implies

$$\lim_{k\to+\infty} A_2(\chi_\Sigma, p_0^k) \neq 0.$$

Remark 5.

1. *The counterpart of such a regularization is that it may blur the reconstructed image. Nevertheless, the parameter γ_3 can be set very large to reduce this blurring consequence.*
2. *Note also that the limit $p_0^* \in \mathcal{K}$ given by the above proposition may not constitute a minimizer of J in $\mathcal{K}$. Indeed, J is not lower semi-continuous for the weak topology of $H_0^1(\Omega)$.*

Existence results. We now consider a relaxed version of Problem (27). More precisely define the set $\mathcal{U}_L^* = \overline{\text{conv}(\mathcal{U}_L)}$ for the weak-star topology of $L^\infty(\partial\Omega)$, namely

$$\mathcal{U}_L^* = \{a \in L^\infty(\widetilde{\partial\Omega}),\ a(s + \mu\vec{n}(s)) = X(s),\ \forall (s,\mu) \in \partial\Omega \times [0,\varepsilon],\ \text{with } X \in \mathcal{V}_L^*\},$$

with

$$\mathcal{V}_L^* = \{a \in L^\infty(\partial\Omega),\ 0 \leqslant a \leqslant 1,\ \int_{\partial\Omega} a(x) d\mathcal{H}^{n-1} = L\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)\},$$

and the corresponding optimization problem

$$\max_{a\in\mathcal{U}_L^*} \min_{p_0\in\mathcal{K}} J(a, p_0). \tag{28}$$

We then have the following result :

Proposition 9. *Problem* (28) *has a solution in $\mathcal{U}_L^* \times \mathcal{K}$.*

We conclude this paragraph by introducing a convenient regularization in Σ to

compute a solution in $\mathcal{U}_L \times \mathcal{K}$. Define

$$\begin{aligned} J(\chi_\Sigma, p_0) &= \gamma_1 \int_0^T \int_{\mathcal{B}} \chi_\Sigma(x)(p(x,t) - p_{obs}(x,t))^2 dxdt \\ &+ \gamma_2 \frac{\displaystyle\int_0^T \int_{\mathcal{B}} \chi_\Sigma(x) \partial_t p(x,t)^2 dxdt}{\| p_0 \|^2_{H^1(\Omega)}} \\ &+ \gamma_3 \| p_0 \|^2_{H^1(\Omega)} - \gamma_4 \, \mathrm{TV}(\chi_\Sigma) \end{aligned} \tag{29}$$

with $\gamma_4 \in \mathbb{R}_+^*$. The notation TV stands for the total variation operator defined on $L^1(\mathbb{R}^n)$. Then one has the following result.

Proposition 10. *Problem* (27) *has a solution in* $\mathcal{U}_L \times \mathcal{K}$.

Optimality conditions for (25)**.** We now compute the directionnal derivative of J with respect to p_0.

For every admissible perturbation $h \in H_0^1(\Omega)$ of p_0 (that is to say, $h \in H_0^1(\Omega)$ such that for every $\varepsilon > 0$ small enough $(p_0 + h) \in \mathcal{K}$) the directionnal derivative of J with respect to p_0 in direction h is given by

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle D_{p_0} J(\chi_\Sigma, p_0), h \rangle &= \gamma_1 \int_\omega \dot{p}(p - p_{obs}) dxdt - \gamma_2 \frac{\displaystyle\int_\omega \partial_t p^2 \, dxdt}{\| p_0 \|^3_{H^1(\Omega)}} \langle p_0, h \rangle_{H_0^1(\Omega)} \\ &+ \frac{\gamma_2}{\| p_0 \|^2_{H^1(\Omega)}} \int_\omega \partial_t \dot{p} \, \partial_t p \, dxdt + \gamma_3 \langle p_0, h \rangle_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

with

$$\begin{cases} \partial_{tt} \dot{p}(x,t) - \mathrm{div}(c(x) \nabla \dot{p}(x,t)) = 0 & \text{on } \mathcal{B} \times [0,T], \\ \dot{p}(\cdot, 0) = h(x) & \text{on } \mathcal{B}, \\ \partial_t \dot{p}(\cdot, 0) = 0 & \text{on } \mathcal{B}, \\ \dot{p}(x,t) = 0 & \text{on } \partial\mathcal{B} \times [0,T]. \end{cases} \tag{30}$$

The purpose is to express this derivative as a scalar product involving h. Introducing the adjoint state q, defined below as the solution of the partial differential equation (32), one has

$$\tfrac{1}{2} \langle D_{p_0} J(\chi_\Sigma, p_0), h \rangle = \int_{\mathcal{B}} \partial_t q(0,x) h(x) dx + \gamma_4 \langle p_0, h \rangle_{H^1(\Omega)} - \gamma_2 \, \frac{\displaystyle\int_\omega \partial_t p^2 \, dxdt}{\| p_0 \|^3_{H^1(\Omega)}} \, \langle p_0, h \rangle_{H_0^1(\Omega)} \tag{31}$$

with

$$(1)\quad \begin{cases} \partial_{tt}p(x,t) - \mathrm{div}(c(x)\nabla p(x,t)) = 0 & \text{on } \mathcal{B}\times[0,T], \\ p(x,0) = p_0(x) \in \mathcal{K} & \text{on } \mathcal{B}, \\ \partial_t p(x,0) = 0 & \text{on } \mathcal{B}, \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \partial_{tt}q(x,t) - \mathrm{div}(c(x)\nabla q(x,t)) = \gamma_1(p-p_{obs})(x,t)\chi_\Sigma(x) \\ \qquad -\dfrac{\gamma_2\,\partial_{tt}p(x,t)}{\parallel p_0 \parallel^2_{H^1(\Omega)}}\,\chi_\Sigma(x) & \text{on } \mathcal{B}\times[0,T], \\ q(x,t) = 0 & \text{on } \partial\mathcal{B}\times[0,T], \\ q(x,T) = 0 & \text{on } \mathcal{B} \\ \partial_t q(x,T) = -\dfrac{\gamma_2}{\parallel p_0 \parallel^2_{H^1(\Omega)}}\partial_t p(x,T)\chi_\Sigma(x) & \text{on } \mathcal{B}, \end{cases} \tag{32}$$

0.2.3 Numerical simulations

The purpose of this section is to focus on the computation of approximated minimizing sequences $(p_0^k)_{k\in\mathbb{N}}$ for the fixed-Σ problem (25). Those approximated minimizing sequences have, according to Proposition 7, some convergence properties implying numerical stability.

A primal-dual method. Firstly we introduce a convenient method to choose values for the set of parameters $(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$. This method consists in introducing the following minimization problem with constraints :

$$\inf_{p_0\in K} G(p_0) := \int_0^T\int_{\mathcal{B}} \chi_\Sigma(x)(p_{[p_0]}(x,t) - p_{obs}(x,t))^2 dxdt, \tag{33}$$

where K consists in the set of $p_0\in\mathcal{K}$ such that

$$\begin{cases} F_1(p_0) := \dfrac{\displaystyle\int_0^T\int_{\mathcal{B}} \chi_\Sigma(x)\partial_t p_{[p_0]}(x,t)^2 dxdt}{\parallel p_0 \parallel^2_{H^1(\Omega)}} \leqslant \varepsilon_1, \\ \\ F_2(p_0) := \parallel p_0 \parallel^2_{H^1(\Omega)} \leqslant \varepsilon_2, \end{cases} \tag{34}$$

where $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$. This new set of parameters has practical meaning.

We now introduce the augmented Lagrange function (see [FG00]) associated to

the minimization problem (33)

$$\mathcal{L}_r(p_0, \lambda) = G(p_0) + \lambda(F(p_0) - \varepsilon) + \frac{r}{2}\left|(F(p_0) - \varepsilon)^+\right|^2, \tag{35}$$

where $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $F = (F_1, F_2)$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, and $r \in \mathbb{R}_+$ is a fixed parameter. The notation f^+ stands for $\max(f, 0)$.

Using the Karush, Kuhn and Tucker theorem (see for instance [All05]), for every solution p_0^* of problem (33) there exists $\lambda^* \in \mathbb{R}_+^2$ such that (p_0^*, λ^*) is a saddle-point for the Lagrange function $\mathcal{L}_r$. As a consequence, if $r = 0$, every such solution is also a solution for Problem (25) with $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (1, \lambda_1^*, \lambda_2^*)$. This result also holds if $r > 0$ (see [FG00]).

We will implement the standard Uzawa algorithm applied to the augmented Lagrange function $\mathcal{L}_r$, to compute saddle-points.

Numerical results. We nom implement the Uzawa algorithm :

$$\begin{array}{ll} 1. & \lambda_0 \in \mathbb{R}_+ \\ 2. & \mathcal{L}_r(p_0^k, \lambda^n) = \min\limits_{p_0 \in \mathcal{K}} \mathcal{L}_r(p_0, \lambda^k) \\ 3. & \lambda^{k+1} = \max\left(0, \lambda^k + \mu F(p_0^k)\right) \end{array} \tag{36}$$

where μ is a fixed parameter. To compute the second step (the minimization procedure with respect to p_0) we implement a simple gradient descent method in $H_0^1(\Omega)$ and a projection on the convex $\mathcal{K}$. Note that the directional derivative of $\mathcal{L}_r$ with respect to $p_0 \in H_0^1(\Omega)$ match with the directional derivative of J computed in the previous paragraph with the set of parameters $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (1, \lambda_1 + r(F_1(p_0) - \varepsilon_1)^+, \lambda_2 + r(F_1(p_0) - \varepsilon_2)^+)$ and therefore writes

$$\langle D_{p_0}\mathcal{L}_r(p_0, \lambda), h\rangle = -2\int_{\mathcal{B}} \partial_t q(0, x) h(x) dx + \Bigg(2(\lambda_2 + r(F_2(p_0) - \varepsilon_2)^+)$$

$$-2(\lambda_1 + r(F_1(p_0) - \varepsilon_1)^+) \frac{\displaystyle\int_0^T \int_\Sigma \partial_t p^2 dx dt}{\| p_0 \|_{H^1(\Omega)}^3} \Bigg) \langle p_0, h\rangle_{H^1(\Omega)}.$$

Finally, we approximate p and q discretizing each PDE of System (32), and proceeding by finite difference in time and finite element method in space, through the software FreeFem++ (see for instance [Hec12]).

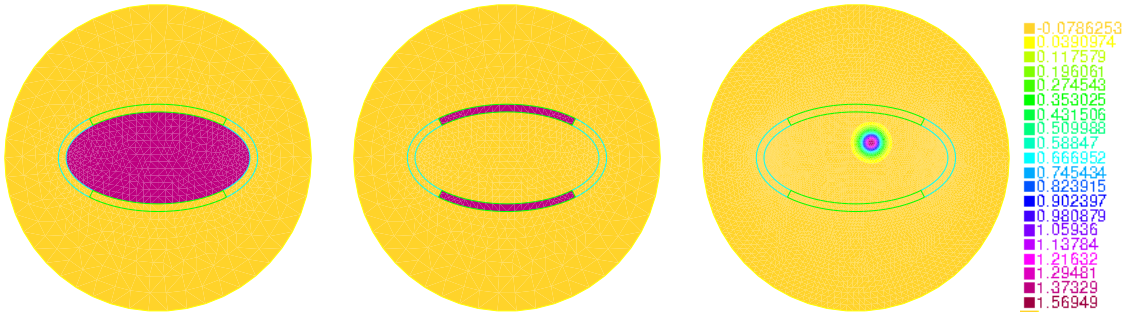


FIGURE 2 – From left to right : The sets Ω and Σ (in red), and the initial condition generating p_{obs}.

As an illustration, we implement the above method in the simple case of a two-dimensional ellipse. We chose the gaussian function represented in Figure 2 as initial condition generating the p_{obs} signal.

Finally, set $\gamma_4 = 0$ and define $a \in \mathcal{U}_L^*$ and $h \in \mathcal{U}_L^*$ an admissible perturbation of a, then using (29) one has

$$D_a J(a, p_0) = \int_{\mathcal{B}} h(x) \int_0^T \left(\gamma_1 (p_{[p_0]}(x,t) - p_{obs}(x,t))^2 + \gamma_2 \frac{(\partial_t p_{[p_0]}(x,t))^2}{\| p_0 \|^2_{H^1(\Omega)}} \right) dt\, dx$$

Consequently, in Figure 3, we call *« directional derivative of J with respect to χ_Σ, with fixed $p_0 = p_0^*$ »* the following quantity :

$$D_{\chi_\Sigma} J(\chi_\Sigma, p_0^*) := \chi_{\widetilde{\partial\Omega}}(\cdot) \int_0^T \left((p_{[p_0^*]}(\cdot,t) - p_{obs}(\cdot,t))^2 + \gamma_2 \frac{(\partial_t p_{[p_0^*]}(\cdot,t))^2}{\| p_0^* \|^2_{H^1(\Omega)}} \right) dt,$$

where $\gamma_2 = \lambda_1^* + r(F_1(p_0^*) - \varepsilon_1)^+$.

We finally set $\varepsilon_1 = 0.7$ and $\varepsilon_2 = 1.5$. Results are represented in Figure 3.

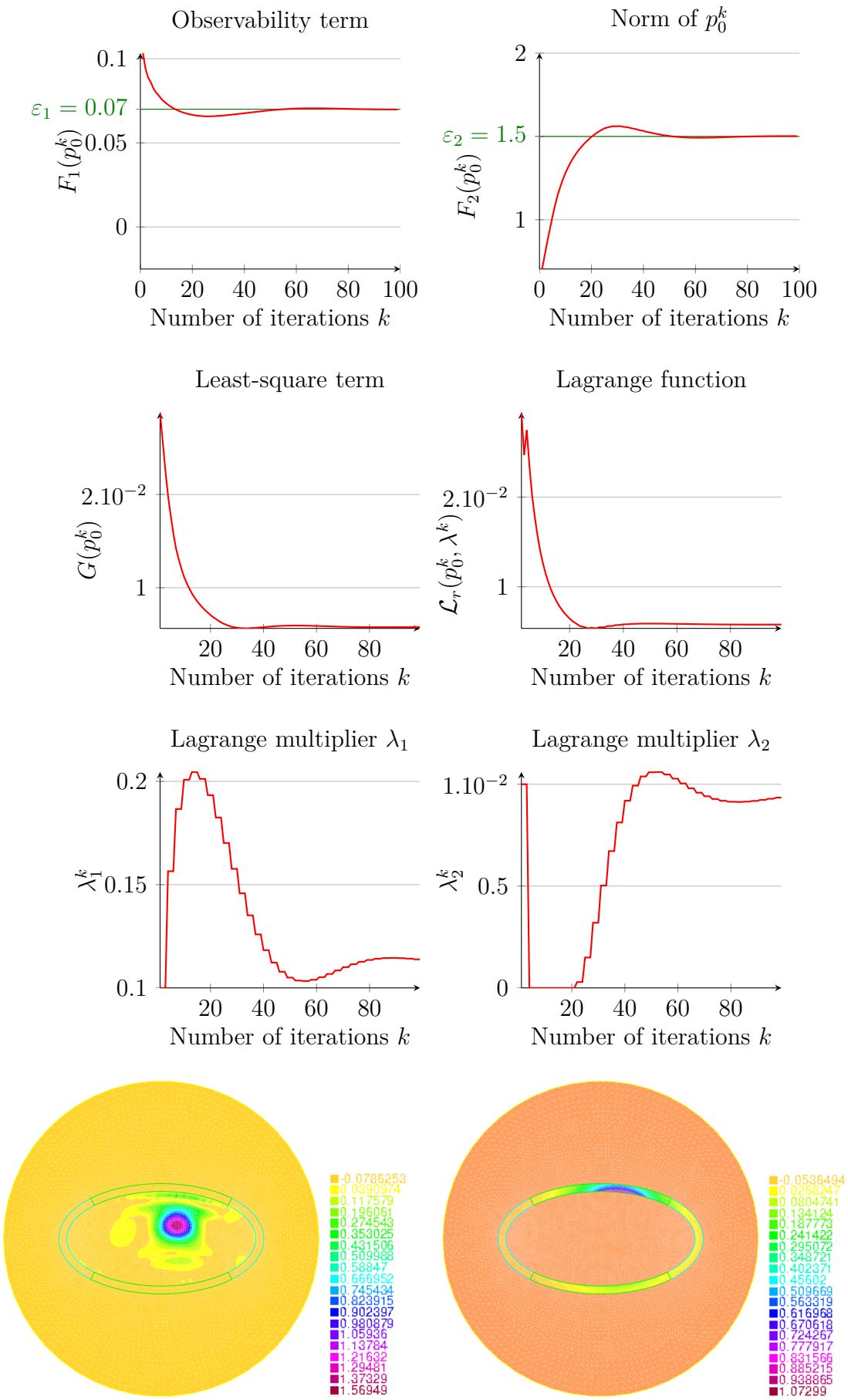


FIGURE 3 – Uzawa algorithm for the augmented Lagrange function. Below : the computed approximate solution p_0^* and the directional derivative of J with respect to χ_Σ, with fixed $p_0 = p_0^*$.

Notations

- $\mathbb{R}$: Le corps des réels ;
- $\mathbb{Z}$: Le groupe des entiers relatifs ;
- $\mathbb{N}$: Le groupe des entiers naturels ;
- $\mathbb{N}_0^{\mathbb{N}}$: L'ensemble des multi-indices, sous-ensemble constitué des éléments de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ à support fini ;
- $B(x_0, R)$: La boule de centre x_0 et de rayon R ;
- $\mathcal{S}^{n-1}$: La sphère unité dans $\mathbb{R}^n$;
- $\partial\Omega$: le bord de Ω ;
- $\mathcal{H}^{n-1}$: La mesure de Hausdorff $n-1$ dimensionnelle sur le bord de $\partial\Omega$;
- χ_Ω : La fonction indicatrice de l'ensemble Ω ;
- $\mathrm{Per}_\Omega(A)$: Périmètre du domaine A pour la métrique de l'ensemble Ω ;
- $\mathrm{diam}\, A$: Diamètre du domaine A ;
- δ_{x_0} : La distribution de Dirac en x_0.
- $\mathrm{supp}(p)$: La fonction support de p.
- $< x, y >_H$: Le produit scalaire de x et y dans l'espace de Hilbert H ;
- $\| x \|_H$: La norme de x dans l'espace de Hilbert H ;
- $\mathcal{C}^p(\Omega)$: L'ensemble des fonctions p fois continûment dérivables sur l'ouvert Ω ;
- $\mathcal{C}_0^p(\Omega)$ Le sous-ensemble de $\mathcal{C}^p(\Omega)$ constitué des fonctions à support compact dans Ω ;
- $L^p(X)$: L'ensemble des fonctions f telles que $|f|^p$ est intégrable sur X pour la mesure de Lebesgue ;
- $L^1_{loc}(X)$: L'ensemble des fonctions dont la restriction à tout compact de X est intégrable pour la mesure de Lebesgue ;
- $H^s(\Omega)$: L'espace de Sobolev des fonctions de $L^2(\Omega)$ dont toutes les dérivées d'ordre inférieur au multi-indice s sont dans $L^2(\Omega)$;

- $H_0^s(\Omega)$: Le sous-ensemble de $H^s(\Omega)$, dont la trace sur le bord de Ω est nulle.
- $f * g$: Le produit de convolution des fonctions f et g dans $\mathbb{R}^n$;
- $S \otimes T$: Le produit tensoriel des distributions S et T.
- $\mathrm{clos}(\mathcal{U})$: Adhérence de $\mathcal{U}$ pour la topologie ambiante ;
- $\partial_{x_i} u$: Dérivée de la fonction u par rapport à la variable x_i ;
- ∇u : Gradient de la fonction u : $\nabla u = (\partial_{x_1} u, \cdots, \partial_{x_n} u)$;
- $\mathrm{div}\,\phi$: Divergence de la fonction $\phi = (\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n) \in \mathcal{C}^1(\Omega)^n$, $\mathrm{div}\,\phi = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}\phi_i(x)$;
- Δu : Laplacien de la fonction u dans $\mathcal{C}^2(\Omega \subset \mathbb{R}^n)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\Delta u = \mathrm{div}(\nabla u)$;
- $\mathrm{TV}(a)$: Variation totale de la fonction a définie sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\mathrm{TV}(a) = \sup\left\{\int_\Omega a\ \mathrm{div}\,\phi\, dx; \phi = (\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n) \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)^n, \| \phi \|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant 1\right\}$;
- $D(A)$: Domaine de définition de l'opérateur différentiel A ;
- $\mathcal{D}'(\Omega)$: L'ensemble des distributions sur Ω ;
- $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$: L'ensemble des distributions tempérées sur $\mathbb{R}^n$, formes linéaires sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$;
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$: L'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$ à décroissance rapide, ainsi que toutes leurs dérivées ;

Notations propres au chapitre 1

- Ω est un domaine ouvert borné et connexe de $\mathbb{R}^n$ dont le bord $\partial\Omega$ est supposé de régularité Lipschitz ;
- $\nu(x)$: La normale sortante au domaine Ω en $x \in \partial\Omega$;
- $\mathcal{U}_L = \{a \in L^\infty(\partial\Omega), 0 \leqslant a \leqslant 1, a(1-a) = 0 \text{ p.p}, \int_{\partial\Omega} a(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x) = L\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)\}$;
- $\overline{\mathcal{U}_L} = \{a \in L^\infty(\partial\Omega), 0 \leqslant a \leqslant 1, \int_{\partial\Omega} a(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x) = L\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)\}$;

Notations propres au chapitre 2

- Ω est un domaine ouvert borné, convexe de $\mathbb{R}^n$ dont le bord $\partial\Omega$ est supposé de régularité $\mathcal{C}^1$;
- $\vec{n}(x)$: La normale sortante au domaine Ω en $x \in \partial\Omega$;
- $\widetilde{\partial\Omega}$: La couronne de Ω définie par $\{s + \mu\vec{n}(s), s \in \partial\Omega, \mu \in [0, \varepsilon]\}$;
- $\mathcal{B}$: Une boule de rayon R contenant Ω.

- p_{obs} : Pression mesurée sur le bord du corps à imager ;
- H : Espace Hilbertien ambiant, ici $H_0^1(\mathcal{B}) \times L^2(\mathcal{B})$;
- $\mathcal{U}_L = \{a \in L^\infty(\widetilde{\partial\Omega}), a(s+\mu\vec{n}(s)) = X(s), \forall (s,\mu) \in \partial\Omega \times [0,\varepsilon], \text{ avec } X \in \mathcal{V}_L\}$;
- $\mathcal{V}_L = \{a \in L^\infty(\partial\Omega), 0 \leqslant a \leqslant 1, a(1-a) = 0 \text{ p.p}, \int_{\partial\Omega} a(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x) = L\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)\}$;
- $\mathcal{U}_L^* = \{a \in L^\infty(\widetilde{\partial\Omega}), a(s+\mu\vec{n}(s)) = X(s), \forall (s,\mu) \in \partial\Omega \times [0,\varepsilon], \text{ avec } X \in \mathcal{V}_L^*\}$;
- $\mathcal{V}_L^* = \{a \in L^\infty(\partial\Omega), 0 \leqslant a \leqslant 1, \int_{\partial\Omega} a(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x) = L\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)\}$;

Chapitre 1

Observabilité frontière optimale pour l'équation des ondes

1.1 Introduction

1.1.1 Observabilité frontière de l'équation des ondes

Soit T un réel strictement positif, et Ω un domaine ouvert borné et connexe de $\mathbb{R}^n$ dont le bord $\partial\Omega$ est supposé de régularité Lipschitz. On considère l'équation des ondes homogènes sur $[0,T]\times\Omega$ avec conditions de Dirichlet au bord :

$$\begin{cases} \partial_{tt}y(t,x)-\Delta y(t,x)=0 & \forall (t,x)\in[0,T]\times\Omega,\\ y(t,x)=0 & \forall (t,x)\in[0,T]\times\partial\Omega,\\ y(0,x)=y^0(x),\ \partial_t y(0,x)=y^1(x) & \forall x\in\Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

Pour toute condition initiale $(y^0,y^1)\in H_0^1(\Omega,\mathbb{C})\times L^2(\Omega,\mathbb{C})$, il existe une unique solution faible y de (1.1) dans $y\in C^0([0,T],H_0^1(\Omega,\mathbb{C}))\cap C^1([0,T],L^2(\Omega,\mathbb{C}))$ (voir par exemple [Bre10]).

On munit la frontière $\partial\Omega$ de la mesure de Hausdorff usuelle $\mathcal{H}^{n-1}$ (voir définition 1). Notons que lorsque $\partial\Omega$ et le sous ensemble $\Gamma\subset\partial\Omega$ sont suffisamment réguliers, la notation $\mathcal{H}^{n-1}(\Gamma)$ désigne l'aire de la surface Γ (voir annexe A.1.1).

Soit Γ un sous-ensemble de $\partial\Omega$, $\mathcal{H}^{n-1}$-mesurable, on définit la variable d'observation z_Γ par

$$\forall (t,x)\in[0,T]\times\partial\Omega,\quad z_\Gamma(t,x)=\chi_\Gamma(x)\frac{\partial y}{\partial\nu}(t,x), \tag{1.2}$$

où χ_Γ est la fonction caractéristique de la surface Γ, ν la normale unitaire sortante à Ω et $\frac{\partial y}{\partial\nu}$ la dérivée normale de y sur $\partial\Omega$.

On rappelle que le système (1.1)-(1.2) est dit observable en temps T s'il existe une constante C positive telle que l'inégalité

$$C\|(y^0, y^1)\|^2_{H_0^1(\Omega,\mathbb{C})\times L^2(\Omega,\mathbb{C})} \leqslant \int_0^T \int_{\partial\Omega} \chi_\Gamma(x) \left|\frac{\partial y}{\partial \nu}(t,x)\right|^2 d\mathcal{H}^{n-1}dt, \tag{1.3}$$

est vérifiée pour toutes conditions initiales $y^0 \in H_0^1(\Omega,\mathbb{C})$ et $y^1 \in L^2(\Omega,\mathbb{C})$. Dans ce cas on appelle constante d'observabilité du système la plus grande constante C possible dans (1.3), nous la noterons ici $C_T(\chi_\Gamma)$.

Remarque 1. *1. L'inégalité* (1.3) *peut se démontrer pour certains domaines* Γ*, par une méthode des multiplicateurs. On pourra se référer par exemple à [Ho86, Mor75]. On sait par exemple que cette propriété d'observabilité est vérifiée si* Γ *est de la forme*

$$\Gamma = \{x \in \partial\Omega \mid \langle x - x^0, \nu(x)\rangle > 0\},$$

avec $x^0 \in \Omega$ *quelconque (voir dans les rappels, le théorème 5).*

2. Notons que dans la classe des domaines $\mathcal{C}^\infty$*, cette inégalité d'observabilité est vérifiée si et seulement si* (Γ, T) *satisfait la Condition de Controle Géométrique (GCC) (introduite dans [BLR92]) :*

Tout rayon se propageant à vitesse 1 dans Ω, suivant les lois de l'optique géométrique, rencontre au moins une fois la surface Γ en temps T.

On peut retrouver l'ensemble de ces résultats d'observabilité pour l'équation des ondes par exemple dans [TW09, Zua07].

Considérons maintenant le problème inverse consistant à déterminer les conditions initiales (y^0, y^1) à partir de la variable d'observation z_Γ. Dans tout ce chapitre le but est de proposer un domaine d'observation Γ qui soit optimal pour ce problème inverse, en un sens à définir. Dans un premier temps, lorsqu'il y a observabilité, la constante d'observabilité définie par (1.3) conditionne le rapport entre la norme de la variable d'observation et celle des conditions initiales qu'il s'agit de reconstruire. Il s'ensuit que la constante d'observabilité rend compte du caractère bien posé du problème inverse. Ainsi, la constante d'observabilité constitue un critère raisonable lorsqu'il s'agit de modéliser l'influence du lieu d'observation Γ sur la qualité de la reconstruction des conditions initiales.

1.1.2 Le problème d'optimisation de forme

D'après la partie précédente, la constante d'observabilité s'écrit

$$C_T(\chi_\Gamma) =$$

$$\inf\left\{\frac{\int_0^T \int_{\partial\Omega} \chi_\Gamma(x)\left|\frac{\partial y}{\partial \nu}(t,x)\right|^2 d\mathcal{H}^{n-1}\,dt}{\|(y^0,y^1)\|^2_{H_0^1(\Omega,\mathbb{C})\times L^2(\Omega,\mathbb{C})}} \;\Big|\; (y^0,y^1)\in H_0^1(\Omega,\mathbb{C})\times L^2(\Omega,\mathbb{C})\setminus\{(0,0)\}\right\}. \tag{1.4}$$

Dans ce chapitre, nous proposons une méthode d'optimisation basée sur une décomposition spectrale de la solution y de (1.1). On se fixe donc une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ composée de fonctions propres $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ du Laplacien Dirichlet sur Ω, associées aux valeurs propres négatives $(-\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$.

L'étude qui suit porte sur le problème d'optimisation suivant :

> **Problème d'optimisation de forme** *On considère le probème de maximisation de la fonctionnelle*
>
> $$J(\chi_\Gamma) = \inf_{j\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{\lambda_j}\int_{\partial\Omega}\chi_\Gamma(x)\left(\frac{\partial\phi_j}{\partial\nu}(x)\right)^2 d\mathcal{H}^{n-1}, \tag{1.5}$$
>
> *par rapport aux surfaces $\Gamma\subset\partial\Omega$, sous la contrainte d'aire $\mathcal{H}^{n-1}(\Gamma) = L\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)$.*

La suite de ce paragraphe justifie ce modèle, et explicite en particulier le lien entre $C_T(\chi_\Gamma)$ et $J(\chi_\Gamma)$.

La solution y de (1.1) peut se développer de la manière suivante :

$$y(t,x) = \sum_{j=1}^{+\infty}\left(a_j e^{i\sqrt{\lambda_j}t} + b_j e^{-i\sqrt{\lambda_j}t}\right)\phi_j(x), \tag{1.6}$$

avec

$$a_j = \int_\Omega \frac{1}{2}\left(y^0(x) - \frac{i}{\sqrt{\lambda_j}}y^1(x)\right)\phi_j(x)\,dx, \quad b_j = \int_\Omega \frac{1}{2}\left(y^0(x) + \frac{i}{\sqrt{\lambda_j}}y^1(x)\right)\phi_j(x)\,dx \tag{1.7}$$

pour tout $j\in\mathbb{N}^*$. Notons dans ce cas, que

$$\|(y^0,y^1)\|^2_{H_0^1(\Omega,\mathbb{C})\times L^2(\Omega,\mathbb{C})} = \sum_{j=1}^{+\infty}\lambda_j(|a_j|^2+|b_j|^2).$$

En utilisant cette expression de y, la constante d'observabilité $C_T(\chi_\Gamma)$ s'écrit

$$C_T(\chi_\Gamma) = \inf_{\substack{(\sqrt{\lambda_j}a_j),(\sqrt{\lambda_j}b_j)\in\ell^2(\mathbb{C}) \\ ((a_j),(b_j))\neq(0,0)}} \frac{\displaystyle\int_0^T \int_\Gamma \left| \sum_{j=1}^{+\infty} \left(a_j e^{i\sqrt{\lambda_j}t} + b_j e^{-i\sqrt{\lambda_j}t} \right) \frac{\partial \phi_j}{\partial \nu}(t,x) \right|^2 d\mathcal{H}^{n-1}\, dt}{\sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j (|a_j|^2 + |b_j|^2)}.$$

On a alors, grâce à un changement de variable

$$C_T(\chi_\Gamma) = \inf_{\substack{(\widetilde{a}_j),(\widetilde{b}_j)\in\ell^2(\mathbb{C}) \\ \sum_{j=1}^{+\infty}(|\widetilde{a}_j|^2+|\widetilde{b}_j|^2)=1}} \int_0^T \int_\Gamma \left| \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{\widetilde{a}_j}{\sqrt{\lambda_j}} e^{i\sqrt{\lambda_j}t} + \frac{\widetilde{b}_j}{\sqrt{\lambda_j}} e^{-i\sqrt{\lambda_j}t} \right) \frac{\partial \phi_j}{\partial \nu}(t,x) \right|^2 d\mathcal{H}^{n-1}\, dt.$$

Notons dans un premier temps que du point de vue applicatif, cette constante C_T est particulièrement pessimiste. De fait, dans C_T on considère l'observation de *toutes* les conditions initiales possibles. Dans la pratique, quant à déterminer le positionnement optimal de capteurs pour un problème inverse quelconque, il est pertinent de maximiser la norme de la variable d'observation *en moyenne* par rapport à un très grand nombre de conditions initiales possibles, plutôt que sur toutes.

Par ailleurs, sous sa forme initiale, du fait des termes croisés le problème d'optimisation de la constante d'observabilité est particulièrement difficile à étudier. Notons, comme dans [PTZ13b, PTZ12], que cette difficulté est équivalente au problème ouvert qui consiste à déterminer la meilleure constante dans l'inégalité d'Ingham (voir [Ing36, JTZ97]).

Ainsi suivant les travaux antérieurs [PTZ13b, PTZ12, PTZ15], nous proposons comme fonctionnelle objectif, au lieu de C_T, une *constante d'observabilité randomisée*, définie comme l'espérance de $C_T(\chi_\Gamma)$ sur une séléction aléatoire des coefficients $\widetilde{a}_j$ et $\widetilde{b}_j$. L'idée de considérer un séléction aléatoire de données initiales, et donc la constante d'observabilité randomisée, a été introduite en premier dans [PTZ12] et s'inspire largement des travaux de N. Burq and N. Tzvetkov sur certaines équations aux dérivées partielles non-linéaires avec données initiales aléatoires (voir [Bur11, BT08a, BT08b]).

Sélectionner aléatoirement les données initiales dans (1.1) consiste ici à remplacer

$C_T(\chi_\Gamma)$ par

$$C_{T,\mathrm{rand}}(\chi_\Gamma) = \inf_{\substack{(\widetilde{a}_j),(\widetilde{b}_j)\in\ell^2(\mathbb{C}) \\ \sum_{j=1}^{+\infty}(|\widetilde{a}_j|^2+|\widetilde{b}_j|^2)=1}} \int_A \int_0^T \int_\Gamma \left| \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{\beta_{1,j}^\omega \widetilde{a}_j}{\sqrt{\lambda_j}} e^{i\lambda_j t} + \frac{\beta_{2,j}^\omega \widetilde{b}_j}{\sqrt{\lambda_j}} e^{-i\lambda_j t} \right) \frac{\partial \phi_j}{\partial \nu}(x) \right|^2 d\mathcal{H}^{n-1}\, dt\, dp_\nu, \tag{1.8}$$

où $(\beta_{1,j}^\omega)_{j\in\mathbb{N}^*}$ et $(\beta_{2,j}^\omega)_{j\in\mathbb{N}^*}$ sont deux suites de variables aléatoires indépendantes sur un espace de probabilité $(A,\mathbb{P})$, ayant pour moyenne 0, variance 1, et une décroissance super-exponentielle [1]. Par exemple, des variables aléatoires indépendantes de Bernouilli conviennent (on pourra se référer à [Bur11, BT08a] pour plus de détails sur les possibilités de *"randomisation"* et leurs propriétés).

Pour tout $(y^0,y^1)\in H_0^1(\Omega,\mathbb{C})\times L^2(\Omega,\mathbb{C})$, posons

$$a_j^\omega = \beta_{1,j}^\omega a_j \quad \text{et} \quad b_j^\omega = \beta_{1,j}^\omega b_j.$$

ainsi que la solution y_ω de (1.1) définie par

$$y_\omega(t,x) = \sum_{j=1}^{+\infty} \left(a_j^\omega e^{i\sqrt{\lambda_j}t} + b_j^\omega e^{-i\sqrt{\lambda_j}t} \right) \phi_j(x),$$

La constante $C_{T,\mathrm{rand}}$ est alors précisément la meilleure constante dans l'inégalité d'observabilité pour l'équation (1.1) avec données initiales aléatoires :

$$C_{T,\mathrm{rand}} \|(y^0,y^1)\|^2_{H_0^1(\Omega,\mathbb{C})\times L^2(\Omega,\mathbb{C})} \leqslant \mathbb{E}\left(\int_0^T \int_\Gamma \left| \frac{\partial y_\omega}{\partial \nu}(t,x) \right|^2 d\mathcal{H}^{n-1} dt \right), \tag{1.9}$$

pour tout $y^0(\cdot)\in H_0^1(\Omega,\mathbb{C})$ et $y^1(\cdot)\in L^2(\Omega,\mathbb{C})$.

Proposition 2. *Soit Γ un sous-ensemble $\mathcal{H}^{n-1}$-mesurable de $\partial\Omega$. On a*

$$C_{T,rand}(\chi_\Gamma) = T \inf_{j\in\mathbb{N}^*} \left\{ \frac{1}{\lambda_j} \int_{\partial\Omega} \chi_\Gamma(x) \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial \nu}(x) \right)^2 d\mathcal{H}^{n-1} \right\}. \tag{1.10}$$

Démonstration. Par simple application du théorème de Fubini dans (1.8) et du fait que pour tout j et k dans $\mathbb{N}^*$, m et p dans $\{1,2\}$, on a $\mathbb{E}(\beta_{j,m}^\omega \beta_{k,p}^\omega) = \delta_{jk}\delta_{mp}$ (où δ désigne le symbole de Kronecker) et $\mathbb{E}(\beta_j^\omega)=0$, les termes croisés de la forme $a_j a_k$,

1. On dit qu'une fonction décroit de manière super-exponentielle lorsqu'elle décroit plus vite que toute fonction exponentielle

$b_j b_k$ avec $j \neq k$, et $a_j b_k$, dans (1.8) disparaissent. Il s'ensuit que

$$C_{T,\mathrm{rand}}(\chi_\Gamma) = \inf_{\substack{(a_j),(b_j)\in\ell^2(\mathbb{C}) \\ \sum_{j=1}^{+\infty}(|a_j|^2+|b_j|^2)=1}} \sum_{j=1}^{+\infty} \int_0^T \left(\left| \frac{a_j^2}{\lambda_j} e^{2i\lambda_j t} \right| + \left| \frac{b_j^2}{\lambda_j} e^{-2i\lambda_j t} \right| \right) dt \int_{\partial\Omega} \chi_\Gamma(x) \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial \nu}(x) \right)^2 d\mathcal{H}^{n-1}$$

Notons (ρ_j, θ_j) les coordonées polaires de (a_j, b_j). Puisque $a_j = \rho_j \cos\theta_j$ et $b_j = \rho_j \sin\theta_j$, on a

$$C_{T,\mathrm{rand}}(\chi_\Gamma) \;=\; T \inf_{\substack{(\rho_j)\in\ell^2(\mathbb{R}) \\ \sum_{j=1}^{+\infty}\rho_j^2=1}} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\rho_j^2}{\lambda_j} \int_{\partial\Omega} \chi_\Gamma(x) \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial \nu}(x) \right)^2 d\mathcal{H}^{n-1}.$$

□

Remarque 2. *La maximisation de la constante d'observabilité $C_T(\chi_\Gamma)$, quoique d'intérêt discutable en pratique, est mathématiquement intéressante. Il semble pourtant que celle-ci soit particulièrement difficile, tant théoriquelment que numériquement, en particulier du fait des termes croisés $\int_\Gamma \frac{\partial \phi_j}{\partial \nu}(x) \frac{\partial \phi_k}{\partial \nu}(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x)$ (voir partie 1.4). Notons enfin qu'on a $C_T(\chi_\Gamma) \leqslant C_{T,rand}(\chi_\Gamma)$.*

1.1.3 L'état de l'art

Du point de vue de l'ingénierie, le but de cette étude consiste à optimiser le nombre, la position et le placement de capteurs de sorte à améliorer l'estimation de l'état d'un système. Les champs d'applications d'une telle étude sont nombreux. Parmi eux mentionnons par exemple la mécanique acoustique, la disposition d'actionneurs piezoéléctriques, ou le contrôle des vibrations de structures mécaniques. Il faut mentionner également les conséquences de cette étude dans l'optimisation du conditionnement des problèmes inverses. De fait une bonne disposition de capteurs garantit une bonne qualité de reconstruction. Mentionnons par exemple les travaux de [DHH+12], dans lesquels les auteurs montrent que, dans le cas de la tomographie par impédance électrique, la qualité de la reconstruction de l'objet à imager est fortement dépendante du positionnement de l'electrode.

La littérature sur l'observabilité optimale est abondante dans le contexte des applications à l'ingénierie, où il s'agit principalement d'optimiser la position de contrôleurs ou d'actionneurs (mentionnons par exemple [ACEJ01] dans le cas d'actionneurs sur le bord du domaine). Dans ce contexte il s'agit très souvent de recourir à certaines restrictions du problème général, de manière à considérer un problème

en dimension finie. Ces restrictions sont de plusieurs natures. Il peut s'agir dans un premier temps de discrétiser le problème continu, comme par exemple dans [AC01, EFDC08] pour les procédés de réaction-diffusion et de transport. Il peut s'agir également de restreindre l'ensemble des formes admissibles à un espace de dimension finie (un nombre fixé de capteurs de formes prescrites par exemple), mentionnons dans ce cadre les travaux [AD06, HMW80, Mor11, WPPR00]. Concernant une approche plus générale du problème d'observabilité optimale, il existe peu de contributions théoriques. La plupart des publications concernent, pour un domaine Γ donné, la détermination d'un contrôle optimal sur ce domaine. Mentionnons par exemple [CWPD12, CBdN08, SK05] où le cas du contrôle optimal sur un sous-domaine du bord est plus précisément étudié.

L'approche développée dans cette thèse s'attache à conserver toute sa généralité au problème d'optimisation, et plus particulièrement, nous n'effectuons pas d'hypothèse restrictive sur la classe des formes admissibles de capteurs.

Plusieurs articles ont étudié une version relaxée du problème d'optimisation de forme. Il s'agit par exemple dans [MP11, AMP10] de position optimale d'actionneurs pour l'équation de la chaleur. Mentionnons également [MP14, MZ10] où le problème de forme optimale d'actionneurs à données initiales fixées est étudié d'un point de vue numérique.

Cette thèse se situe dans la continuation de la série de travaux [PTZ$^+$13c, PTZ13a, PTZ13b, PTZ12, PTZ15], dont nous présentons brièvement ci-dessous les problématiques. En amont de ces travaux il faut citer [HH03, HH05] qui constituent les premiers articles à notre connaissance où l'on peut trouver une étude mathématique générale du problème consistant à déterminer la forme et la position optimales d'un sous-ensemble d'amortissement de mesure prescrite. Dans ces travaux les auteurs proposent également un caractérisation complète des solutions et mettent en lumière le phénomène d'instabilité numérique dit de *spillover*. Les travaux [PTZ$^+$13c] explorent la complexité de domaines d'observation optimale pour des conditions initiales très régulières. Les travaux [PTZ13b, PTZ12], prolongent les résultats cités plus haut, et étudient la généralisation des problème d'optimisation de placement de capteurs, pour les équations elliptiques en dimension quelconque. C'est dans ces travaux notamment que les auteurs introduisent la notion de *constante d'observabilité randomisée*, consistant, comme ici, à considérer une sélection aléatoire de conditions initiales. S'ensuit des considération nouvelles d'ergodicité du domaine étudié. Cette approche aléatoire de l'observabilité repose en grande partie sur les travaux de N. Burq et N. Tzvetkov sur certaines équations aux dérivées partielles non-linéaires avec données initiales aléatoires (voir [Bur11, BT08a, BT08b]). Enfin

dans [PTZ15], le problème similaire d'optimisation du placement des capteurs est étudié dans le cas des équations parabolique.

1.2 Étude du problème d'optimisation de forme (1.5)

1.2.1 Recherche de la valeur optimale pour le problème (1.5)

On définit l'ensemble suivant

$$\mathcal{U}_L = \left\{ \chi_\Gamma, \text{ avec } \Gamma \subset \partial\Omega \text{ de mesure de Hausdorff } \mathcal{H}^{n-1}(\Gamma) = L\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) \right\} \quad (1.11)$$

et l'on considère dans cette partie, le problème (1.5) qui s'écrit enfin,

$$\sup_{\chi_\Gamma \in \mathcal{U}_L} J(\chi_\Gamma).$$

Puisque $\mathcal{U}_L$ n'est pas compact pour la topologie faible étoile de $L^\infty(\partial\Omega, [0,1])$ (voir par exemple [HP06]), on étudie dans un premier temps une version relaxée du problème (1.5). On définit

$$\overline{\mathcal{U}_L} = \left\{ a \in L^\infty(\partial\Omega; [0,1]),\ \int_{\partial\Omega} a(x)\, d\mathcal{H}^{n-1} = L\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) \right\}. \quad (1.12)$$

l'adhérence de $\mathcal{U}_L$ pour la topologie faible étoile de $L^\infty(\partial\Omega, [0,1])$ (voir la proposition 2).

Il s'ensuit une version relaxée du problème d'optimisation de forme (1.5) :

$$\sup_{a \in \overline{\mathcal{U}_L}} J(a), \quad (1.13)$$

avec

$$J(a) = \inf_{j \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{\lambda_j} \int_{\partial\Omega} a(x) \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial \nu}(x) \right)^2 d\mathcal{H}^{n-1}. \quad (1.14)$$

Proposition 3. *Soit $L \in]0,1[$, le problème (1.13) admet au moins une solution $a^* \in \overline{\mathcal{U}_L}$.*

Démonstration. Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, la fonctionnelle

$$a \in \overline{\mathcal{U}_L} \mapsto \frac{1}{\lambda_j} \int_{\partial\Omega} a(x) \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial \nu}(x) \right)^2 d\mathcal{H}^{n-1}$$

est linéaire et continue pour la topologie faible étoile de $L^\infty(\partial\Omega, [0,1])$. Ainsi, $a \mapsto J(a)$ est semi-continue supérieurement pour cette topologie en tant qu'infimum de fonctions continues et linéaires. Prenons une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ maximisante pour J. Puisque $\overline{\mathcal{U}_L}$ est compact pour la topologie faible étoile de $L^\infty(\partial\Omega, [0,1])$, on en déduit que cette suite converge pour cette topologie (à sous-suite près) vers un élément $a^* \in \overline{\mathcal{U}_L}$. Enfin par semi-continuité supérieure de J on a

$$J(a^*) \geqslant \limsup_{k\in\mathbb{N}} J(a_k) = \sup_{a\in\overline{\mathcal{U}_L}} J(a).$$

□

On introduit les hypothèses suivantes :

Borne Uniforme (UB). Il existe $A > 0$ tel que pour tout $j \in \mathbb{N}^*$,

$$\left\| \frac{\partial \phi_j}{\partial \nu} \right\|^2_{L^\infty(\partial\Omega)} \leqslant A\lambda_j. \tag{1.15}$$

Propriété "Weak Quantum Ergodicity of Boundary values" (WQEB). Il existe une sous-suite de la suite de mesures $\frac{1}{\lambda_j}\left(\frac{\partial\phi_j}{\partial\nu}\right)^2 d\mathcal{H}^{n-1}$ qui converge au sens vague[2] vers la mesure uniforme $\frac{2}{n|\Omega|}d\mathcal{H}^{n-1}$.

Propriété "Quantum Uniform Ergodicity of Boundary values" (QUEB). Toute la suite de mesures $\frac{1}{\lambda_j}\left(\frac{\partial\phi_j}{\partial\nu}\right)^2 d\mathcal{H}^{n-1}$ converge au sens vague vers la mesure uniforme $\frac{2}{n|\Omega|}d\mathcal{H}^{n-1}$.

Remarque 3. *1. Les trois propriétés (UB), (WQEB) et (QUEB) dépendent fortement du choix de la base de fonctions propres choisie.*

2. Dans [Bur03, HZ04] les auteurs prouvent que pour les domaines Ω ergodiques et $\mathcal{C}^1$ par morceaux (voir définition 11), la propriété (WQEB) est vérfiée. Plus précisément dans ce cadre il existe une sous-suite de densité un[3] des mesures $\frac{1}{\lambda_j}\left(\frac{\partial\phi_j}{\partial\nu}\right)^2 d\mathcal{H}^{n-1}$, telle que pour tout opérateur semi-classique A d'ordre 0 (voir annexe A.3) sur $\partial\Omega$, on a

$$\lim_{j\to+\infty} \lambda_j^{-1} \langle A(\partial_\nu\phi_j), \partial_\nu\phi_j\rangle \longrightarrow \frac{4}{|\mathcal{S}^{n-1}|\ |\Omega|} \int_{T^*(\partial\Omega)} a(y,\eta)\sqrt{1-|\eta|^2}d\eta d\mathcal{H}^{n-1}(y)$$

2. cf (A.1).

3. On dit qu'une suite est de densité un lorsqu'elle est indéxée par un ensemble $\mathcal{I} \subset \mathbb{N}^*$ tel que $\#\{j \in \mathcal{I} \,|\, j \leqslant N\}/N$ converge vers 1 quand N tends vers $+\infty$.

avec $\mathcal{S}^{n-1}$ la sphère unité dans $\mathbb{R}^n$ et a est le symbole de l'opérateur A. Enfin, si $a(y,\eta) = a(y) \in L^\infty(\partial\Omega, [0,1])$, ceci fournit immédiatement (WQEB).

3. *Notons que si l'hypotèse (WQEB) est satisfaite pour des domaines ergodiques $\mathcal{C}^1$ par morceaux, il est plus difficile de trouver des domaines vérifiant l'hypothèse (QUEB). Dans les parties suivantes, on étudie un certain nombre de cas particuliers de domaines dans $\mathbb{R}^2$. Il s'agira bien entendu de vérifer quelles hypothèses ces domaines vérifient. On propose ici un bref résumé des conclusions établies plus loin, pour les familles usuelles de fonctions propres : Tous les rectangles vérifient (WQEB) mais aucun ne vérifie (QUEB) (voir les parties 1.2.2 et 1.2.4). Le disque vérifie (QUEB), et donc évidemment (WQEB) (voir partie 1.2.3). Enfin les secteurs angulaires d'ouverture $\theta \leqslant \pi/2$ ne vérifient pas (QUEB). On proposera dans la partie 1.2.4 une version plus faible de (WQEB) vérifiée par les secteurs angulaires, à savoir*

$$\forall a \in \overline{\mathcal{U}_L}, \quad J(a) \leqslant \frac{2L\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)}{n|\Omega|}.$$

4. *Traitons brièvement le cas de la boule unité de $\mathbb{R}^3$. D'après [Fol95], dans ce cas, les valeurs propres du Laplacien Dirichlet sont définies par*

$$\lambda_k^{l,m} = (\eta_k^l)^2$$

et les fonctions propres corresondantes par

$$\phi_k^{l,m}(r,\theta,\varphi) = c_k^{l,m} r^{-1/2} J_{k+1/2}(\eta_k^l r)\cos(m\varphi)P_k^m(\cos(\theta)), \tag{1.16}$$

avec $k \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{N}^*, -k \leqslant m \leqslant k$, et (r,θ,φ) les coordonées sphériques. Par ailleurs $J_{k+1/2}$ désigne ici la fonction de Bessel de premier espèce et d'ordre $k+1/2$, et η_k^l est le l-ème zero de $J_{k+1/2}$. Enfin P_k^m désigne le polynome de Legendre, et

$$c_k^{l,m} = 2^{1-\delta_0(m)\frac{1}{2}} \left|J_{k+3/2}(\eta_k^l)\right|^{-1} \sqrt{\frac{(2k+1)(k-|m|)!}{4\pi(k+|m|)!}}.$$

Un calcul simple fournit

$$\frac{1}{\lambda_k^{l,m}}\left(\frac{d\phi_k^{l,m}(1,\theta,\varphi)}{dr}\right)^2 = 4^{1-\delta_0(m)\frac{1}{2}}\left(\frac{(2k+1)(k-|m|)!}{4\pi(k+|m|)!}\right)\cos^2(m\varphi)P_k^m(\cos(\theta))^2.$$

Considérant $m = 1$, et $k \to +\infty$, la limite n'est pas uniforme sur $\partial\Omega$, il s'en-

suit que pour ce choix de base, la boule unité de $\mathbb{R}^3$ ne satisfait pas (QUEB). Pour autant, dans [Fol95], l'auteur précise que dans la définition des fonctions propres (1.16)*, au lieu de $c_k^{l,m}\cos(m\varphi)P_k^m(\cos(\theta))$, on peut choisir n'importe quelle base d'harmoniques sphériques. Par ailleurs, dans ce cas les quantités $\frac{1}{\lambda_k^{l,m}}\left(\frac{d\phi_k^{l,m}(1,\theta,\varphi)}{dr}\right)^2$ sont précisément égales aux carré des harmoniques sphériques choisies. Enfin, dans [Zel92] les auteurs montrent que presque toute base d'harmoniques sphériques vérifient une propriété d'ergodicité impliquant (WQEB). Il s'ensuit que la boule unité de $\mathbb{R}^3$ vérifie (WQEB).*

Dans l'optique de déterminer la valeur optimale de J, notons que

$$\forall a \in \overline{\mathcal{U}_L}, \quad J(a) \leqslant \lim_{j\to+\infty} \int_{\partial\Omega} \frac{a(x)}{\lambda_j}\left(\frac{\partial\phi_j}{\partial\nu}(x)\right)^2 d\mathcal{H}^{n-1},$$

et si Ω vérifie les hypothèses (WQEB) et (UB), d'après le théorème Porte-manteau (théorème 2 en annexe), on a

$$\max_{a\in\overline{\mathcal{U}_L}} J(a) \leqslant \frac{2L\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)}{n|\Omega|}. \tag{1.17}$$

Dans ce qui suit on montre que cette inégalité est en fait une égalité, si Ω satisfait certaines conditions géométriques.

A cette fin, introduisons l'identité suivante (due à F. Rellich en 1940, dans [Rel40]). Pour tout domaine Ω borné et $\mathcal{C}^{1,1}$ ou convexe, on a

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \quad 2 = \int_{\partial\Omega} \frac{\langle x, \nu(x)\rangle}{\lambda_j}\left(\frac{\partial\phi_j}{\partial\nu}(x)\right)^2 d\mathcal{H}^{n-1}\,{}^4. \tag{1.18}$$

Définition 1 (Fonctions de Rellich)**.** Pour tout $x_0 \in \overline{\Omega}$, on définit $a^*_{x_0} \in L^\infty(\partial\Omega, \mathbb{R})$ par la relation :

$$\forall x \in \partial\Omega, \quad a^*_{x_0}(x) = \frac{L\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)}{n|\Omega|}\langle (x - x_0), \nu(x)\rangle. \tag{1.19}$$

Ces fonctions seront appelées *fonctions de Rellich*, et *fonctions de Rellich admissibles* si par ailleurs elles sont dans $\overline{\mathcal{U}_L}$.

4. On trouve dans [Liu07], un recensement précis des identités *"de type Rellich"* ainsi que de leurs utilisation dans les problèmes à frontière libre.

En utilisant les equations (1.18) et (1.19), on a pour tout $j \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_{\partial\Omega} \frac{a^*_{x_0}(x)}{\lambda_j} \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial \nu}(x)\right)^2 d\mathcal{H}^{n-1} = \frac{2L\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)}{n|\Omega|}.$$

Proposition 4. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ borné, connexe et $\mathcal{C}^{1,1}$ ou convexe. Supposons que*

(HQE) Ω satisfait les propriétés (UB) et (WQEB) ;

(HRel) Il existe $x_0 \in \overline{\Omega}$ tel que la fonction de Rellich $a^*_{x_0}$ est admissible.

Alors

$$\max_{a \in \overline{\mathcal{U}_L}} J(a) = J(a^*_{x_0}) = \frac{2L\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)}{n|\Omega|}.$$

Démonstration. Soit $j \in \mathbb{N}^*$, on notera μ_j la mesure de Radon définie sur $\partial\Omega$ par

$$\mu_j = \frac{1}{\lambda_j}\left(\frac{\partial \phi_j}{\partial \nu}\right)^2 d\mathcal{H}^{n-1}.$$

D'après l'hypothèse (WQEB), la suite $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ converge au sens vague vers la mesure uniforme $\frac{2}{n|\Omega|}\, d\mathcal{H}^{n-1}$.

Rappelons que la convergence au sens vague des mesures $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ est plus faible que la convergence des fonctions $\frac{1}{\lambda_j}\left(\frac{\partial \phi_j}{\partial \nu}\right)^2$ pour la topologie faible de $L^1(\partial\Omega)$ (voir section A.1.1). Néammoins, la propriété (WQEB) est ici équivalente à l'existence d'une sous-suite $\left(\int_\Gamma \frac{1}{\lambda_{j_k}}\left(\frac{\partial \phi_{j_k}}{\partial \nu}(x)\right)^2 d\mathcal{H}^{n-1}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ convergeant vers $2\frac{L\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)}{n|\Omega|}$ pour tout borélien $\Gamma \subset \partial\Omega$, tel que $\mathcal{H}^{n-1}(\Gamma) = L\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)$ et $\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Gamma) = 0$, avec $\partial\Gamma$ designant la frontière de Γ comme sous-espace de $\partial\Omega$. Ceci est une conséquence du théorème Porte-manteau (théorème 2), utilisant à la fois l'hypothèse (UB), et le fait que Ω est borné.

Enfin ceci s'étend à $\overline{\mathcal{U}_L}$ et on a, pour tout $a \in \overline{\mathcal{U}_L}$,

$$J(a) \leqslant \lim_{k\to+\infty} \int_\Gamma \frac{a(x)}{\lambda_{j_k}}\left(\frac{\partial \phi_{j_k}}{\partial \nu}(x)\right)^2 d\mathcal{H}^{n-1} = \frac{2L\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)}{n|\Omega|},$$

ce qui donne la conclusion attendue, en utilisant l'hypothèse *(HRel)*. □

Remarque 4. *Concernant l'hypothèse (HRel), notons que si Ω est convexe, il est immédiat que pour tout $x_0 \in \Omega$, $a^*_{x_0}(x) \geqslant 0$, $\forall x \in \partial\Omega$. Par ailleurs, par définition de $a^*_{x_0}$ la contrainte d'aire $\int_{\partial\Omega} a^*_{x_0}(x) d\mathcal{H}^{n-1} = L\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)$ est toujours satisfaite. Ainsi, pour Ω convexe, l'appartenance de $a^*_{x_0}$ à $\overline{\mathcal{U}_L}$ est équivalente à la condition $a^*_{x_0}(x) \leqslant 1$, pour tout x dans $\partial\Omega$. Or cette condition n'est pas toujours vérfiée. Dans la partie 1.2.4 étudiera le comportement de la valeur optimale pour J lorsque la*

propriété (HRel) n'est pas vérifiée. Enonçons à présent une condition géométrique garantissant que (HRel) soit satisfaite.

Si $x_0 = 0$, si Ω est convexe et s'il existe deux boules B_e et B_i de $\mathbb{R}^n$, centrées en x_0 de rayons R_e et R_i telles que

$$B_i \subset \Omega \subset B_e \quad \text{et} \quad \left(\frac{R_e}{R_i}\right)^n \leqslant \frac{n^2}{4L},$$

alors a_0^* appartiens $\overline{\mathcal{U}_L}$.

En effet, la convexité de Ω donne $0 \leqslant \langle x, \nu(x)\rangle \leqslant R_e$ pour tout $x \in \partial\Omega$. Rappelons également que dans la classe des domaines convexes, le volume et le périmètre sont des fonctions croissantes pour l'inclusion. Il s'ensuit que $|B_i| \leqslant |\Omega|$ et $\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) \leqslant \mathcal{H}^{n-1}(\partial B_e)$, de sorte que

$$a_0^* \leqslant \frac{4L}{n^2}\left(\frac{R_e}{R_i}\right)^n \leqslant 1 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

pour tout $x \in \Omega$.

La figure 1.1 représente quelques exemples de domaines Ω en dimension 2 pour lesquels $a_0^* \in \overline{\mathcal{U}_L}$. De même pour certains domaines Ω admissibles, la figure 1.2 produit les valeurs de a_0^* sur $\partial\Omega$.

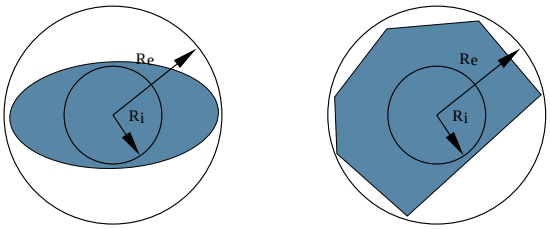


Figure 1.1 – Deux domaines Ω en dimension 2 pour lesquels $a_0^* \in \overline{\mathcal{U}_L}$, (L=1/4).

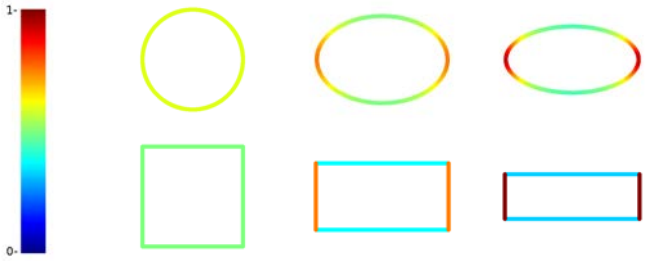


Figure 1.2 – Exemples de densités optimales a_0^* dans $\overline{\mathcal{U}_L}$ pour certains domaines Ω admissibles ($n = 2, L = 1/4$).

Nous énonçons à présent le résultat principal de cette section :

Théorème 1 (No-Gap)**.** *Soit Ω un domaine ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à bord $\mathcal{C}^{1,1}$ ou convexe, tel que $\partial\Omega$ constitue une variété stratifiée*[5]*. Supposons de plus que Ω satisfait les propriétés (QUEB), (UB) et (HRel). Alors,*

$$\sup_{\chi_\Gamma \in \mathcal{U}_L} J(\chi_\Gamma) = \sup_{a \in \overline{\mathcal{U}_L}} J(a). \tag{1.20}$$

Par ailleurs on exhibe une suite maximisante dans la preuve qui suit.

Démonstration. Cette preuve s'inspire directement de [PTZ12, Theorem 6]. Pour des raisons de simplicité, dans toute cette preuve, on utilisera la notation $M = \frac{2L\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)}{n|\Omega|}$ et lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, au lieu de $\mathcal{H}^{n-1}(A)$, on désignera par $|A|$ l'aire de la surface $A \subset \partial\Omega$.

On peut supposer sans perte de généralité que $x_0 = 0$. Alors, d'après les hypthèses (QUEB), (UB) et *(HRel)*, $\partial\Omega \ni x \mapsto \frac{M}{2}\langle x, \nu(x)\rangle$ appartient à l'ensemble $\overline{\mathcal{U}_L}$ et constitue une solution du problème relaxé (1.13). On introduit la notation suivante

$$I_j(\Gamma) = \int_\Gamma \left(\frac{1}{\lambda_j}\frac{\partial\phi_j}{\partial\nu}(x)\right)^2 d\mathcal{H}^{n-1},$$

pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, de sorte que $J(\chi_\Gamma) = \inf_{j\in\mathbb{N}^*} I_j(\Gamma)$.

Utilisant les conditions géométriques sur Ω, (QUEB), (UB) et *(HRel)*, et d'après la proposition 4,

$$\begin{aligned}\sup_{\chi_\Gamma\in\mathcal{U}_L}\inf_{j\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{\lambda_j}\int_{\partial\Omega}\chi_\Gamma(x)\left(\frac{\partial\phi_j}{\partial\nu}(x)\right)^2 d\mathcal{H}^{n-1} &\leqslant \sup_{a\in\overline{\mathcal{U}_L}}\inf_{j\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{\lambda_j}\int_{\partial\Omega}a(x)\left(\frac{\partial\phi_j}{\partial\nu}(x)\right)^2 d\mathcal{H}^{n-1}\\ &= M.\end{aligned}$$

Afin de prouver que cette dernière égalité est bien une égalité, on se propose de construire une suite $(\chi_{\Gamma_k})_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}_L^{\mathbb{N}}$ de telle façon que $(J(\chi_{\Gamma_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers M.

Soit Γ_0 un ouvert borné et Lipschitz de $\partial\Omega$ tel que $\mathcal{H}^{n-1}(\Gamma_0) = L\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)$. Supposons que $J(\Gamma_0) < M$ (sinon la preuve s'achève ici). Dans ce cas, d'après la propriété (QUEB), il existe $j_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$I_j(\Gamma_0) \geqslant M - \frac{1}{4}(M - J(\Gamma_0)), \tag{1.21}$$

pour tout $j > j_0$.

5. Voir dans les rappels la définition 8. Cette hypothèse permet en particulier de définir une distance géodésique sur les strates de $\partial\Omega$, et de ce fait, de définir pour cette distance les notions des boules, diamètre, rayons intérieurs etc...

Puisque $\partial\Omega$ et Γ_0 sont supposés Lipschitz, Γ_0 et $\partial\Omega\backslash\Gamma_0$ satisfont une propriété de δ-cone [6]. On considère alors deux partitions

$$\overline{\Gamma}_0 = \bigcup_{i=1}^{K} F_i \quad \text{and} \quad \Gamma_0^c = \bigcup_{i=1}^{\tilde{K}} \widetilde{F}_i, \tag{1.22}$$

de $\overline{\Gamma_0}$ et respectivement Γ_0^c, telles que F_i et $\widetilde{F_i}$ soient contenue dans une strate de $\partial\Omega$. Par la propriété de δ-cone, il existe $c_\delta > 0$ ainsi qu'une famille $(F_i)_{1\leqslant i\leqslant K}$ (respectivement $(\widetilde{F}_i)_{1\leqslant i\leqslant \tilde{K}}$) comme définie ci-dessus, tels que, pour $|F_i|$ suffisamment petit on ait

$$\forall i \in \{1,\cdots,K\} \ \left(\text{resp. } \forall i \in \{1,\cdots,\tilde{K}\}\right), \ \frac{\eta_i}{\operatorname{diam}(F_i)} \geqslant c_\delta \ \left(\text{resp. } \frac{\widetilde{\eta}_i}{\operatorname{diam}(\widetilde{F}_i)} \geqslant c_\delta\right), \tag{1.23}$$

avec η_i (respectivement $\widetilde{\eta}_i$) designant le rayon intérieur [7] de F_i (respectivement $\widetilde{F}_i$), et $\operatorname{diam}(F_i)$ (respectivement $\operatorname{diam}(\widetilde{F}_i)$) le diamètre de F_i (respectivement $\widetilde{F}_i$). Enfin pour tout $i \in \{1,\ldots,K\}$ (respectivement pour tout $i \in \{1,\ldots,\tilde{K}\}$), il existe $\xi_i \in F_i$ (respectivement $\tilde{\xi}_i \in \widetilde{F}_i$) tel que $B(\xi_i,\eta_i/2) \subset F_i \subset B(\xi_i,\eta_i/c_\delta)$ (respectivement $B(\tilde{\xi}_i,\widetilde{\eta}_i/2) \subset \widetilde{F}_i \subset B(\tilde{\xi}_i,\widetilde{\eta}_i/c_\delta)$).

En choisissant pour ξ_i et $\tilde{\xi}_i$ des points de Lebesgue des fonctions $\left(\frac{\partial\phi_j}{\partial\nu}\right)^2$, pour tout $j \leqslant j_0$ on obtient

$$\int_{F_i} \frac{1}{\lambda_j}\left(1-\frac{M}{2}\langle x,\nu\rangle\right)\left(\frac{\partial\phi_j}{\partial\nu}(x)\right)^2 d\mathcal{H}^{n-1} = \\ \frac{1}{\lambda_j}\left(|F_i| - \int_{F_i}\frac{M}{2}\langle x,\nu\rangle d\mathcal{H}^{n-1}\right)\left(\frac{\partial\phi_j}{\partial\nu}(\xi_i)\right)^2 + \mathrm{o}(|F_i|) \quad \text{quand } \eta_i \to 0,$$

pour tout $j \leqslant j_0$, $i \in \{1,\ldots,K\}$ et

$$\int_{\widetilde{F}_i} \frac{M}{2\lambda_j}\langle x,\nu\rangle\left(\frac{\partial\phi_j}{\partial\nu}(x)\right)^2 d\mathcal{H}^{n-1} = \\ \frac{1}{\lambda_j}\left(\int_{\widetilde{F}_i}\frac{M}{2}\langle x,\nu\rangle\, d\mathcal{H}^{n-1}\right)\left(\frac{\partial\phi_j}{\partial\nu}(\tilde{\xi}_i)\right)^2 + \mathrm{o}(|\widetilde{F_i}|) \quad \text{quand } \ \widetilde{\eta}_i \to 0,$$

pour tout $i \in \{1,\ldots,\tilde{K}\}$. En posant $\eta = \max\left(\max_{1\leqslant i\leqslant K}\operatorname{diam}(F_i), \max_{1\leqslant i\leqslant \tilde{K}}\operatorname{diam}(\widetilde{F}_i)\right)$ et

6. Rappelons qu'une surface lisse A dans $\mathbb{R}^n$, vérifie une propriété de δ-cone lorsque pour tout $x \in A$, il existe un vecteur unitaire ξ_x tel que $C(y,\xi_x,\delta) \subset A$ pour tout $y \in \overline{A} \cap B(x,\delta)$, où $C(y,\xi_x,\delta) = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \langle z-y,\xi\rangle \geqslant \cos\delta\|z-y\| \text{ et } 0 < \|z-y\| < \delta\}$, voir par exemple [HP06].

7. En d'autre terme le plus grand rayon des boules contenues dans F_i.

utilisant $\sum_{i=1}^{K}|F_i| = L|\partial\Omega|$ et $\sum_{i=1}^{\tilde{K}}|\widetilde{F}_i| = (1-L)|\partial\Omega|$, on obtient $\sum_{i=1}^{K}\mathrm{o}(|F_i|) = \sum_{i=1}^{\tilde{K}}\mathrm{o}(|\widetilde{F}_i|) = \mathrm{o}(1)$ quand $\eta \to 0$. Ainsi on a

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_0}\frac{1}{\lambda_j}\left(1-\frac{M}{2}\right)\langle x,\nu\rangle\left(\frac{\partial\phi_j}{\partial\nu}(x)\right)^2 d\mathcal{H}^{n-1} = \\ \sum_{i=1}^{K}\frac{1}{\lambda_j}\left(|F_i| - \int_{F_i}\frac{M\langle x,\nu\rangle}{2}d\mathcal{H}^{n-1}\right)\left(\frac{\partial\phi_j}{\partial\nu}(\xi_i)\right)^2 + \mathrm{o}(1),\\ \int_{\Gamma_0}\frac{M}{2\lambda_j}\langle x,\nu\rangle\left(\frac{\partial\phi_j}{\partial\nu}(x)\right)^2 d\mathcal{H}^{n-1} = \\ M - \sum_{i=1}^{\tilde{K}}\left(\int_{\widetilde{F}_i}\frac{M}{2\lambda_j}\langle x,\nu\rangle\, d\mathcal{H}^{n-1}\right)\left(\frac{\partial\phi_j}{\partial\nu}(\widetilde{\xi}_i)\right)^2 + \mathrm{o}(1),\end{aligned} \tag{1.24}$$

pour tout $j \leqslant j_0$.

Posons maintenant

$$\begin{aligned} h_i &= |F_i| - \int_{F_i}\frac{M}{2}\langle x,\nu\rangle\, d\mathcal{H}^{n-1}, \quad i\in\{1,\cdots,K\}\\ \text{et}\qquad \ell_i &= \int_{\widetilde{F}_i}\frac{M}{2}\langle x,\nu\rangle\, d\mathcal{H}^{n-1}, \quad i\in\{1,\cdots,\tilde{K}\}\end{aligned}$$

Alors, pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit on définit la perturbation Γ^ε de Γ_0 par

$$\Gamma^\varepsilon = \left(\Gamma_0 \setminus \bigcup_{i=1}^{K}\overline{B(\xi_i,\varepsilon_i)}\right) \quad \bigcup \quad \bigcup_{i=1}^{\tilde{K}} B(\tilde{\xi}_i,\widetilde{\varepsilon}_i),$$

avec ε_i et $\widetilde{\varepsilon}_i$ choisis de sorte que $|B(\xi_i,\varepsilon_i)| = \varepsilon^{n-1}h_i$ et $|B(\widetilde{\xi}_i,\widetilde{\varepsilon}_i)| = \varepsilon^{n-1}\ell_i$. Ceci est possible pourvu que

$$0 < \varepsilon < \min\left(\min_{1\leqslant i\leqslant K}\frac{\eta_i|B(\xi_i,1)|^{1/(n-1)}}{h_i^{1/(n-1)}}, \min_{1\leqslant i\leqslant \tilde{K}}\frac{\widetilde{\eta}_i|B(\tilde{\xi}_i,1)|^{1/(n-1)}}{\ell_i^{1/(n-1)}}\right).$$

Par inégalité isodiamétrique [8] ainsi qu'un argument de compacité, on obtient l'existence d'une consante $V_n > 0$ (ne dépendant que de Ω) telle que $|F_i| \leqslant V_n(\mathrm{diam}(F_i))^{(n-1)}$ pour tout $i \in \{1,\cdots,K\}$, et $|\tilde{F}_i| \leqslant V_n(\mathrm{diam}(\tilde{F}_i))^{(n-1)}$ pour tout $i \in \{1,\cdots,\tilde{K}\}$, indépendamment de la partition considérée. Du fait de la compacité de $\partial\Omega$, il existe également une constante $v_n > 0$ (ne dépendant que de Ω) telle que $|B(x,1)| \geqslant v_n$

8. L'inégalité isodiamétrique stipule que, pour tout compact K de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, on a $|K| \leqslant |B(0,\mathrm{diam}(K)/2)|$. Le même résultat est vrai, à constante multiplicative près, pour une variété stratifiée compacte, munie de la mesure $\mathcal{H}^{n-1}$ et de la distance géodésique sur chaque strate.

pour tout $x \in \partial\Omega$. Posons alors $\varepsilon_0 = \min(1, c_\delta v_n / V_n^{1/(n-1)})$. D'après (1.23), on a

$$\frac{\eta_i |B(\xi_i, 1)|^{1/(n-1)}}{h_i^{1/(n-1)}} \geqslant \frac{v_n}{(1-L)^{1/(n-1)} V_n^{1/(n-1)}} \frac{\eta_i}{\operatorname{diam}(F_i)} \geqslant \varepsilon_0,$$

pour tout $i \in \{1, \cdots, K\}$, et

$$\frac{\widetilde{\eta}_i |B(\tilde{\xi}_i, 1)|^{1/(n-1)}}{\ell_i^{1/(n-1)}} \geqslant \varepsilon_0,$$

pour tout $i \in \{1, \cdots, \tilde{K}\}$. Cette perturbation est bien définie pour $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
|\Gamma^\varepsilon| &= |\Gamma_0| - \sum_{i=1}^{K} |B(\xi_i, \varepsilon_i)| + \sum_{i=1}^{\tilde{K}} |B(\tilde{\xi}_i, \widetilde{\varepsilon}_i)| \\
&= |\Gamma_0| - \varepsilon^{n-1} \sum_{i=1}^{K} h_i + \varepsilon^{n-1} \sum_{i=1}^{\tilde{K}} \ell_i \\
&= |\Gamma_0| - \varepsilon^{n-1} \left(\sum_{i=1}^{K} \left(|F_i| - \int_{F_i} \frac{M}{2} \langle x, \nu \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1} \right) - \sum_{i=1}^{\tilde{K}} \left(\int_{\widetilde{F}_i} \frac{M}{2} \langle x, \nu \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1} \right) \right) \\
&= |\Gamma_0| = L\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega).
\end{aligned}$$

Estimations basses fréquences. On écrit

$$\begin{aligned}
I_j(\Gamma^\varepsilon) &= \int_{\Gamma^\varepsilon} \frac{1}{\lambda_j} \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial \nu}(x) \right)^2 d\mathcal{H}^{n-1} \\
&= I_j(\Gamma_0) - \sum_{i=1}^{K} \int_{B(\xi_i, \varepsilon_i)} \frac{1}{\lambda_j} \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial \nu}(x) \right)^2 d\mathcal{H}^{n-1} + \sum_{i=1}^{\tilde{K}} \int_{B(\tilde{\xi}_i, \widetilde{\varepsilon}_i)} \frac{1}{\lambda_j} \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial \nu}(x) \right)^2 d\mathcal{H}^{n-1}
\end{aligned}$$

et sachant que ξ_i et $\tilde{\xi}_i$ sont des points de Lebesgue des fonctions $\left(\frac{\partial \phi_j}{\partial \nu}\right)^2$, on a

$$\begin{aligned}
I_j(\Gamma^\varepsilon) &= I_j(\Gamma_0) - \sum_{i=1}^{K} \frac{|B(\xi_i, \varepsilon_i)|}{2\lambda_j} \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial \nu}(\xi_i) \right)^2 + \mathrm{o}(|B(\xi_i, \varepsilon_i)|) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{\tilde{K}} \frac{|B(\tilde{\xi}_i, \widetilde{\varepsilon}_i)|}{2\lambda_j} \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial \nu}(\tilde{\xi}_i) \right)^2 + \mathrm{o}(|B(\tilde{\xi}_i, \widetilde{\varepsilon}_i)|) \\
&= I_j(\Gamma_0) - \varepsilon^{n-1} \left(\sum_{i=1}^{K} \frac{h_i}{2\lambda_j} \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial \nu}(\xi_i) \right)^2 - \sum_{i=1}^{\tilde{K}} \frac{\ell_i}{2\lambda_j} \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial \nu}(\tilde{\xi}_i) \right)^2 \right) + \varepsilon^{n-1} \mathrm{o}(1) \quad (1.25)
\end{aligned}$$

en utilisant que $\sum_{i=1}^{K} \mathrm{o}(|B(\xi_i, \varepsilon_i)|) + \sum_{i=1}^{\tilde{K}} \mathrm{o}(|B(\widetilde{\xi}_i, \widetilde{\varepsilon}_i)|) = \varepsilon^{n-1}\mathrm{o}(1)$ quand $\varepsilon \to 0$, et donc également quand $\eta \to 0$.

Ainsi d'après (1.24),

$$I_j(\Gamma^\varepsilon) = \widetilde{I}_j(\Gamma_0) + \varepsilon^{n-1}\,(M - I_j(\Gamma_0)) + \varepsilon^{n-1}\,\mathrm{o}(1) \qquad \text{as } \eta \to 0,$$

pour tout $j \leqslant j_0$ et tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$. Ensuite, puisque $\varepsilon_0^{n-1} \leqslant 1$,

$$I_j(\Gamma^\varepsilon) \geqslant J(\Gamma_0) + \varepsilon^{n-1}(M - J(\Gamma_0)) + \varepsilon^{n-1}\,\mathrm{o}(1) \qquad \text{as } \eta \to 0, \tag{1.26}$$

pour tout $j \leqslant j_0$ et $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$.

En choisissant les partitions $(F_i)_{1\leqslant i\leqslant K}$ et $(\widetilde{F}_i)_{1\leqslant i\leqslant \tilde{K}}$ sufisamment fines, c'est-à-dire pour $\eta > 0$ suffisamment petit, on peut écrire que

$$I_j(\Gamma^\varepsilon) \geqslant J(\Gamma_0) + \frac{\varepsilon^{n-1}}{2}(M - J(\Gamma_0)), \tag{1.27}$$

pour tout $j \leqslant j_0$ et tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$.

Estimations hautes fréquences. D'après (UB), la suite $\left(\frac{1}{\lambda_j}\left(\frac{\partial \phi_j}{\partial \nu}\right)^2\right)_{j\in\mathbb{N}^*}$ est bornée par une constante $A > 0$ dans $L^\infty(\partial\Omega)$. Par conséquent

$$\begin{aligned} |I_j(\Gamma^\varepsilon) - I_j(\Gamma_0)| &= \left| \int_{\partial\Omega} (\chi_{\Gamma^\varepsilon}(x) - \chi_{\Gamma_0}(x)) \frac{1}{\lambda_j} \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial \nu}(x)\right)^2 d\mathcal{H}^{n-1} \right| \\ &\leqslant A \left(\int_{\partial\Omega} |\chi_{\Gamma^\varepsilon}(x) - \chi_{\Gamma_0}(x)|\, d\mathcal{H}^{n-1} \right), \end{aligned}$$

pour tout $j \in \mathbb{N}$ et tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$. Par ailleurs,

$$\int_{\partial\Omega} |\chi_{\Gamma^\varepsilon}(x) - \chi_{\Gamma_0}(x)|\, d\mathcal{H}^{n-1} = \varepsilon^{n-1} \left(\sum_{i=1}^{K} h_i + \sum_{i=1}^{\tilde{K}} \ell_i \right) \leqslant 2\varepsilon^{n-1} L \mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega),$$

et donc $|I_j(\Gamma^\varepsilon) - I_j(\Gamma_0)| \leqslant 2A^2\varepsilon^{n-1}L|\partial\Omega|$. Enfin, en posant

$$\varepsilon_1 = \min\left(\varepsilon_0, \left(\frac{(M - J(\Gamma_0))}{2^3 A^2 L \mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)} \right)^{\frac{1}{n-1}} \right),$$

il s'ensuit, d'après (1.21), que

$$I_j(\Gamma^\varepsilon) \geqslant M - \frac{1}{2}(M - J(\Gamma_0)) \tag{1.28}$$

pour tout $j \geqslant j_0$ et tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_1[$.

Conclusion. On utilise maintenant le fait que $J(\Gamma_0) + \frac{\varepsilon^{n-1}}{2}(M - J(\Gamma_0)) \leqslant M - \frac{1}{2}(M - J(\Gamma_0))$ pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ (et donc pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_1[$). En combinant (1.27) et (1.28), ceci impose que

$$J(\Gamma^\varepsilon) \geqslant J(\Gamma_0) + \frac{\varepsilon^{n-1}}{2}(M - J(\Gamma_0)), \tag{1.29}$$

pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_1[$.

En particulier, cette inégalité est vraie pour ε tel que $\varepsilon^{n-1} = C_1 \min(C_2, L - \widetilde{J}(\Gamma_0))$, avec $C_1 = 1/8A^2L\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)$ et $C_2 = (1/C_1)\min(1, (c_\delta v_n)^{n-1}/V_n)$, toutes deux constantes positives. Pour cette valeur particulière de ε, on pose $\Gamma_1 = \Gamma^\varepsilon$, ce qui assure d'avoir

$$J(\Gamma_1) \geqslant J(\Gamma_0) + \frac{C_1}{2}\min(C_2, M - J(\Gamma_0))\,(M - J(\Gamma_0)). \tag{1.30}$$

Notons que les différentes constantes ne dépendent que de L, A et $\partial\Omega$, et par construction Γ_1 satisfait une propriété de δ-cône.

Maintenant, si $J(\Gamma_1) \geqslant M$ la preuve s'achève ici.

Sinon on applique la même procédure pour Γ_1. D'après la propriété (QUEB), on sait qu'il existe un nouveau j_0 tel que (1.21) est vérifiée pour Γ_1 au lieu de Γ_0. Ceci nous donne une borne inférieure pour les hautes fréquences. Les basses fréquences $j \leqslant j_0$ sont bornées inférieurement comme précédemment, ce qui fournit une estimations similaire à (1.27) pour Γ_1. Ainsi, on a l'existence d'un domaine Γ_2 tel que l'equation (1.30) est vérifiée avec Γ_1 remplacé par Γ_2 et Γ_0 par Γ_1.

De cette façon, on construit une suite $(\Gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $|\Gamma_k| = L\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)$, et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$J(\Gamma_{k+1}) \geqslant J(\Gamma_k) + \frac{C_1}{2}\min(C_2, M - J(\Gamma_k))\,(M - J(\Gamma_k)).$$

Si $J(\Gamma_k) < M$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, alors la suite $(J(\Gamma_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante et bornée supéreurement par M, et converge vers M, ce qui conclut cette preuve.

□

Remarque 5. *Comme dans la remarque 3, on précise ici les propriétés de No-Gap pour des cas particuliers de domaines Ω dans $\mathbb{R}^2$, étudiés plus loin.*

- *Le cas du disque est couvert par les hypothèses du théorème 1.*
- *Pour certains domainesne vérifiant pas les hypothèses du théorème 1, on peut quand même établir la propriété de No-Gap* (1.20) *:*

Pour la base usuelle de fonctions propres, les rectangles ne vérifient pas la propriété (QUEB), néammoins la propriété de No-Gap est établie, même dans les cas où (HRel) n'est pas vérifiée non plus (cf partie 1.2.4).
De même, pour la base usuelle de fonctions propres les secteurs angulaires d'ouverture $\theta \leqslant \pi/2$ ne vérifient pas la propriété (QUEB). Néammoins on montrera que ces domaines vérifient la propriété de No-Gap lorsque l'hypothèse (HRel) n'est pas vérifiée (cf partie 1.2.4).

Les parties 1.2.2 et 1.2.3 suivantes sont dédiées à l'étude explicite et complète de deux cas particuliers.

1.2.2 Le cas du carré

Supposons $\Omega =]0, \pi[^2 \subset \mathbb{R}^2$. Pour des raisons de clarté nous noterons tout au long de cette partie $\partial\Omega = \Sigma$. On introduit également les notations suivantes $\Sigma_{x,0} = \Sigma|_{\{y=0\}}$, $\Sigma_{x,\pi} = \Sigma|_{\{y=\pi\}}$, $\Sigma_{0,y} = \Sigma|_{\{x=0\}}$ et $\Sigma_{\pi,y} = \Sigma|_{\{x=\pi\}}$. Ainsi que $\Sigma_1 = \Sigma_{x,0} \cup \Sigma_{x,\pi}$ et $\Sigma_2 = \Sigma_{0,y} \cup \Sigma_{\pi,y}$:

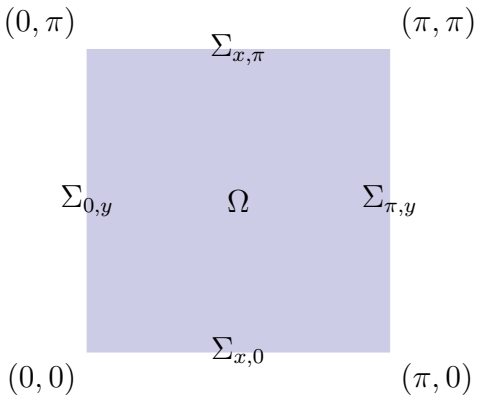


Figure 1.3 – Notations

Introduisons la base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ constituée de fonctions propres de $-\Delta$ choisie :

$$\phi_{n,k}(x,y) = \frac{2}{\pi}\sin(nx)\sin(ky),$$

ainsi que les valeurs propres correspondantes $\lambda_{n,k}^2 = n^2 + k^2$.

Remarque 6. *De cette expression on déduit en particulier que le carré vérifie les hypothèses (UB), (WQEB), mais pas (QUEB).*

On a dans ce cas

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial\phi_{n,k}}{\partial\nu}\right)^2 &= \tfrac{4k^2}{\pi^2}\sin(nx)^2 \quad \text{sur } \Sigma_{x,0}\cup\Sigma_{x,\pi},\\ \left(\frac{\partial\phi_{n,k}}{\partial\nu}\right)^2 &= \tfrac{4n^2}{\pi^2}\sin(ky)^2 \quad \text{sur } \Sigma_{0,y}\cup\Sigma_{\pi,y},\end{aligned}$$

et

$$\overline{\mathcal{U}_L} = \{a\in L^\infty(\partial\Omega), 0\leqslant a\leqslant 1, \text{ p.p dans } \partial\Omega, \int_{\partial\Omega} a(x)dx = 4\pi L\}.$$

Lemme 1. *Soit $a\in\overline{\mathcal{U}_L}$, on a*

$$J(a) = \min\left(\inf_{n\geqslant 1}\frac{4}{\pi^2}\int_{\Sigma_1} a(x,y)\sin(nx)^2dx, \inf_{k\geqslant 1}\frac{4}{\pi^2}\int_{\Sigma_2} a(x,y)\sin(ky)^2dy\right)$$

Démonstration. On a, pour tout $a\in\overline{\mathcal{U}_L}$,

$$J(a) = \inf_{(n,k)\in(\mathbb{N}^*)^2}\frac{1}{(n^2+k^2)}\left(\frac{4k^2}{\pi^2}\int_{\Sigma_1} a(x,y)\sin(nx)^2dx + \frac{4n^2}{\pi^2}\int_{\Sigma_2} a(x,y)\sin(ky)^2dy\right)$$

Considérant ensuite respectivement $k\to+\infty$ et n fixe, et $n\to+\infty$ et k fixe, on a

$$J(a)\leqslant \inf_{(n,k)\in(\mathbb{N}^*)^2}\left[\min\left(\frac{4}{\pi^2}\int_{\Sigma_1} a(x,y)\sin(nx)^2dx, \frac{4}{\pi^2}\int_{\Sigma_2} a(x,y)\sin(ky)^2dy\right)\right]$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}&\frac{k^2}{n^2+k^2}\frac{4}{\pi^2}\int_{\Sigma_1} a(x,y)\sin(nx)^2dx\\ &\qquad\geqslant \frac{k^2}{n^2+k^2}\min\left(\frac{4}{\pi^2}\int_{\Sigma_1} a(x,y)\sin(nx)^2dx, \frac{4}{\pi^2}\int_{\Sigma_2} a(x,y)\sin(ky)^2dy\right)\\ &\frac{n^2}{n^2+k^2}\frac{4}{\pi^2}\int_{\Sigma_2} a(x,y)\sin(ky)^2dy\\ &\qquad\geqslant \frac{n^2}{n^2+k^2}\min\left(\frac{4}{\pi^2}\int_{\Sigma_1} a(x,y)\sin(nx)^2dx, \frac{4}{\pi^2}\int_{\Sigma_2} a(x,y)\sin(ky)^2dy\right)\end{aligned}$$

En sommant les deux inégalités ci-dessus, et prenant la borne inférieure de la somme, on obtient l'inégalité inverse, puis

$$J(a) = \inf_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}\left[\min\left(\frac{4}{\pi^2}\int_{\Sigma_1} a(x,y)\sin(nx)^2dx, \frac{4}{\pi^2}\int_{\Sigma_2} a(x,y)\sin(ky)^2dy\right)\right]$$

On conclut en échangeant la borne inférieure et le minimum. □

Résolution du problème relaxé

Proposition 5. *Le problème relaxé* (1.13) *a une solution et*

$$\max_{a\in\overline{\mathcal{U}_L}} J(a) = J(L) = \frac{4L}{\pi}$$

Par ailleurs pour tout $a \in \overline{\mathcal{U}_L}$ réalisant le maximum on a :

$$\int_{\Sigma_1} a(s)ds = \int_{\Sigma_2} a(s)ds = 2\pi L$$

Démonstration. On a

$$J(L) = \frac{4L}{\pi} \leqslant \sup_{a\in\overline{\mathcal{U}_L}} J(a).$$

On veut maintenant obtenir l'inégalité inverse. Notons que pour tout $a \in \overline{\mathcal{U}_L}$,

$$J(a) = \frac{4}{\pi^2}\min\left(\inf_{(n\geqslant 1}\int_0^\pi (a(x,0)+a(x,\pi))\sin(nx)^2dx, \inf_{k\geqslant 1}\int_0^\pi (a(0,y)+a(\pi,y))\sin(ky)^2dx\right)$$

Ainsi, passant à la limite sur n et k, d'après le lemme de Riemann-Lebesgue, on a

$$J(a) \leqslant \frac{2}{\pi^2}\min\left(\int_0^\pi (a(x,0)+a(x,\pi))dx, \int_0^\pi (a(0,y)+a(\pi,y))dx\right).$$

Soit a une solution du problème (1.13). On a $\int_{\Sigma_1} a(s)ds + \int_{\Sigma_2} a(s)ds = 4\pi L$, donc, en posant $t = \int_{\Sigma_1} a(s)ds$, on a

$$\max_{a\in\overline{\mathcal{U}_L}} J(a) \leqslant \frac{2}{\pi^2}\max_{t\in[0,2\pi L]}\min\left(t, 4\pi L - t\right) = \frac{4L}{\pi}.$$

Supposons que $a \in \overline{\mathcal{U}_L}$ réalise le maximum de J, alors $J(a) = \pi L$, de sorte que

$$\min\left(\inf_{(n\geqslant 1}\int_0^\pi (a(x,0)+a(x,\pi))\sin(nx)^2dx, \inf_{k\geqslant 1}\int_0^\pi (a(0,y)+a(\pi,y))\sin(ky)^2dy\right) = \tfrac{4L}{\pi}$$

Passant aux limites, comme plus haut on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{4L}{\pi} &\leqslant \frac{2}{\pi^2}\int_{\Sigma_1} a(s)ds \quad\Rightarrow \qquad 2\pi L \leqslant t\\ \frac{4L}{\pi} &\leqslant \frac{2}{\pi^2}\int_{\Sigma_2} a(s)ds \quad\Rightarrow \quad 2\pi L \leqslant 4\pi L - t\end{aligned}$$

et donc $t = 2\pi L$, ce qui conclut la preuve. □

Déterminons toutes les solutions du problème relaxé, c'est-à-dire résolvons l'équa-

tion $J(a) = \frac{4L}{\pi}$ sur $\overline{\mathcal{U}_L}$. Pour cela on introduit les notations, pour tout $a \in \overline{\mathcal{U}_L}$, $a_1(x) = a(x,0) + a(x,\pi)$ et $a_2(y) = a(0,y) + a(\pi,y)$, ce qui permet d'écrire en particulier, d'après ce qui précède, $\int_0^\pi a_1(x)dx = \int_0^\pi a_2(y)dy = 2\pi L$. Par ailleurs, un passage à la limite fournit

$$J(a) = \frac{4L}{\pi} \Leftrightarrow \begin{cases} \inf\limits_{n\geqslant 1} \int_0^\pi a_1(x)\sin(nx)^2 dx = \pi L \\ \inf\limits_{k\geqslant 1} \int_0^\pi a_2(y)\sin(ky)^2 dy = \pi L. \end{cases}$$

Traitons la première égalité, la seconde se résout ensuite de la même façon. Introduisons le problème suivant :

$$\begin{cases} J_1(a) = \inf\limits_{n\geqslant 1} \int_0^\pi a_1(x)\sin(nx)^2 dx = L\pi \\ \int_0^\pi a_1(x)dx = 2\pi L. \end{cases}$$

On a, en développant le sinus

$$\begin{aligned} J_1(a) &= \inf_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{2}\int_0^\pi a_1(x)dx - \frac{1}{2}\int_0^\pi a_1(x)\cos(2nx)dx\right) \\ &= \pi L - \frac{1}{2}\sup_{n\geqslant 1}\int_0^\pi a_1(x)\cos(2nx)dx \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} J_1(a) = L\pi &\Leftrightarrow \sup_{n\geqslant 1}\int_0^\pi a_1(x)\cos(2nx)dx = 0 \\ &\Rightarrow \int_0^\pi a_1(x)\cos(2nx)dx \leqslant 0,\ \forall n \leqslant 1 \end{aligned}$$

Or, $a_1(x) = a(0,x) + a(\pi,x)$, et comme $a \in \overline{\mathcal{U}_L}$ on a que $a_1 \in L^\infty([0,\pi],[0,2])$. En particulier $a_1 \in L^2(]0,\pi[,[0,2])$, et admet le développement en série de Fourier suivant

$$a_1(x) = 2L + \sum_{j=1}^{\infty}(\alpha_j^1\cos(2jx) + \beta_j^1\sin(2jx)) \tag{1.31}$$

avec $\alpha_j^1 \in \mathbb{R}$ et $\beta_j^1 \in \mathbb{R}$, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$. Par unicité du développement en série de Fourier sur $L^2(]0,\pi[,[0,2])$, il vient

$$J_1(a) = L\pi \Rightarrow \alpha_j^1 \leqslant 0, \text{ pour tout } j \in \mathbb{N}^*$$

Réciproquement, les α_j^1 sont de carrés sommables, par passage à la limite, et puisque $\alpha_j^1 \leqslant 0$ pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ alors $\sup_{j\geqslant 1}\alpha_j^1 = 0$. L'ensemble des solutions est donc formé des éléments $a_1 \in L^\infty(]0,\pi[,[0,2])$ dont le développement (1.31) en série de Fourier vérifie $\alpha_j^1 \leqslant 0$.

De même, les solutions a_2 sont les éléments de $L^\infty([0,\pi],[0,2])$ dont le développement en série de Fourier s'écrit

$$a_2(y) = 2L + \sum_{j=1}^{\infty}(\alpha_j^2\cos(2jy) + \beta_j^2\sin(2jy))$$

avec $\alpha_j^2 \leqslant 0$, $\forall j \geqslant 1$.

Retour au problème initial

Théorème 2 (No-Gap - cas du carré)**.** *Si* $\Omega =]0,\pi[^2$*, l'équation* (1.20) *est vérifiée.*

On pourra trouver la preuve de ce résultat dans l'annexe B.1. Cette preuve suit le même principe celle du théorème 1, et s'inspire des travaux dans [PTZ12]. Notons néammoins que l'hypothèse (QUEB) nécessaire à obtenir (1.20) dans le cas général n'est pas vérifiée ici. Par ailleurs cette preuve illustre dans un cas simple la méthode de construction de suites maximisantes pour le problème (1.5) exposée dans la preuve du théorème 1. Cette construction s'étend par ailleurs aux cas du disque, des rectangles et des secteurs angulaires de R^2 (voir les parties 1.2.3, 1.2.4 et 1.2.4).

Dans le résultat suivant, on montre qu'à l'exception de trois valeurs de L particulières, le problème (1.5) n'a pas de solutions. Nous donnerons par ailleurs la forme des solutions dans ces cas particuliers.

Proposition 6. *Il existe* $\Gamma \subset \partial\Omega$ *tel que* $\chi_\Gamma \in \mathcal{U}_L$ *et* $J_1(\chi_\Gamma) = \frac{4L}{\pi}$ *si et seulement si* $L \in \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 1\}$.

La démonstration qui suit s'inspire directement de [HH03, PTZ13a].

Démonstration. Pour tout $\Gamma \subset \partial\Omega$, on note $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ où $\Gamma_1 = \Sigma_1 \cap \Gamma$ et $\Gamma_2 = \Sigma_2 \cap \Gamma$. D'après ce qui précède χ_Γ est solution du problème d'optimisation (1.5) si et seulement si

$$\begin{cases} \inf\limits_{n\geqslant 1}\int_{\Gamma_1}\sin(nx)^2dx = \pi L \\ |\Gamma_1| = 2\pi L \end{cases} \tag{1.32a}$$

$$\begin{cases} \inf\limits_{k\geqslant 1}\int_{\Gamma_2}\sin(ky)^2dy = \pi L \\ |\Gamma_2| = 2\pi L. \end{cases} \tag{1.32b}$$

Ces deux problèmes d'optimisation étant identiques, on considère dans cette preuve le problème (1.32a).

D'après le lemme de Riemann-Lebesgue,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Gamma_1}\sin(nx)^2dx=\frac{1}{2}|\Gamma_1|=\pi L$$

Ainsi $J_1(\chi_\Gamma)\leqslant\pi L$. Ensuite,

$$\begin{aligned}J_1(\chi_\Gamma)=\pi L &\Leftrightarrow \sup_{n\geqslant 1}\int_{\Gamma_1}\cos(2nx)dx=0\\ &\Leftrightarrow \forall n\geqslant 1,\int_{\Gamma_1}\cos(2nx)dx\leqslant 0\end{aligned}$$

Supposons alors qu'il existe un domaine Γ_1 tel que $J_1(\chi_{\Gamma_1})=\pi L$. On pose

$$\begin{aligned}D = \{&f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\pi-\text{périodique, continue par morceaux,}\\ &\text{telle que } f(x^+)+f(x^-)=2f(x) \text{ presque partout,}\}.\end{aligned}$$

et on définit deux de ses éléments par leurs valeurs sur $[0,\pi]$:

$$f_0(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(\chi_{\Gamma_{x,0}}(0^+)+\chi_{\Gamma_{x,0}}(\pi^-)) \text{ si } x=0\\ \frac{1}{2}(\chi_{\Gamma_{x,0}}(x^+)+\chi_{\Gamma_{x,0}}(x^-)) \text{ sinon}\end{cases}$$

$$f_\pi(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(\chi_{\Gamma_{x,\pi}}(0^+)+\chi_{\Gamma_{x,\pi}}(\pi^-)) \text{ si } x=0\\ \frac{1}{2}(\chi_{\Gamma_{x,\pi}}(x^+)+\chi_{\Gamma_{x,\pi}}(x^-)) \text{ sinon}\end{cases}$$

On pose également $f_{e,0}(x)=\frac{1}{2}(f_0(x)+f_0(-x))$ et $f_{e,\pi}(x)=\frac{1}{2}(f_\pi(x)+f_\pi(-x))$ leurs parties paires. On a alors $f_{e,0}+f_{e,\pi}\in D$, et donc l'égalité de $f_{e,0}+f_{e,\pi}$ avec sa série de Fourier. Par ailleurs $f_{e,0}+f_{e,\pi}$ est également π-périodique et paire, elle est donc développable en série de $\cos(2nx)$. On écrira

$$f_{e,0}(x)+f_{e,\pi}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}A_n\cos(2nx),$$

avec

$$A_0=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(f_{e,0}(x)+f_{e,\pi}(x))dx=\frac{1}{\pi}|\Gamma_1|=2L,$$

et

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(f_{e,0}(x)+f_{e,\pi}(x))\cos(2nx)dx=\frac{2}{\pi}\int_{\Gamma_1}\cos(2nx)dx.$$

Nous avons vu que pour tout $n\geqslant 1$, $A_n\leqslant 0$. Or par convergence de la série de Fourier en $x=0$, on a $f_{e,0}(0)+f_{e,\pi}(0)=\sum_{n=0}^{+\infty}A_n<\infty$. Et puisque les A_n sont tous de même signe a partir du rang 1, on a que la somme $\sum_{n=0}^{+\infty}A_n$ est absolument

convergente, ce qui rend la série $\sum_{n=0}^{+\infty} A_n \cos(2nx)$ normalement convergente sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, $f_{e,0} + f_{e,\pi}$ doit être continue sur $\mathbb{R}$. Mais comme $f_{e,0}$ et $f_{e,\pi}$ ne peuvent valoir que 0, 1/2 ou 1, $f_{e,0} + f_{e,\pi}$ est nécessairement constante égale à 0, 1/2, 1, 3/2 ou 2. Finalement on a que A_0 égale l'une de ces constantes. Or $A_0 = 2L$, donc L ne peut prendre que les valeurs 0, 1/4, 1/2, 3/4 et 1. Ainsi en dehors de ces valeurs l'optimum ne peut être atteint. On traite la réciproque dans le paragraphe suivant. □

Determination explicite des solutions dans les cas $L \in \{1/4, 1/2, 3/4\}$

- **Cas $L = 1/4$.**
  On a vu que dans ce cas on a $f_{e,0} + f_{e,\pi} = \frac{1}{2}$. Comme $f_{e,0}$ et $f_{e,\pi}$ prennent leurs valeurs dans $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$, on a pour tout $x \in [0, \pi]$
  - soit $f_{e,0}(x) = 0$ et $f_{e,\pi}(x) = \frac{1}{2}$
  - soit $f_{e,0}(x) = \frac{1}{2}$ et $f_{e,\pi}(x) = 0$

  Ensuite, $f_{e,0} \in I$, avec

$$I := \left\{ I_\Lambda = \frac{1}{2}\chi_\Lambda, \Lambda \subset [0,\pi], \text{symétrique par rapport à } \frac{\pi}{2} \right\}$$

  Ainsi lorsque $f_{e,0} = I_\Lambda$ avec $I_\Lambda \in I$, $f_{e,\pi} = I_{\Lambda^c}$. Par ailleurs on a $f_{e,0}(x) = \frac{1}{2}(\chi_{\Gamma_{x,0}}(x) + \chi_{\Gamma_{x,0}}(\pi - x))$, donc pour tout $x \in]0, \pi[$, on a

$$\begin{aligned} f_{e,0} = 0 &\Rightarrow \chi_{\Gamma_{x,0}}(x) = \chi_{\Gamma_{x,0}}(\pi - x) = 0 \\ f_{e,0} = \frac{1}{2} &\Rightarrow \chi_{\Gamma_{x,0}}(x) + \chi_{\Gamma_{x,0}}(\pi - x) = 1 \end{aligned}$$

  Ainsi nous avons :
  - Sur Λ^c, $\chi_{\Gamma_{x,0}}(x) = 0$
  - Sur Λ, si $x \in [0, \pi/2]$:
    soit $\chi_{\Gamma_{x,0}}(x) = 1$ et $\chi_{\Gamma_{x,0}}(\pi - x) = 0$. soit $\chi_{\Gamma_{x,0}}(x) = 0$ et $\chi_{\Gamma_{x,0}}(\pi - x) = 1$.

  Le même raisonnement pour $f_{e,\pi}$, donne le résultat suivant :
  - Sur Λ, $\chi_{\Gamma_{x,\pi}}(x) = 0$
  - Sur Λ^c, si $x \in [0, \pi/2]$:
    soit $\chi_{\Gamma_{x,\pi}}(x) = 1$ et $\chi_{\Gamma_{x,\pi}}(\pi - x) = 0$. soit $\chi_{\Gamma_{x,\pi}}(x) = 0$ et $\chi_{\Gamma_{x,\pi}}(\pi - x) = 1$.

  Algorithme de construction d'une solution dans le cas $L = 1/4$:

  · *Choisir $\Lambda \subset]0, \pi[$, symétrique par rapport à $\pi/2$*

- *Poser* $\chi_{\Gamma_{x,0}} = 1$ *sur un sous-ensemble* $\mathcal{A}$ *de* $\Lambda \cap]0, \pi/2[$, *et* 0 *ailleurs.*
- *Prendre le symétrique par rapport à* $\pi/2$ *de* $\mathcal{A}$ *et sur son complémentaire dans* $\Lambda \cap]\pi/2, \pi[$, *poser* $\chi_{\Gamma_{x,0}} = 1$.
- *Poser* $\chi_{\Gamma_{x,\pi}} = 1$ *sur un sous-ensemble* $\mathcal{B}$ *de* $\Lambda^c \cap]0, \pi/2[$, *et* 0 *ailleurs.*
- *Prendre le symétrique par rapport à* $\pi/2$ *de* $\mathcal{B}$, *et sur son complémentaire dans* $\Lambda^c \cap]\pi/2, \pi[$, *poser* $\chi_{\Gamma_{x,\pi}} = 1$.

La figure 1.4 présente un exemple de solution.

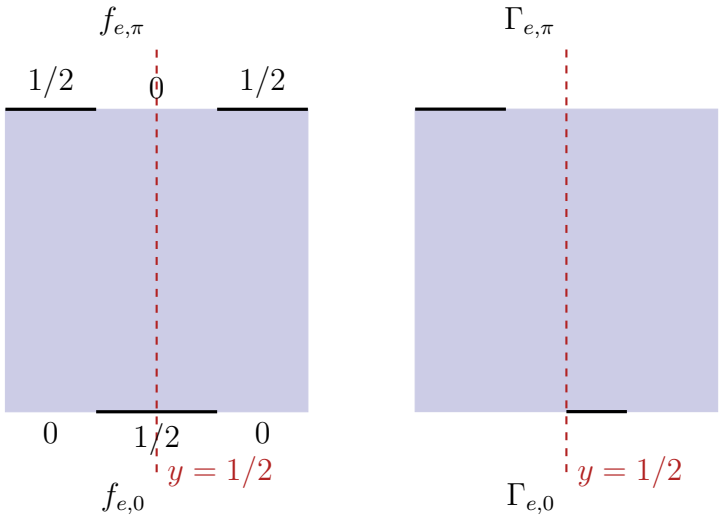


FIGURE 1.4 – A gauche les valeurs de $f_{e,0}$ et $f_{e,\pi}$, à droite Γ.

- **Cas** $L = 1/2$**.**

  Dans ce cas on a $f_{e,0} + f_{e,\pi} = 1$. Comme $f_{e,0}$ et $f_{e,\pi}$ prennent leurs valeurs dans $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$, on a pour tout $x \in [0, \pi]$
  - soit $f_{e,0}(x) = 0$ et $f_{e,\pi}(x) = 1$
  - soit $f_{e,0}(x) = \frac{1}{2}$ et $f_{e,\pi}(x) = \frac{1}{2}$
  - soit $f_{e,0}(x) = 1$ et $f_{e,\pi}(x) = 0$.

  Comme précédemment on a $f_{e,0} \in I$ avec :

$$I := \Big\{ I_{\Lambda_1,\Lambda_2} = \tfrac{1}{2}\chi_{\Lambda_1} + \chi_{\Lambda_2}, \quad \Lambda_1 \text{ et } \Lambda_2 \subset [0,\pi] \text{disjoints et symétriques par rapport à } \frac{\pi}{2} \Big\}$$

  Lorsque $f_{e,0} = I_{\Lambda_1,\Lambda_2}$ avec $I_{Lambda_1,\Lambda_2} \in I$, on a

$$f_{e,\pi} = \frac{1}{2}\chi_{\Lambda_1} + \chi_{(\Lambda_1 \cup \Lambda_2)^c}$$

  Par ailleurs on a $f_{e,0}(x) = \frac{1}{2}(\chi_{\Gamma_{x,0}}(x) + \chi_{\Gamma_{x,0}}(\pi - x))$, donc pour tout $x \in]0, \pi[$

on a

$$\begin{aligned} f_{e,0} = 0 &\Rightarrow \chi_{\Gamma_{x,0}}(x) = \chi_{\Gamma_{x,0}}(\pi - x) = 0 \\ f_{e,0} = 1 &\Rightarrow \chi_{\Gamma_{x,0}}(x) = \chi_{\Gamma_{x,0}}(\pi - x) = 1 \\ f_{e,0} = \frac{1}{2} &\Rightarrow \chi_{\Gamma_{x,0}}(x) + \chi_{\Gamma_{x,0}}(\pi - x) = 1 \end{aligned}$$

Ainsi nous avons :

- Sur $(\Lambda_1 \cup \Lambda_2)^c$, $\chi_{\Gamma_{x,0}}(x) = 0$
- Sur Λ_2, $\chi_{\Gamma_{x,0}}(x) = 1$
- Sur $\Lambda_1|_{[0,\pi/2]}$:
  soit $\chi_{\Gamma_{x,0}}(x) = 1$ et $\chi_{\Gamma_{x,0}}(\pi - x) = 0$. soit $\chi_{\Gamma_{x,0}}(x) = 0$ et $\chi_{\Gamma_{x,0}}(\pi - x) = 1$.

Le même raisonnement pour $f_{e,\pi}$, nous le résultat suivant :

- Sur $(\Lambda_1 \cup \Lambda_2)^c$, $\chi_{\Gamma_{x,\pi}}(x) = 1$
- Sur Λ_2, $\chi_{\Gamma_{x,\pi}}(x) = 0$
- Sur $\Lambda_1|_{[0,\pi/2]}$:
  soit $\chi_{\Gamma_{x,\pi}}(x) = 1$ et $\chi_{\Gamma_{x,\pi}}(\pi - x) = 0$. soit $\chi_{\Gamma_{x,\pi}}(x) = 0$ et $\chi_{\Gamma_{x,\pi}}(\pi - x) = 1$.

Algorithme de construction d'une solution dans le cas $L = 1/2$:

· *Choisir Λ_1 et $\Lambda_2 \subset]0, \pi[$, disjoints et symétrique par rapport à $\pi/2$*
· *Poser $\chi_{\Gamma_{x,0}} = 1$ sur Λ_2, et 0 ailleurs.*
· *Poser $\chi_{\Gamma_{x,0}} = 1$ sur un sous-ensemble $\mathcal{A}$ de $\Lambda_1 \cup]0, \pi/2[$.*
· *Prendre le symétrique par rapport à $\pi/2$ de $\mathcal{A}$, et sur son complémentaire dans $\Lambda \cap]\pi/2, \pi[$, poser $\chi_{\Gamma_{x,0}} = 1$.*
· *Poser $\chi_{\Gamma_{x,\pi}} = 1$ sur $(\Lambda_1 \cup \Lambda_2)^c \cap]0, \pi/2[$, et 0 ailleurs.*
· *Poser $\chi_{\Gamma_{x,\pi}} = 1$ sur un sous-ensemble $\mathcal{B}$ de $\Lambda_1 \cup]0, \pi/2[$.*
· *Prendre le symétrique par rapport à $\pi/2$ de $\mathcal{B}$, et sur son complémentaire dans $\Lambda \cap]\pi/2, \pi[$, poser $\chi_{\Gamma_{x,\pi}} = 1$.*

La figure 1.5 présente un exemple de solution.

- **Cas $L = 3/4$.**
  Dans ce cas on a $f_{e,0} + f_{e,\pi} = \frac{3}{2}$. Comme $f_{e,0}$ et $f_{e,\pi}$ prennent leurs valeurs dans $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$, on a pour tout $x \in [0, \pi]$
  - soit $f_{e,0}(x) = 1$ et $f_{e,\pi}(x) = \frac{1}{2}$
  - soit $f_{e,0}(x) = \frac{1}{2}$ et $f_{e,\pi}(x) = 1$

  Comme précédemment on a

$$f_{e,0} \in I := \left\{ I_\Lambda = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\chi_\Lambda, \Lambda \subset [0, \pi], \text{symétrique par rapport à } \frac{\pi}{2} \right\}$$

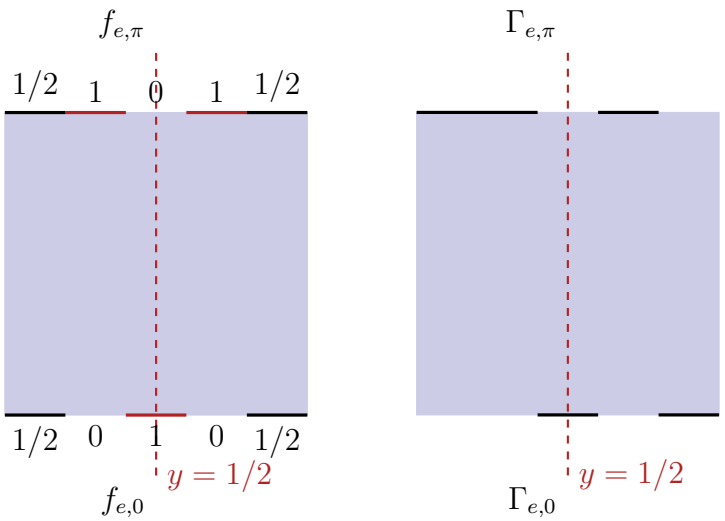


FIGURE 1.5 – A gauche les valeurs de $f_{e,0}$ et $f_{e,\pi}$, à droite Γ.

Lorsque $f_{e,0} = I_\Lambda$ avec $I_\Lambda \in I$, on a

$$f_{e,\pi} = I_{\Lambda^c}$$

Par ailleurs on a $f_{e,0}(x) = \frac{1}{2}(\chi_{\Gamma_{x,0}}(x) + \chi_{\Gamma_{x,0}}(\pi - x))$, donc pour tout $x \in]0, \pi[$:

$$\begin{aligned} f_{e,0} = 1 \quad &\Rightarrow \quad \chi_{\Gamma_{x,0}}(x) = \chi_{\Gamma_{x,0}}(\pi - x) = 1 \\ f_{e,0} = \frac{1}{2} \quad &\Rightarrow \quad \chi_{\Gamma_{x,0}}(x) + \chi_{\Gamma_{x,0}}(\pi - x) = 1 \end{aligned}$$

Ainsi nous avons

- Sur Λ, $\chi_{\Gamma_{x,0}}(x) = 1$
- Sur $\Lambda^c|_{[0,\pi/2]}$:
  soit $\chi_{\Gamma_{x,0}}(x) = 1$ et $\chi_{\Gamma_{x,0}}(\pi - x) = 0$. soit $\chi_{\Gamma_{x,0}}(x) = 0$ et $\chi_{\Gamma_{x,0}}(\pi - x) = 1$.

Le même raisonnement pour $f_{e,\pi}$, nous donne le résultat suivant

- Sur Λ^c, $\chi_{\Gamma_{x,\pi}}(x) = 1$
- Sur $\Lambda|_{[0,\pi/2]}$:
  soit $\chi_{\Gamma_{x,\pi}}(x) = 1$ et $\chi_{\Gamma_{x,\pi}}(\pi - x) = 0$. soit $\chi_{\Gamma_{x,\pi}}(x) = 0$ et $\chi_{\Gamma_{x,\pi}}(\pi - x) = 1$.

Algorithme de construction d'une solution dans le cas $L = 3/4$:

- *Choisir $\Lambda \subset]0, \pi[$, symétrique par rapport à $\pi/2$*
- *Poser $\chi_{\Gamma_{x,0}} = 0$ sur un sous-ensemble $\mathcal{A}$ de $\Lambda^c \cap]0, \pi/2[$, et 1 ailleurs.*
- *Prendre le symétrique par rapport à $\pi/2$ de $\mathcal{A}$ et sur son complémentaire dans $\Lambda^c \cap]\pi/2, \pi[$, poser $\chi_{\Gamma_{x,0}} = 0$.*

- *Poser* $\chi_{\Gamma_{x,\pi}} = 0$ *sur un sous-ensemble* $\mathcal{B}$ *de* $\Lambda \cap]0, \pi/2[$, *et* 1 *ailleurs.*
- *Prendre le symétrique par rapport à* $\pi/2$ *de* $\mathcal{B}$, *et sur son complémentaire dans* $\Lambda \cap]\pi/2, \pi[$, *poser* $\chi_{\Gamma_{x,\pi}} = 0$.

La figure 1.6 présente un exemple de solution.

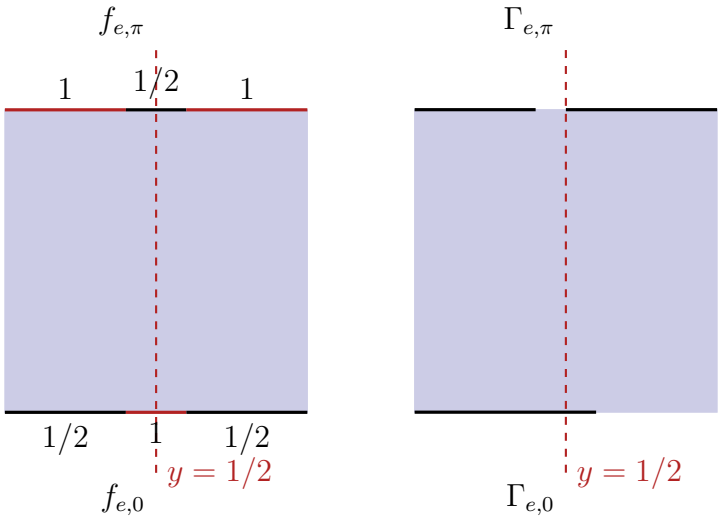


FIGURE 1.6 – A gauche les valeurs de $f_{e,0}$ et $f_{e,\pi}$, à droite Γ.

1.2.3 Le cas du disque

Supposons que $\Omega = B(0, R) \subset \mathbb{R}^2$. On définit alors $(\phi_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^{*2}}$ la famille de fonctions propres de $-\Delta$ par

$$\forall (r, \theta) \in [0, R[\times[0, 2\pi[, \quad \phi_{n,k}(r, \theta) = c_{n,k} J_n(z_{n,k}\frac{r}{R}) \left| \begin{array}{c} \cos(n\theta) \\ \sin(n\theta) \end{array} \right. ,$$

où J_n désigne la n-ème fonction de Bessel du premier ordre, $z_{n,k}$ le k-ème zéro de la fonction J_n, et

$$\frac{1}{c_{n,k}^2} = \frac{\pi}{2} R^2 \left(J_n'(z_{n,k})^2 + (1 - \frac{n^2}{z_{n,k}}) J_n(z_{n,k})^2 \right).$$

Cette famille constitue une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$.

On a

$$\left| \frac{\partial \phi_{n,k}}{\partial \nu} \right| = \left| \frac{\partial \phi_{n,k}(R, \theta)}{\partial r} \right| = c_{n,k} \left(\frac{z_{n,k}}{R} \right) J_n'(z_{n,k}) \left| \begin{array}{c} \cos(n\theta) \\ \sin(n\theta) \end{array} \right.$$

Ainsi on a

$$\begin{aligned} J(a) &= \inf_{n\geqslant 1} \frac{R^2}{z_{n,k}^2}\frac{z_{n,k}^2}{R^2}c_{n,k}^2 \int_0^{2\pi} a(\theta) J_n'(z_{n,k})^2 \left| \begin{array}{l} \cos(n\theta)^2 \\ \sin(n\theta)^2 \end{array} \right. Rd\theta \\ &= \frac{2}{\pi R} \inf_{n,k\geqslant 1} \int_0^{2\pi} a(\theta) \left| \begin{array}{l} \cos(n\theta)^2 \\ \sin(n\theta)^2 \end{array} \right. d\theta. \\ &= \frac{2}{\pi R} \min\left\{ \inf_{n\geqslant 1} \int_0^{2\pi} a(\theta)\cos(n\theta)^2 d\theta, \inf_{k\geqslant 1} \int_0^{2\pi} a(\theta)\sin(k\theta)^2 d\theta \right\}. \quad (1.33) \end{aligned}$$

Remarque 7. *D'après ce qui précède, pour ce choix de fonctions propres, la boule $B(0,R)$, satisfait les hypothèses (UB) et (QUEB) (et donc (WQEB)).*

Enfin on a ici,

$$\overline{\mathcal{U}_L} = \{a \in L^\infty([0,2\pi]), 0 \leqslant a \leqslant 1, \text{ p.p }, \int_0^{2\pi} a(\theta)d\theta = 2\pi L\}.$$

Proposition 7. *Soit $\Omega = B(0,R)$. Le problème* (1.13) *possède une solution et*

$$\max_{a\in\overline{\mathcal{U}_L}} J(a) = J(L) = \frac{2L}{R}.$$

Par ailleurs on a

$$\sup_{\chi_\Gamma\in\mathcal{U}_L} J(\chi_\Gamma) = \max_{a\in\overline{\mathcal{U}_L}} J(a).$$

Enfin le problème (1.5) *a une solution si et seulement si $L \in \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$.*

La preuve de la première partie de ce théorème consiste en une simple adaptation de la preuve des propositions 5 et 6 et du théorème 2. Notons simplement que puisque l'expression $\overline{\mathcal{U}_L}$ dans le cas du disque diffère un peu de celle du cas du carré, l'expression des solutions particulières au problème (1.5) dans $\mathcal{U}_L$ pour $L \in \{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\}$, diffère légèrement. On précise ces solutions particulières dans le paragraphe suivant.

Détermination explicite des solutions dans les cas $L \in \{1/4, 1/2, 3/4\}$

Soit a une solution dans $\mathcal{U}_L$ du problème (1.5). On pose ici $a_p(\theta) = \frac{a(\theta)+a(2\pi-\theta)}{2}$, la partie paire de a, et $\tilde{a}(\theta) = \frac{a_p(\theta)+a_p(\pi-\theta)}{2}$, le symétrisé de a_p, par rapport à $\pi/2$. Comme dans la partie sur le carré, on peut montrer que $\tilde{a}$ est constante. Par ailleurs $a \in \overline{\mathcal{U}_L}$, donc a_p ne peut prendre ses valeurs que dans $\{0, 1/2, 1\}$, et $\tilde{a}$ les siennes dans $\{0, 1/4, 1/2, 3/4, 1\}$. Dans ces cas on a, comme précédemment, $\tilde{a} = L$.

- **Cas $L = 1/4$**
  On a dans ce cas, pour tout $\theta \in [0, 2\pi[$, $\tilde{a}(\theta) = 1/4$ et donc $a_p(\theta) + a_p(\pi-\theta) = 1/2$. Et puisque a_p prend ses valeurs dans $\{0, 1/2, 1\}$ on a

· soit $a_p(\theta) = 0$ et dans ce cas $a_p(\pi - \theta) = 1/2$,
· soit $a_p(\theta) = 1/2$ et dans ce cas $a_p(\pi - \theta) = 0$.

Ainsi

$$a_p \in I := \left\{ \frac{\chi_\Lambda}{2}, \Lambda \subset [0,\pi], \text{ avec } (\Lambda, \pi - \Lambda) \text{ partition de } [0,\pi] \right\}$$

Enfin $2a_p(\theta) = a(\theta) + a(2\pi - \theta)$, donc sur $[0,\pi]$ on a
· sur Λ^c, $a(\theta) = a(2\pi - \theta) = 0$,
· et sur Λ, soit $a(\theta) = 1$ et dans ce cas $a(2\pi - \theta) = 0$, soit $a(\theta) = 0$ et dans ce cas $a(2\pi - \theta) = 1$.

Algorithme de construction d'une solution χ_Γ dans le cas $L = 1/4$:

· *Choisir $\Lambda \subset]0,\pi[$, tel que Λ et $\pi - \Lambda$ forment une partition de $[0,\pi]$*
· *Prolonger Λ à $[0,2\pi]$ par symétrie par rapport à π*
· *Poser $\chi_\Gamma = 1$ sur un sous-ensemble $\mathcal{A}$ de $\Lambda \cap]0,\pi[$, et 0 ailleurs.*
· *Prendre le symétrique par rapport à $\pi/2$ de $\mathcal{A}$ et sur son complémentaire dans $\Lambda \cap]\pi,2\pi[$, poser $\chi_\Gamma = 1$.*

La figure 1.7 présente un exemple de solution.

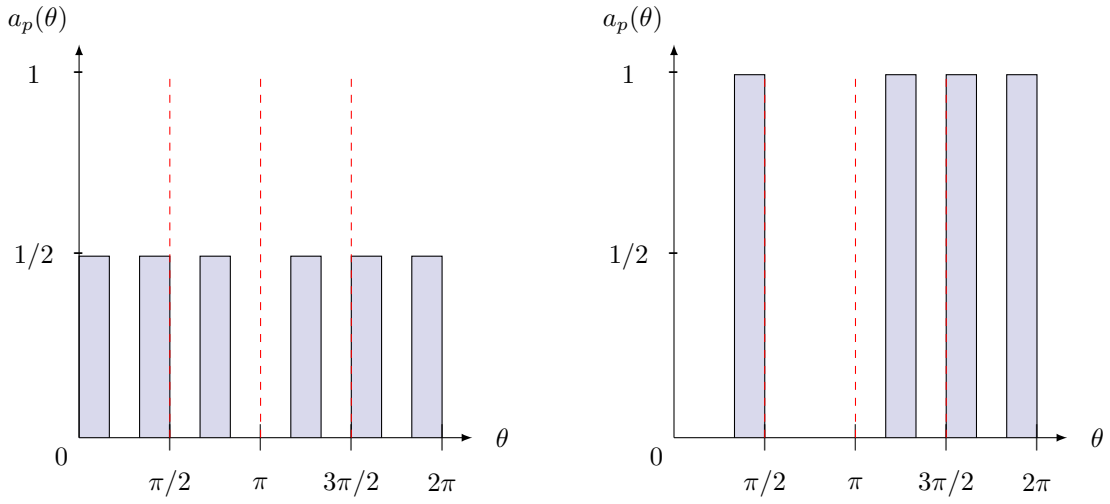


FIGURE 1.7 – A gauche les valeurs de a_p, à droite Σ, pour le cas $L = 1/4$.

- **Cas $L = 1/2$**

  On a dans ce cas pour tout $\theta \in [0,2\pi[$, $\tilde{a}(\theta) = 1/2$ et donc $a_p(\theta) + a_p(\pi - \theta) = 1$.
  Et puisque a_p prend ses valeurs dans $\{0, 1/2, 1\}$ on a
  · soit $a_p(\theta) = 0$ et dans ce cas $a_p(\pi - \theta) = 1$,
  · soit $a_p(\theta) = 1$ et dans ce cas $a_p(\pi - \theta) = 0$,
  · soit $a_p(\theta) = 1/2$ et dans ce cas $a_p(\pi - \theta) = 1/2$.

Ainsi

$$a_p \in I := \quad \Big\{ \tfrac{\chi_{\Lambda_1}}{2} + \chi_{\Lambda_2}, \Lambda_1, \Lambda_2 \subset [0,\pi], \text{ disjoints,} \\ \text{avec } \Lambda_2 \text{ symétrique par rapport à } \pi/2 \\ \text{et } (\Lambda_1, \pi - \Lambda_1) \text{ partition de } [0,\pi] \setminus \Lambda_2 \Big\}$$

Enfin $2a_p(\theta) = a(\theta) + a(2\pi - \theta)$, donc sur $[0,\pi]$ on a

- sur Λ_1, soit $a(\theta) = 1$ et dans ce cas $a(2\pi - \theta) = 0$, soit $a(\theta) = 0$ et dans ce cas $a(2\pi - \theta) = 1$,
- sur (Λ_2), $a(\theta) = a(2\pi - \theta) = 1$,
- sur $(\Lambda_1 \cup \Lambda_2)^c$, $a(\theta) = a(2\pi - \theta) = 0$.

Algorithme de construction d'une solution χ_Γ dans le cas $L = 1/2$:

- *Choisir $\Lambda_2 \subset]0,\pi[$ symétrique par rapport à $\pi/2$*
- *Choisir $\Lambda_1 \subset]0,\pi[$ disjoints de Λ_2, tel que Λ_1 et $\pi - \Lambda_1$ forment une partition de $[0,\pi] \setminus \Lambda_2$*
- *Prolonger Λ_1 et Λ_2 à $[0,2\pi]$ par symétrie par rapport à π*
- *Poser $\chi_\Gamma = 1$* sur Λ_2 et 0 ailleurs.
- *Poser $\chi_\Gamma = 1$ sur un sous-ensemble $\mathcal{A}$ de $\Lambda \cap]0,\pi[$*
- *Prendre le symétrique par rapport à $\pi/2$ de $\mathcal{A}$ et sur son complémentaire dans $\Lambda \cap]\pi, 2\pi[$, poser $\chi_\Gamma = 1$.*

La figure 1.8 présente un exemple de solution.

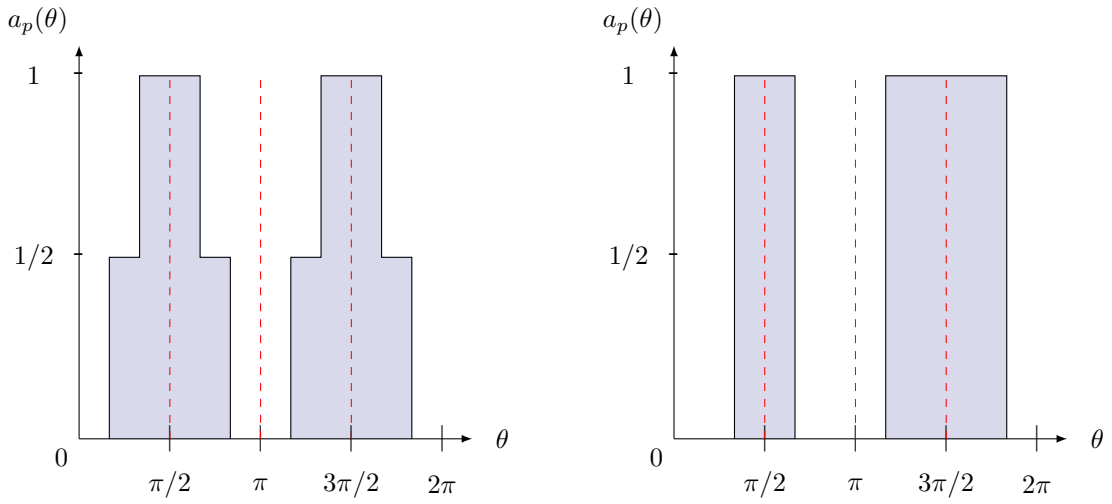


Figure 1.8 – A gauche les valeurs de a_p, à droite Σ, pour le cas $L = 1/2$.

- **Cas** $L = 3/4$

  On a dans ce cas pour tout $\theta \in [0, 2\pi[$, $\tilde{a}(\theta) = 3/4$ et donc $a_p(\theta) + a_p(\pi - \theta) = 3/2$. Et puisque a_p prend ses valeurs dans $\{0, 1/2, 1\}$ on a
  - soit $a_p(\theta) = 1$ et dans ce cas $a_p(\pi - \theta) = 1/2$,
  - soit $a_p(\theta) = 1/2$ et dans ce cas $a_p(\pi - \theta) = 1$.

  Ainsi

$$a_p \in I := \left\{ \frac{1}{2} + \frac{\chi_\Lambda}{2}, \Lambda \subset [0, \pi], \text{avec } (\Lambda, \pi - \Lambda) \text{ partition de } [0, \pi] \right\}$$

  Enfin $2a_p(\theta) = a(\theta) + a(2\pi - \theta)$, donc sur $[0, \pi]$ on a
  - sur Λ, $a(\theta) = a(2\pi - \theta) = 1$,
  - sur $(\Lambda)^c$, soit $a(\theta) = 1$ et dans ce cas $a(2\pi - \theta) = 0$, soit $a(\theta) = 0$ et dans ce cas $a(2\pi - \theta) = 1$.

  Algorithme de construction d'une solution χ_Γ *dans le cas* $L = 3/4$ *:*

  - *Choisir* $\Lambda \subset]0, \pi[$*, tel que* Λ *et* $\pi - \Lambda$ *forment une partition de* $[0, \pi]$
  - *Prolonger* Λ *à* $[0, 2\pi]$ *par symétrie par rapport à* π
  - *Poser* $\chi_\Gamma = 0$ *sur un sous-ensemble* $\mathcal{A}$ *de* $\Lambda^c \cap]0, \pi[$*, et* 1 *ailleurs.*
  - *Prendre le symétrique par rapport à* $\pi/2$ *de* $\mathcal{A}$ *et sur son complémentaire dans* $\Lambda^c \cap]\pi, 2\pi[$*, poser* $\chi_\Gamma = 0$*.*

  La figure 1.9 présente un exemple de solution.

1.2.4 Comportement de la valeur optimale pour le problème (1.13) par rapport à L

D'après proposition 4, on connaît la valeur optimale du problème (1.13) lorsque la condition *(HRel)* est remplie, autrement dit lorsqu'il existe $x_0 \in \overline{\Omega}$ tel que la fonction de Rellich $a^*_{x_0}$ [9] est admissible. C'est cette condition géométrique sur Ω qu'on étudie dans cette partie. Nous étudierons en particulier au travers d'exemples ce que devient de la valeur optimale pour J lorsque la condition *(HRel)* n'est pas remplie.

Point de saturation des solutions de Rellich

On a le résultat suivant :

9. Voir la définition (1).

Notons néammoins que l'hypothèse (QUEB) nécessaire à obtenir (1.20) dans le cas général n'est pas vérifiée ici. Par ailleurs cette preuve illustre dans un cas simple la méthode de construction de suites maximisantes pour le problème (1.5) exposée dans la preuve du théorème 1.

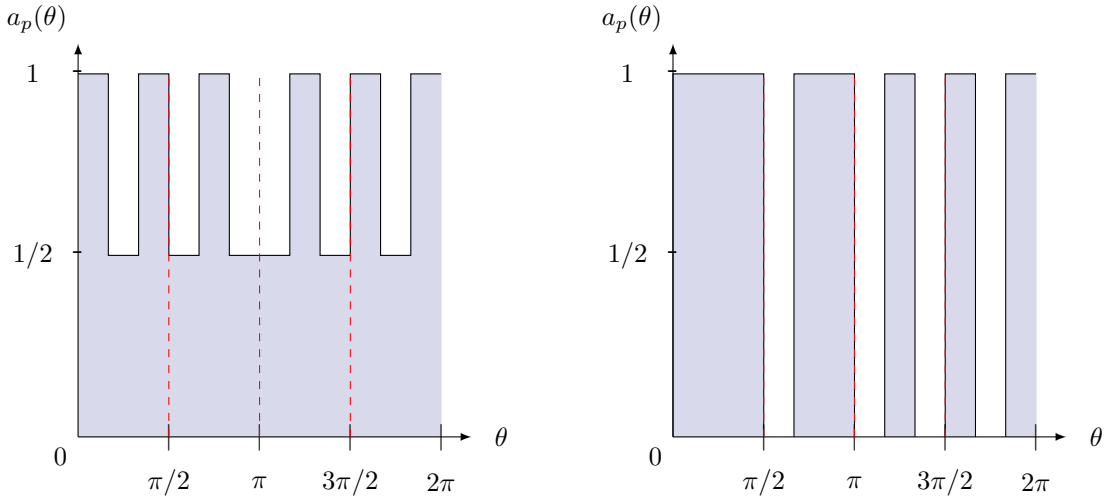


FIGURE 1.9 – A gauche les valeurs de a_p, à droite Σ, pour le cas $L = 3/4$.

Proposition 8. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine convexe et compact. Il existe une valeur critique $L_c \in]0,1]$ telle que l'hypothèse (HRel) est satisfaite si et seulement si $L \leqslant L_c$.*

Par ailleurs, si Ω est à bord $\mathcal{C}^1$ on a

$$L_c = \min\left(1, \frac{n|\Omega|}{R(\Omega)\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)}\right),$$

où $R(\Omega)$ désigne le rayon du cercle circonscrit à Ω [10].

Démonstration. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine convexe et compact. Par convexité de Ω et par théorème de projection sur un convexe fermé, on a $a^*_{z_0}(x) \geqslant 0$ pour tout $z_0 \in \overline{\Omega}$ et pour tout $x \in \partial\Omega$.

Par ailleurs, d'après l'identité de Rellich (1.18), la contrainte d'aire sur $a^*_{z_0}$ est toujours satisfaite.

Prouvons dans un premier temps l'existence d'une valeur critique $L_c \in [0,1]$. La propriété *(HRel)* est équivalente à l'existence d'un $x_0 \in \overline{\Omega}$ tel que $a^*_{x_0}(x) \leqslant 1$ pour presque tout $x \in \partial\Omega$, autrement dit, tel que

$$\frac{L\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)}{n|\Omega|} \inf_{x_0\in\overline{\Omega}} \sup_{x\in\partial\Omega} \operatorname{ess}\langle x - x_0, \nu(x)\rangle \leqslant 1.$$

10. i.e le plus petit rayon des boules fermées contenant Ω

Il s'ensuit que la propriété *(HRel)* est équivalente à $L \leqslant L_c$ avec

$$L_c = \min\left(1, \frac{n|\Omega|}{\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)\ \inf\limits_{x_0\in\overline{\Omega}}\ \sup\limits_{x\in\partial\Omega}\ \text{ess}\langle x-x_0,\nu(x)\rangle}\right). \tag{1.34}$$

On suppose à present que Ω est de plus $\mathcal{C}^1$, et on note x_0^* le centre du cercle circonscrit à Ω. Dans ce cas, pour tout $x_0 \in \overline{\Omega}$, $\sup\limits_{x\in\partial\Omega}\ \text{ess}\,\langle x-x_0,\nu(x)\rangle = \max\limits_{x\in\partial\Omega}\langle x-x_0,\nu(x)\rangle$. Pour conclure, il faut prouver que

$$\inf_{x_0\in\overline{\Omega}}\ \max_{x\in\partial\Omega}\langle x-x_0,\nu(x)\rangle = R(\Omega).$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\inf_{x_0\in\overline{\Omega}}\ \max_{x\in\partial\Omega}\langle x-x_0,\nu(x)\rangle \leqslant \inf_{x_0\in\overline{\Omega}}\ \max_{x\in\partial\Omega}\parallel x-x_0\parallel \leqslant \max_{x\in\partial\Omega}\ d(x_0^*,x) = R(\Omega).$$

Ensuite, on a

$$\inf_{x_0\in\overline{\Omega}}\ \max_{x\in\partial\Omega}\langle x-x_0,\nu(x)\rangle \geqslant \inf_{x_0\in\overline{\Omega}}\ \max_{x\in\partial\Omega\cap\partial B(x_0^*,R(\Omega))}\langle x-x_0,\nu(x)\rangle\,.$$

On prouve dans ce qui suit que $\inf\limits_{x_0\in\overline{\Omega}}\ \max\limits_{x\in\partial\Omega\cap\partial B(x_0^*,R(\Omega))}\langle x-x_0,\nu(x)\rangle = R(\Omega)$.

Tout d'abord, puisque Ω est $\mathcal{C}^1$, il est tangent à son cercle circonscrit en tout point de contact, c'est-à-dire, tout point de $\partial\Omega\cap B(x_0^*,R(\Omega))$. On a donc

$$\max_{x\in\partial\Omega\cap B(x_0^*,R(\Omega))}\langle x-x_0^*,\nu(x)\rangle = \max_{x\in\partial\Omega\cap\partial B(x_0^*,R(\Omega))}\parallel x-x_0^*\parallel = R(\Omega)$$

Il s'ensuit que

$$\inf_{x_0\in\overline{\Omega}}\ \max_{x\in\partial\Omega\cap\partial B(x_0^*,R(\Omega))}\langle x-x_0,\nu(x)\rangle \leqslant R(\Omega).$$

On prouve enfin que pour tout $x_0 \in \Omega$, $\max\limits_{x\in\partial\Omega\cap\partial B(x_0^*,R)}\langle x-x_0,\nu(x)\rangle \geqslant R(\Omega)$. Supposons par l'absurde qu'il existe $x_0 \in \overline{B(x_0^*,R(\Omega))}$ tel que

$$\max_{x\in\partial\Omega\cap\partial B(x_0^*,R)}\langle x-x_0,\nu(x)\rangle < R(\Omega). \tag{1.35}$$

On définit alors, pour tout $x \in \partial\Omega$, la tangente T_x à Ω menée en x et $(T_x - R(\Omega)\nu(x))_+$ le demi-espace ouvert, délimité par la droite $T_x - R(\Omega)\nu(x)$ et dont le vecteur $-\nu(x)$ constitue un vecteur normal sortant (cf figure 1.10).

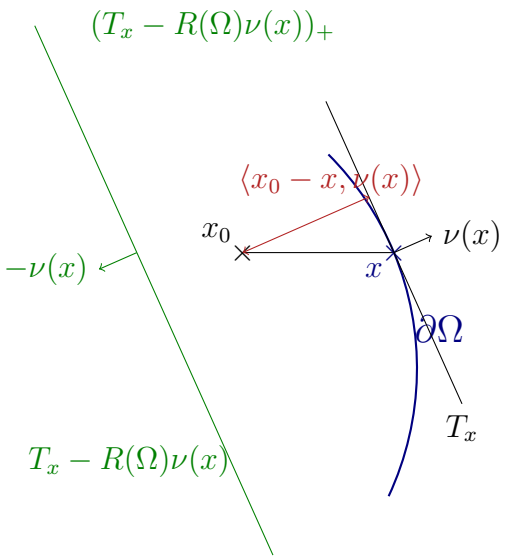


Figure 1.10

L'hypothèse (1.35) implique

$$A := B(x_0^*, R(\Omega)) \cap \left(\bigcap_{x \in \partial\Omega \cap \partial B(x_0^*, R(\Omega))} (T_x - R(\Omega)\nu(x))_+ \right) \neq \emptyset. \tag{1.36}$$

Ensuite, puisque A est un secteur angulaire non-vide de $B(x_0^*, R(\Omega))$, (voir figure 1.11), on a

$$\exists \widetilde{x} \in \partial B(x_0^*, R(\Omega)) \cap \left(\bigcap_{x \in \partial\Omega \cap \partial B(x_0^*, R)(\Omega)} (T_x - R(\Omega)\nu(x))_+ \right). \tag{1.37}$$

En notant $T_{\widetilde{x}}$ la tangente à $B(x_0^*, R(\Omega))$ menée en $\widetilde{x}$, et $\nu(\widetilde{x})$ le vecteur normal sortant à $B(x_0^*, R(\Omega))$ en $\widetilde{x}$, on a :

$$\forall x \in \partial\Omega \cap \partial B(x_0^*, R(\Omega)), \quad \widetilde{x} \in (T_x - R(\Omega)\nu(x))_+ \Rightarrow x \in (T_{\widetilde{x}} - R(\Omega)\nu(\widetilde{x}))_+ ,$$

ce qui implique

$$(\partial\Omega \cap \partial B(x_0^*, R(\Omega))) \subset (T_{\widetilde{x}} - R(\Omega)\nu(\widetilde{x}))_+.$$

Par conséquent, tout $x \in \partial\Omega \cap \partial B(x_0^*, R(\Omega))$ appartient à la demi-boule **ouverte** de rayon $R(\Omega)$ centrée en x_0^*. Ceci contredit le fait que $B(x_0^*, R(\Omega))$ est circonscrite à Ω. □

On termine cette partie par quelques simulations numériques dans le cas d'ellipses. La figure 1.12 montre que, dans ce cas particulier, la valeur optimale du

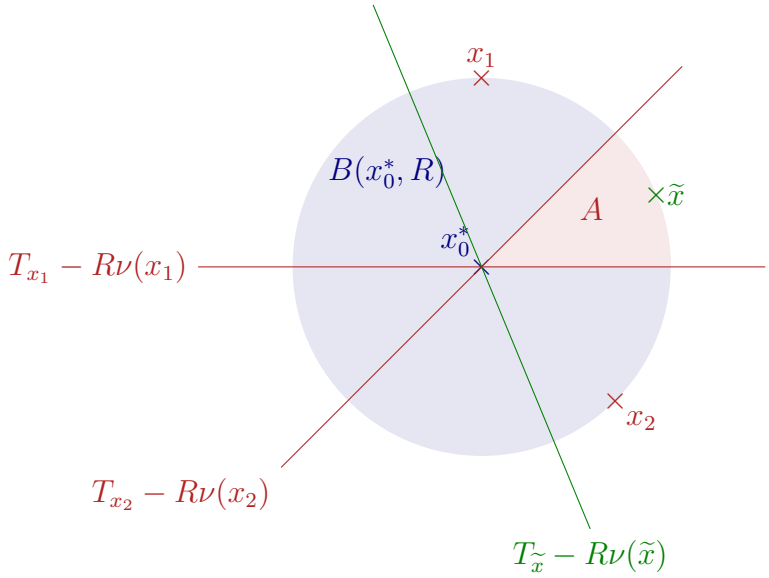


Figure 1.11

problème (1.13) se comporte différemment selon que $L \leqslant L_c$ ou $L > L_c$. Ces ont été obtenus graphes en calculant une valeur approchée de la valeur optimale de J_N, une version tronquée en fréquences du critère J (cf partie 1.3), et en considérant un grand nombre N de modes. Comme expliqué dans la proposition 12, la valeur optimale pour J_N converge vers celle du critère J lorsque N tend vers $+\infty$ Enfin l'approximation de la valeur optimale de J_N est obtenue comme le maximum d'évaluations de J_N sur un grand nombre d'élément pris au hasard dans $\overline{\mathcal{U}_L}$.

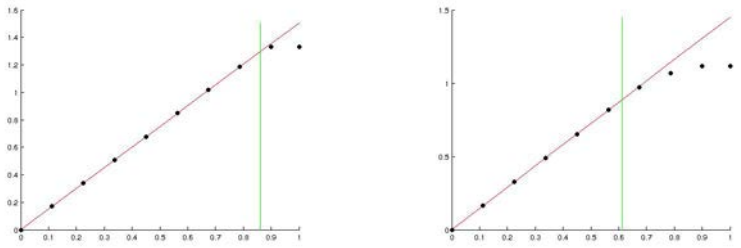


Figure 1.12 – Valeur optimale pour J (ordonnées) pour différentes valeurs de L (abcisses) pour deux ellipses de rayons et d'excentricités respectivement $(1, 1)$ et $(0.5, 2)$ (points). En rouge la valeur de J pour les fonctions de Rellich, et en vert la valeur critique L_c.

Dans les parties suivantes, contrairement à la proposition 8, les domaines Ω particuliers considérés sont convexes mais ne sont plus réguliers. On procède donc par calcul direct pour déterminer la valeur critique. Le but de ces parties est de

mettre en lumière, au travers de calculs explicites, une différence de comportement de la valeur optimale pour J, avant et après la valeur critique.

Le cas des rectangles : un exemple de bifurcation

Les simulations numériques de la partie précédentes semblent montrer une bifurcation, suivant les valeurs de L, dans le comportement de la valeur optimale pour le problème (1.13). On étudie dans ce paragraphe le problème d'optimisation (1.13) dans un cas particulier de domaine pour lequel on connait explicitement des fonctions propres, mettant en lumière ce phénomène de bifurcation.

On définit le domaine de $\mathbb{R}^2$, $\Omega =]-\alpha\pi/2, \alpha\pi/2[\times]-\beta\pi/2, \beta\pi/2[$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2$. On introduit également les notations suivantes : $\Sigma_1 = \partial\Omega_{|\{x=\alpha\pi/2\}}$, $\Sigma_2 = \partial\Omega_{|\{y=\beta\pi/2\}}$, $\Sigma_3 = \partial\Omega_{|\{x=-\alpha\pi/2\}}$ et $\Sigma_4 = \partial\Omega_{|\{y=-\beta\pi/2\}}$ (voir figure 1.13).

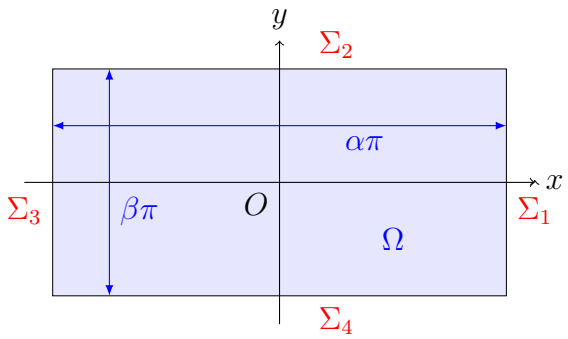


FIGURE 1.13 – Notations

Dans ce cas il est facile de constater que la famille de fonctions propres, normalisées dans $L^2(\Omega)$:

$$\phi_{n,k}(x,y) = \frac{2}{\pi\sqrt{\alpha\beta}} \sin\left(\frac{n}{\alpha}\left(x + \frac{\alpha\pi}{2}\right)\right) \sin\left(\frac{k}{\beta}\left(y + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right), \tag{1.38}$$

associées aux valeurs propres

$$\lambda_{n,k} = \frac{n^2}{\pi^2\alpha^2} + \frac{k^2}{\pi^2\beta^2},$$

constitue une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$. Quant aux dérivées normales, sur Σ_1, on a $\nu = \vec{e_x}$, et $x = \alpha\pi/2$, donc

$$\frac{\partial\phi_{n,k}}{\partial\nu} = \frac{2}{\pi\sqrt{\alpha\beta}} \frac{n}{\alpha} (-1)^n \sin\left(\frac{k}{\beta}\left(y + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right)$$

en procédant de même sur les autres bords et en prenant le carré on a

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial \phi_{n,k}}{\partial \nu}\right)^2 = \frac{4n^2}{\pi^2\alpha^3\beta}\sin^2\left(\frac{k}{\beta}\left(y+\frac{\beta\pi}{2}\right)\right) & \text{sur } \Sigma_1\cup\Sigma_3 \\ \left(\frac{\partial \phi_{n,k}}{\partial \nu}\right)^2 = \frac{4k^2}{\pi^2\alpha\beta^3}\sin^2\left(\frac{n}{\alpha}\left(x+\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right) & \text{sur } \Sigma_2\cup\Sigma_4 \end{cases} \tag{1.39}$$

Ainsi

$$J(a) = \frac{4\alpha\beta}{\pi^2(n^2\beta^2+k^2\alpha^2)} \inf_{(n,k)\in\mathbb{N}^{*2}} \left(\frac{n^2}{\alpha^2}\int_{\Sigma_1\cup\Sigma_3} a(x,y)\sin^2\left(\frac{k}{\beta}\left(y+\frac{\pi\beta}{2}\right)\right)dy + \frac{k^2}{\beta^2}\int_{\Sigma_2\cup\Sigma_4} a(x,y)\sin^2\left(\frac{n}{\alpha}\left(x+\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right)dx\right). \tag{1.40}$$

Ensuite, posons $A = \int_{\Sigma_1\cup\Sigma_3} a(x,y)\sin^2\left(\frac{k}{\beta}\left(y+\frac{\pi\beta}{2}\right)\right)dy$ et $B = \int_{\Sigma_2\cup\Sigma_4} a(x,y)\sin^2\left(\frac{n}{\alpha}\left(x+\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right)dx$. Puisque

$$\frac{n^2}{\alpha^2}A \geqslant \frac{n^2}{\alpha^2}\min(A,B),$$

$$\text{et} \quad \frac{k^2}{\beta^2}B \geqslant \frac{k^2}{\beta^2}\min(A,B),$$

on a, en sommant ces inégalités, que

$$J(a) \geqslant \frac{4}{\pi^2\alpha\beta}\inf_{(n,k)\in\mathbb{N}^{*2}}\left(\int_{\Sigma_1\cup\Sigma_3} a(x,y)\sin^2\left(\frac{k}{\beta}\left(y+\frac{\pi\beta}{2}\right)\right)dy, \int_{\Sigma_2\cup\Sigma_4} a(x,y)\sin^2\left(\frac{n}{\alpha}\left(x+\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right)dx\right).$$

Par ailleurs, en considérant les limites quand n tend vers $+\infty$ avec k fixé, et respectivement k tend vers $+\infty$ avec n fixé, dans l'équation (1.40) on obtient l'inégalité inverse. De sorte qu'enfin,

$$J(a) = \frac{4}{\pi^2\alpha\beta}\inf_{(n,k)\in\mathbb{N}^{*2}}\left(\int_{\Sigma_1\cup\Sigma_3} a(x,y)\sin^2\left(\frac{k}{\beta}\left(y+\frac{\pi\beta}{2}\right)\right)dy, \int_{\Sigma_2\cup\Sigma_4} a(x,y)\sin^2\left(\frac{n}{\alpha}\left(x+\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right)dx\right). \tag{1.41}$$

Remarque 8. *D'après* (1.41)*, pour ce choix de fonctions propres, tout rectangle satisfait les hypothèses (UB) et(WQEB). Cependant, aucun ne vérifie l'hypothèse plus restricitive (QUEB). Par ailleurs, en utilisant les mêmes arguments que dans la partie 1.2.2, on obtient un résultat de No-Gap (voir théorème 1), quel que soit* $(\alpha,\beta)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$

On a le résultat suivant :

Proposition 9. *Soit $\alpha, \beta > 0$ et $\Omega =]-\alpha\pi/2, \alpha\pi/2[\times]-\beta\pi/2, \beta\pi/2[$, alors on a*

$$L_c = \min\left(\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}, \frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right).$$

De plus,

- *Si $L \leqslant L_c$, alors $\max_{a\in\overline{\mathcal{U}_L}} J(a) = \dfrac{2L(\alpha+\beta)}{\pi\alpha\beta}$ et le problème (1.5) admet une solution si et seulement si*

$$L \in \left\{\frac{\alpha}{2(\alpha+\beta)}, \frac{\alpha}{(\alpha+\beta)}, \frac{3\alpha}{2(\alpha+\beta)}, \frac{2\alpha}{(\alpha+\beta)}\right\} \cap \left\{\frac{\beta}{2(\alpha+\beta)}, \frac{\beta}{(\alpha+\beta)}, \frac{3\beta}{2(\alpha+\beta)}, \frac{2\beta}{(\alpha+\beta)}\right\}.$$

- *Si $L \geqslant L_c$, alors $\max_{a\in\overline{\mathcal{U}_L}} J(a) = \dfrac{4}{\pi\max(\alpha,\beta)}$, et si le problème (1.5) admet une solution si et seulement si*

$$L = \frac{1}{(\alpha+\beta)}\left(\kappa\alpha + 2\beta\right), \text{ avec } \kappa \in \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}.$$

Démonstration. On a

$$L_c = \frac{n|\Omega|}{\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)\inf\limits_{x_0\in\Omega}\max\limits_{x\in\partial\Omega}\langle x - x_0, \nu(x)\rangle}.$$

Or on a d'une part $\dfrac{n|\Omega|}{\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)} = \dfrac{\pi\alpha\beta}{(\alpha\beta)}$, et d'autre part

$$\begin{aligned}
\inf_{x_0\in\Omega}\max_{x\in\partial\Omega}\langle x - x_0, \nu(x)\rangle &= \inf_{x_0\in\Omega}\max_{i\in[\![1,4]\!]}\left(d(x_0,\Sigma_i)\right), \\
&\geqslant \inf_{x_0\in\Omega}\max_{i\in\{2,4\}}\left(d(x_0,\Sigma_i)\right) = \frac{\pi\beta}{2} \\
&\geqslant \inf_{x_0\in\Omega}\max_{i\in\{1,3\}}\left(d(x_0,\Sigma_i)\right) = \frac{\pi\alpha}{2} \\
&\geqslant \frac{\pi}{2}\max\left(\alpha,\beta\right).
\end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\inf_{x_0\in\Omega}\max_{i\in[\![1,4]\!]}\left(d(x_0,\Sigma_i)\right) \leqslant \max_{i\in[\![1,4]\!]}\left(d(O,\Sigma_i)\right) = \frac{\pi}{2}\max(\alpha,\beta).$$

de sorte que $\inf_{x_0\in\Omega}\ \max_{x\in\partial\Omega}\langle x-x_0,\nu(x)\rangle = \frac{\pi}{2}\max(\alpha,\beta)$, et donc

$$L_c = \frac{2}{\alpha+\beta}\min(\alpha,\beta).$$

On suppose dans le reste de cette preuve que $\beta<\alpha$.

En utilisant le lemme de Riemann-Lebesgue dans l'équation (1.41), et le fait que $\forall a\in\overline{\mathcal{U}_L},\ \int_{\Sigma_2\cup\Sigma_4}a(x,y)dx = 2L\pi(\alpha+\beta)-\int_{\Sigma_1\cup\Sigma_3}a(x,y)dx$, on a

$$\max_{a\in\overline{\mathcal{U}_L}}J(a)\leqslant\frac{2}{\pi^2\alpha\beta}\ \max_{a\in\overline{\mathcal{U}_L}}\left(\min_{t=\int_{\Sigma_1\cup\Sigma_3}a(x,y)dy}(t,2L\pi(\alpha+\beta)-t)\right). \tag{1.42}$$

Premier cas : Si

$$L\leqslant L_c=\frac{2\beta}{\alpha+\beta} \tag{1.43}$$

- D'après (1.42), on a que

$$\max_{a\in\overline{\mathcal{U}_L}}J(a)\leqslant\frac{2}{\pi^2\alpha\beta}L\pi(\alpha+\beta).$$

Ensuite, définissant la fonction a^* de $\partial\Omega$ par

$$a^*|_{\Sigma_1\cup\Sigma_3}=L\frac{\alpha+\beta}{2\beta}\quad\text{et}\quad a^*|_{\Sigma_2\cup\Sigma_4}=L\frac{\alpha+\beta}{2\alpha},$$

d'après l'hypothèse (1.43), on a bien d'une part $0\leqslant a\leqslant 1$ presque partout, et d'autre part la condition $\int_{\partial\Omega}a(x)dx=L\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)$ est naturellement satisfaite, donc $a^*\in\overline{\mathcal{U}_L}$, ce qui implique

$$\max_{a\in\overline{\mathcal{U}_L}}J(a)\geqslant J(a^*)=\frac{2L(\alpha+\beta)}{\pi\alpha\beta}. \tag{1.44}$$

et donc

$$\max_{a\in\overline{\mathcal{U}_L}}J(a)=\frac{2L(\alpha+\beta)}{\pi\alpha\beta}. \tag{1.45}$$

- Il est possible de caractériser tous les maximiseurs de J dans $\overline{\mathcal{U}_L}$. D'après (1.42) ces maximiseurs doivent satisfaire $\int_{\Sigma_1\cup\Sigma_3}a(x,y)dy=\int_{\Sigma_2\cup\Sigma_4}a(x,y)dx=L\pi(\alpha+\beta)$ et d'après (1.41) on a

$$J(a)=\frac{2L(\alpha+\beta)}{\pi\alpha\beta}-\frac{2}{\pi^2\alpha\beta}\sup_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}\quad\begin{matrix}\left(\int_{\Sigma_1\cup\Sigma_3}a(x,y)\cos\left(\frac{2k}{\beta}(y+\frac{\pi\beta}{2})\right)dy,\right.\\ \left.\int_{\Sigma_2\cup\Sigma_4}a(x,y)\cos\left(\frac{2n}{\alpha}(x+\frac{\pi\alpha}{2})\right)dx\right).\end{matrix}$$

Ainsi, tout élément de $\overline{\mathcal{U}_L}$ dont le dévelloppement de Fourier sur $\partial\Omega$ vérifie :

$$\begin{cases} \int_{\Sigma_1\cup\Sigma_3} a(x,y)dy = \int_{\Sigma_2\cup\Sigma_4} a(x,y)dx = L\pi(\alpha+\beta) \\ \int_{\Sigma_1\cup\Sigma_3} a(x,y)\cos\left(\frac{2k}{\beta}(y+\frac{\pi\beta}{2})\right)dy \leqslant 0 \\ \int_{\Sigma_2\cup\Sigma_4} a(x,y)\cos\left(\frac{2n}{\alpha}(x+\frac{\pi\alpha}{2})\right)dx \leqslant 0. \end{cases},$$

est solution du problème (1.13). Enfin en utilisant les mêmes arguments que dans la partie 1.2.2, ce dévelloppement de Fourier et la contrainte d'aire issue de (1.42), fournissent la deuxième partie du résultat annoncé.

Deuxième cas : Si

$$L > L_c = \frac{2\beta}{\alpha+\beta}.$$

- D'après (1.42) on a

$$\max_{a\in\overline{\mathcal{U}_L}} J(a) \leqslant \frac{2}{\pi^2\alpha\beta} \max_{a\in\overline{\mathcal{U}_L}} \int_{\Sigma_2\cup\Sigma_4} a(x,y)dx,$$

puisque $a \leqslant 1$ presque partout sur $\partial\Omega$, ceci fournit en particulier

$$\max_{a\in\overline{\mathcal{U}_L}} J(a) \leqslant \frac{4}{\pi\alpha}.$$

Enfin, en définissant la fonction $a^* \in L^\infty(\partial\Omega)$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} a^* = 1 & \text{sur } \Sigma_1 \cup \Sigma 3, \\ a^* = \frac{L(\alpha+\beta)-\beta}{\alpha} & \text{sur } \Sigma_2 \cup \Sigma_4, \end{cases}$$

On a bien $a^* \in \overline{\mathcal{U}_L}$. En effet, on a $0 \leqslant a^* \leqslant 1$, et

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} a^*(s)d\mathcal{H}^{n-1}(s) &= \int_{\Sigma_1\cup\Sigma_3} a(x,y)dy + \int_{\Sigma_2\cup\Sigma_4} a(x,y)dx \\ &= 2\pi\beta + 2\pi\alpha\left(\frac{L(\alpha+\beta)-\beta}{\alpha}\right) = 2\pi L(\alpha+\beta) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega). \end{aligned}$$

Or, par calcul direct dans (1.41), $J(a^*) = \frac{4}{\pi\alpha}$, on a donc

$$J(a_0) = \max_{a\in\overline{\mathcal{U}_L}} J(a) = \frac{4}{\pi\alpha}.$$

- On peut caractériser toutes les solutions du problème (1.13). Comme précédemment, tout élément de $\overline{\mathcal{U}_L}$ dont le développement de Fourier sur $\partial\Omega$

vérifie

$$\begin{cases} a(x,y) = 1 \quad \text{sur } \Sigma_1 \cup \Sigma_3 \\ \int_{\Sigma_2\cup\Sigma_4} a(x,y)dx = 2\pi L(\alpha+\beta) - 2\pi\beta \\ \int_{\Sigma_2\cup\Sigma_4} a(x,y)\cos\left(\frac{2n}{\alpha}(x+\frac{\pi\alpha}{2})\right)dx \leqslant L\pi(\alpha+\beta) - 2\pi\beta. \end{cases},$$

est solution du problème (1.13). Les conditions sur les coefficients de Fourier de a sur $\Sigma_2 \cup \Sigma_4$ sont maintenant

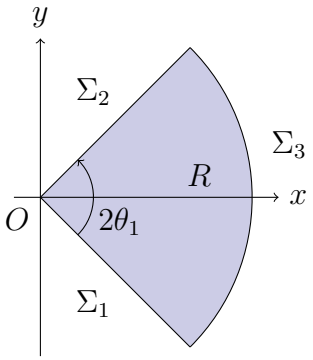
$$\int_{\Sigma_2\cup\Sigma_4} a(x,y)\cos\left(\frac{2n}{\alpha}(x+\frac{\pi\alpha}{2})\right)dx \leqslant (\alpha-\beta)\pi,$$

et si le terme de gauche est négatif, a est solution du problème (1.13). Enfin en utilisant les mêmes arguments que dans la partie 1.2.2, ce dévelloppement de Fourier et la contrainte d'aire issue de (1.42), fournissent la deuxième partie du résultat annoncé.

□

La cas du secteur angulaire

Dans cette partie on définit dans $\mathbb{R}^2$ le domaine convexe $\Omega = \{(r,\theta), 0 < r < R, -\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_1$, avec $\theta_1 \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. On notera par ailleurs Σ_1, Σ_2 et Σ_3, les sous-ensembles de $\partial\Omega$ définis respectivement par $\{\theta = -\theta_1\}$, $\{\theta = \theta_1\}$ et $\{r = R\}$



Comme dans la partie 1.2.3, en utilisant la méthode de séparation des variables, on obtient que la famille $(\phi_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^{*2}}$ de fonctions normalisées dans $L^2(\Omega)$, suivante :

$$\phi_{n,k}(r,\theta) = \frac{\sqrt{2}}{R\sqrt{\theta_1}} \frac{J_{\pi n/2\theta_1}(z_{n,k}\frac{r}{R})}{|J'_{\pi n/2\theta_1}(z_{n,k})|} \sin\left(\frac{n\pi}{2\theta_1}(\theta+\theta_1)\right),$$

où $z_{n,k}$ désigne le $k^{\text{ème}}$ zero de la fonction de Bessel de première espèce $J_{\pi n/\theta_1}$, constitue une base hilbertienne de fonctions propres du Laplacien Dirichlet. Les

valeurs propres associées à ces fonctions propres valent par ailleurs

$$\lambda_{n,k} = \frac{z_{n,k}^2}{R^2}.$$

Les dérivées normales des fonctions propres sont alors données par les relations suivantes

$$\begin{aligned}
\text{sur } \Sigma_2 : \quad \frac{\partial \phi_{n,k}}{\partial \nu} &= \frac{\sqrt{2}}{R\sqrt{\theta_1}} \frac{J_{\pi n/2\theta_1}(z_{n,k}\frac{r}{R})}{|J'_{\pi n/2\theta_1}(z_{n,k})|} \frac{n\pi}{r2\theta_1}(-1)^n \\
\text{sur } \Sigma_1 : \quad \frac{\partial \phi_{n,k}}{\partial \nu} &= \frac{\sqrt{2}}{R\sqrt{\theta_1}} \frac{J_{\pi n/2\theta_1}(z_{n,k}\frac{r}{R})}{|J'_{\pi n/2\theta_1}(z_{n,k})|} \frac{n\pi}{r2\theta_1} \\
\text{sur } \Sigma_3 : \quad \frac{\partial \phi_{n,k}}{\partial \nu} &= \frac{\sqrt{2}}{R\sqrt{\theta_1}} \frac{J'_{\pi n/2\theta_1}(z_{n,k})}{|J'_{\pi n/2\theta_1}(z_{n,k})|} \frac{z_{n,k}}{R} \sin\left(\frac{n\pi}{2\theta_1}(\theta+\theta_1)\right).
\end{aligned}$$

Il vient :

$$\begin{aligned}
J(a) = \quad & \frac{2}{R^2\theta_1} \inf_{(n,k)\in\mathbb{N}^{*2}} \left\{ \int_{-\theta_1}^{\theta_1} a(R,\theta) \sin\left(\frac{n\pi}{2\theta_1}(\theta+\theta_1)\right)^2 Rd\theta \right. \\
& \left. + \frac{R^2n^2\pi^2}{4z_{n,k}^2\theta_1^2} \int_0^R \frac{J_{\pi n/2\theta_1}(z_{n,k}\frac{r}{R})^2}{|J'_{\pi n/2\theta_1}(z_{n,k})|^2} \frac{(a(r,-\theta_1)+a(r,\theta_1))}{r^2} dr \right\}. \qquad (1.46)
\end{aligned}$$

Le problème (1.13) s'écrit

$$\max_{a\in\overline{\mathcal{U}_L}} J(a) \qquad (1.47)$$

avec

$$\begin{aligned}
&\overline{\mathcal{U}_L} = \{a \in L^\infty(\partial\Omega, [0,1]), \\
&\text{tel que } \int_{-\theta_1}^{\theta_1} a(R,\theta) Rd\theta + \int_0^R \left[a(r,-\theta_1)+a(r,\theta_1)\right] dr = (2\theta_1+2)RL \Big\}.
\end{aligned}$$

L'expression de J sur les bords plats du secteur angulaire est difficile à manipuler, du fait de la présence des fonctions de Bessel. Pour cette raison, le résultat suivant fournit une réponse partielle au problème (1.5). Le problème relaxé (1.13), lui, est complètement traité.

Proposition 10. *Soit* $L_c = \dfrac{\theta_1(1+\tan\theta_1)}{(1+\theta_1)\tan\theta_1}$. *On a*

$$\max_{a\in\overline{\mathcal{U}_L}} J(a) = \begin{cases} \dfrac{L\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)}{|\Omega|} & \text{si } 0 \leqslant L \leqslant L_c, \\ \dfrac{(L+L_c)\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)}{2|\Omega|} & \text{si } L_c < L \leqslant 1. \end{cases} \qquad (1.48)$$

Par ailleurs si $L \geqslant L_c$, on démontre un résultat de No-Gap (1.20).

Démonstration. Si on fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et qu'on fait tendre k vers $+\infty$, la suite $(\frac{1}{\lambda_{n,k}}\left(\frac{\partial \varphi_{n,k}}{\partial \nu}\right)^2)_{(n,k)\in\mathbb{N}^{*2}}$ ne converge pas vers une constante sur $\partial\Omega$. Ainsi, Ω ne vérifie par la propriété (QUEB).

On ne sait pas si Ω satisfait la propriété (WQEB). Les deux lemmes suivants établissent une version affaiblie de la propriété (WQEB) et permettent de contourner cette difficulté.

Lemme 2. *Soit $s \in]0,1[$, on définit la fonction F_s par*

$$\forall x \in [s,1], \quad F_s(x) = \int_s^x \frac{du}{u^2\sqrt{u^2-s^2}}.$$

On a alors

$$\sup_{a\in\mathcal{V}} \inf_{s\in]0,1[} \frac{1}{F_s(1)} \int_0^1 \frac{a(u)\chi_{(s,1)}(u)}{u^2\sqrt{u^2-s^2}} du = 1,$$

avec $\mathcal{V} = \{a \in L^\infty([0,1])$ *tel que* $\int_0^1 a(u)\,du = 1\}$.

Démonstration. Cette preuve s'inspire de [PTZ12, Proposition 4].

On définit la fonction

$$K : \overline{\mathcal{U}_L} \ni a \mapsto \inf_{s\in]0,1[} \frac{1}{F_s(1)} \int_0^1 \frac{a(u)\chi_{(s,1)}(u)}{u^2\sqrt{u^2-s^2}}\, du.$$

Notons que $K(a=1) = 1$ par définition de F_s, et que la borne inférieure dans la définition de K est atteinte pour tout $s \in]0,1[$. En tant que borne inférieure de fonctions linéaires, la fonction K est concave. Ainsi, pour conclure, il suffit de montrer que la dérivée directionnelle de K en $a=1$ dans toutes les directions admissibles h satisfait les conditions d'optimalité au premier ordre, c'est-à-dire $dK(a=1).h \leqslant 0$ pour toute fonction h définie sur $[0,1]$ telle que $\int_0^1 h(u)du = 0$.

D'après le théorème de Danskin (voir en annexe le théorème 3) [11], on a

$$dK(a=1).h = \inf_{s\in(0,1)} \frac{1}{F_s(1)} \int_0^1 \frac{h(u)\chi_{(s,1)}(u)}{u^2\sqrt{u^2-s^2}} du.$$

On suppose, par l'absurde, qu'il existe une fonction h telle que

$$\frac{1}{F_s(1)} \int_0^1 \frac{h(u)\chi_{(s,1)}(u)}{u^2\sqrt{u^2-s^2}} du > 0,$$

11. Notons que $[0,1[$ n'étant pas compact on ne peut appliquer le théorème de Danskin sous sa forme initiale. Il s'agit donc ici d'appliquer la version plus générale [BR95, Theorem D2] de ce théorème, en notant que pour $a=1$ tout $s \in (0,1)$ réalise la borne inférieure dans la définition de K.

pour tout $s \in (0,1)$. On a donc

$$\begin{aligned} 0 &< \int_{s=0}^{1}\int_{u=s}^{1} \frac{s\,h(u)}{u\sqrt{u^2-s^2}}\,du\,ds = \int_{u=0}^{1}\int_{s=0}^{u} \frac{s\,h(u)}{u\sqrt{u^2-s^2}}\,ds\,du \\ &= -\int_0^1 h(x)dx = 0, \end{aligned}$$

ce qui mène à une contradiction. La conclusion s'ensuit. □

Lemme 3. *Pour tout $a \in \overline{\mathcal{U}_L}$, on a $J(a) \leqslant \frac{L\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)}{|\Omega|}$.*

Démonstration. Soit a dans $\overline{\mathcal{U}_L}$. On montre l'existence d'une sous-suite de $(n,k) \in \mathbb{N}^2$ telle que

$$\int_{\partial\Omega} \frac{a(x)}{\lambda_{n,k}} \left(\frac{\partial\varphi_{n,k}}{\partial\nu}\right)^2 d\mathcal{H}^{n-1}(x) \longrightarrow \frac{1}{\theta_1 R^2}\int_{\partial\Omega} a(x)\,d\mathcal{H}^{n-1}(x) = \frac{L\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)}{|\Omega|}.$$

Cette preuve s'inspire de [PTZ12, Proposition 4].

Sur Σ_3 on a

$$\frac{1}{\lambda_{n,k}}\left(\frac{\partial\varphi_{n,k}}{\partial\nu}\right)^2 = \frac{2}{R^2\theta_1}\sin\left(\frac{n\pi}{2\theta_1}(\theta+\theta_1)\right),$$

Ainsi, d'après le lemme de Riemann-Lebesgue on a

$$\int_{\Sigma_3} \frac{a(x)}{\lambda_{n,k}} \left(\frac{\partial\varphi_{n,k}}{\partial\nu}\right)^2 d\mathcal{H}^{n-1}(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\theta_1 R^2}\int_{\Sigma_3} a(x)\,d\mathcal{H}^{n-1}(x).$$

Pour conclure, il suffit donc de prouver l'existence d'un réel strictement positif α tel que, gardant le ratio n/k constant égal à α, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\Sigma_1\cup\Sigma_2} \frac{a(x)}{\lambda_{n,k}} \left(\frac{\partial\varphi_{n,k}}{\partial\nu}\right)^2 d\mathcal{H}^{n-1}(x) \leqslant \frac{1}{\theta_1 R^2}\int_{\Sigma_1\cup\Sigma_2} a(x)\,d\mathcal{H}^{n-1}(x).$$

On pose $\mu = \frac{n\pi}{2\theta_1}$ et on définit la fonction $\Phi_{n,k}$ par

$$\forall u \in [0,1], \quad \Phi_{n,k}(u) = \frac{n^2\pi^2}{2z_{n,k}^2\theta_1^2}\left(\frac{J_\mu\left(z_{n,k}\frac{r}{R}\right)}{rJ'_\mu(z_{n,k})}\right)^2.$$

Alors

$$\frac{1}{\lambda_{n,k}}\left(\frac{\partial\varphi_{n,k}(r)}{\partial\nu}\right)^2 = \frac{1}{\theta_1}\Phi_{n,k}\left(\frac{r}{R}\right) \quad \text{sur} \quad \Sigma_1\cup\Sigma_2.$$

Ainsi, il s'agit enfin de prouver que pour tout $\rho \in L^\infty([0,1],[0,1])$, il existe $\alpha > 0$

tel que pour n et k définis comme plus haut, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \rho(u)\Phi_{n,k}(u)\,du \leqslant \int_0^1 \rho(u)\,du \tag{1.49}$$

D'après [Luk62, p. 257], on a

$$\int_0^1 \Phi_{n,k}(u)\,du = \frac{n^2\pi^2}{n^2\pi^2-\theta_1}. \tag{1.50}$$

Donc, en considérant la limite faible de la suite de mesures $\Phi_{n,k}(u)\,du$ pour un ratio n/k fixé, et en faisant varier ce ratio, on obtient la famille de mesures de probabilités

$$f_s(u)\,du = \frac{1}{F_s(1)}\frac{\chi_{(s,1)}(u)}{u^2\sqrt{u^2-s^2}}\,du$$

paramétrée par $s \in (0,1)$.

Pour prouver (1.49), supposons par l'absurde que pour tout $s \in (0,1)$, on a

$$\frac{1}{F_s(1)}\int_0^1 \frac{\rho(u)\chi_{(s,1)}(u)}{u^2\sqrt{u^2-s^2}}\,du > \int_0^1 \rho(u)\,du.$$

Ceci contredit le lemme 2 et la conclusion s'ensuit. □

Le lemme suivant établit la valeur critique L_c définie dans la proposition 8.

Lemme 4. *On a* $L_c = \frac{\theta_1(1+\tan\theta_1)}{(1+\theta_1)\tan\theta_1}$.

Démonstration. D'après la preuve de la proposition 8, la valeur critique L_c est donnée par l'équation (1.34). Par conséquent, on doit déterminer la quantité

$$\delta := \min_{x_0\in\overline{\Omega}} \max_{x\in\partial\Omega} \langle x-x_0, \nu_x\rangle.$$

Pour plus de clarté, la figure 1.14 reprend les notations qui seront utilisées tout au long de cette preuve.

En écrivant en coordonées polaires $x_0 = (r_0,\theta_0)$, on a pour tout $x = (R,\theta)$ en coordonées polaires

$$\begin{aligned} d = \langle x-x_0,\nu_x\rangle &= r_0\sin(\theta_1+\theta_0), \text{ sur } \Sigma_1,\\ &= r_0\sin(\theta_1-\theta_0), \text{ sur } \Sigma_2,\\ &= \frac{Rd_1}{d_1+r_0} = R - r_0\cos(\theta_0-\theta), \text{ sur } \Sigma_3. \end{aligned}$$

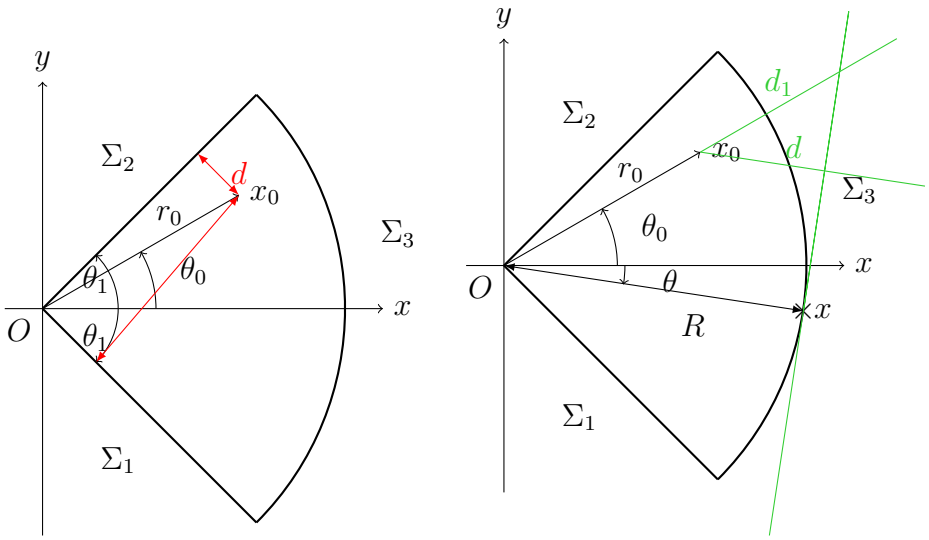


FIGURE 1.14 – Notations

Enfin, des arguments de symmétrie classiques fournissent

$$\begin{aligned}\delta &= \min_{\substack{0\leqslant r_0\leqslant R\\ \theta_0\in[-\theta_1,\theta_1]}} \max\{R - r_0\cos(\theta_0+\theta_1), R - r_0\cos(\theta_0-\theta_1),\\ &\qquad\qquad r_0\sin(\theta_1-\theta_0), r_0\sin(\theta_1+\theta_0)\}\\ &= \min_{0\leqslant r_0\leqslant R} \max\{R - r_0\cos\theta_1, r_0\sin\theta_1\},\end{aligned}$$

et ce maximum est atteint pourvu que $R - r_0\cos\theta_1 = r_0\sin\theta_1$. Il s'ensuit que

$$\delta = \frac{R\tan(\theta_1)}{1+\tan(\theta_1)},$$

ce qui permet de conclure. □

Le lemme suivant établit la valeur optimale pour le problème relaxé (1.13).

Lemme 5. *Soit* $L_c = \dfrac{\theta_1(1+\tan\theta_1)}{(1+\theta_1)\tan\theta_1}$. *On a*

$$\max_{a\in\mathcal{U}_L} J(a) = \begin{cases} \dfrac{L\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)}{|\Omega|} & \text{si } 0\leqslant L\leqslant L_c,\\[2ex] \dfrac{(L+L_c)\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)}{2|\Omega|} & \text{si } L_c < L\leqslant 1.\end{cases}$$

Démonstration. D'après le lemme 3, on a $J(a)\leqslant \frac{L\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)}{|\Omega|}$ et d'après le lemme 4, le

terme de droite est atteint par toute fonction de Rellich admissible lorsque $L \leqslant L_c$.

On suppose maintenant $L > L_c$. Considérons a_c, la solution de Rellich admissible du problème (1.13) lorsque $L = L_c$. On vérifie que $a_c = 1$ sur $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ et $a_c = R - r_0\cos(\theta)$ sur Σ_3. Soit $a \in \overline{\mathcal{U}_L}$ que l'on décompose en $a = a_c + h$, de sorte que

$$\int_{-\theta_1}^{\theta_1} a(R,\theta)Rd\theta = L\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) - 2R,$$

et

$$\int_{-\theta_1}^{\theta_1} h(R,\theta)Rd\theta + \int_{\Sigma_1\cup\Sigma_2} h = (L-L_c)\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)$$

et $h \leqslant 0$ sur $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$.

L'équation (1.18) avec $L = L_c$ fournit

$$\frac{2}{R^2\theta_1}\left(\int_{-\theta_1}^{\theta_1} a_c(R,\theta)\sin\left(\frac{n\pi}{2\theta_1}(\theta+\theta_1)\right)^2 Rd\theta + \frac{R^2n^2\pi^2}{2z_{n,k}^2\theta_1^2}\int_0^R \frac{J_{\pi n/2\theta_1}(z_{n,k}\frac{r}{R})^2}{|J'_{\pi n/2\theta_1}(z_{n,k})|^2}\frac{dr}{r^2}\right) = \frac{L_c\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)}{|\Omega|},$$

pour tout n et k dans $\mathbb{N}^*$.

Ainsi on a

$$\frac{R^2n^2\pi^2}{2z_{n,k}^2\theta_1^2}\int_0^R \frac{J_{\pi n/2\theta_1}(z_{n,k}\frac{r}{R})^2}{|J'_{\pi n/2\theta_1}(z_{n,k})|^2}\frac{dr}{r^2} = L_c\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) - \int_{-\theta_1}^{\theta_1} a_c(R,\theta)\sin\left(\frac{n\pi}{2\theta_1}(\theta+\theta_1)\right)^2 Rd\theta.$$

Utilisant cette identité, l'équation (1.46), et le fait que $h \leqslant 0$ sur $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ il vient que $J(a) = \inf_{(n,k)\in\mathbb{N}^{*2}} j_{n,k}(a)$, avec

$$\begin{aligned} j_{n,k}(a) &= \frac{2}{R^2\theta_1}\int_{-\theta_1}^{\theta_1}(a_c(R,\theta)+h(R,\theta))\sin\left(\frac{n\pi}{2\theta_1}(\theta+\theta_1)\right)^2 Rd\theta \\ &\quad + \frac{n^2\pi^2}{z_{n,k}^2\theta_1^3}\int_0^R (1+h(r,\theta_1)+h(r,-\theta_1))\frac{J_{\pi n/2\theta_1}(z_{n,k}\frac{r}{R})^2}{|J'_{\pi n/2\theta_1}(z_{n,k})|^2}\frac{dr}{r^2} \\ &\leqslant \frac{2}{R^2\theta_1}\left(\int_{-\theta_1}^{\theta_1} h(R,\theta)\sin\left(\frac{n\pi}{2\theta_1}(\theta+\theta_1)\right)^2 Rd\theta + L_c\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)\right) \\ &= \frac{(L+L_c)\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)}{2|\Omega|} - \frac{1}{R^2\theta_1}\int_{-\theta_1}^{\theta_1} h(R,\theta)\cos\left(\frac{n\pi}{\theta_1}(\theta+\theta_1)\right) Rd\theta. \end{aligned}$$

Par conséquent, en utilisant le lemme de Riemann-Lebesgue, on a

$$\begin{aligned} J(a) &\leqslant \frac{(L+L_c)\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)}{2|\Omega|} - \frac{1}{R^2\theta_1}\sup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\int_{-\theta_1}^{\theta_1} h(R,\theta)\cos\left(\frac{n\pi}{\theta_1}(\theta+\theta_1)\right) Rd\theta\right\} \\ &\leqslant \frac{(L+L_c)\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)}{2|\Omega|}. \end{aligned}$$

Enfin, le terme de droite de cette dernière inégalité est atteinte par toute fonction a^* valant 1 sur $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ et constante sur Σ_3, avec une constante choisie pour que $\int_{\partial\Omega} a^* \, d\mathcal{H}^{n-1}(x) = L\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)$. Ce qui conclut cette preuve. □

Il reste à prouver le résultat de No-Gap entre les valeurs optimales du problème (1.5) et de sa version relaxée (1.13) dans le cas $L \geqslant L_c$. Puisque toute solution du problème relaxé (1.13) vaut 1 sur $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$, il suffit d'exhiber une suite $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{U}_L$ tels que $a_m = 1$ sur $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ et

$$\lim_{m\to+\infty} \inf_{(n,k)\in\mathbb{N}^{*2}} \int_{-\theta_1}^{\theta_1} a_m(R,\theta) \sin\left(\frac{n\pi(\theta+\theta_1)}{2\theta_1}\right)^2 R d\theta = L\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) - 2R.$$

On conclut en adaptant la preuve du théorème 2 où une telle suite est construite dans un cas similaire. □

1.3 Le problème tronqué en fréquences et simulations numériques

Lorsqu'il s'est agit dans la partie 1.2.1 de déterminer la valeur optimale de J sur $\overline{\mathcal{U}_L}$, nous avons dû faire, en particulier, les deux hypothèses assez fortes (WQEB) et (UB). Quant à la valeur optimale sur $\mathcal{U}_L$ (via le théorème de No-Gap), il a fallu utiliser l'hypothèse plus restricitve (QUEB). Une question naturelle à ce stade est de chercher un moyen d'approcher la valeur optimale pour J lorsque ces hypothèses ne peuvent être satisfaites. A cette fin on propose de tronquer en fréquences le critère J, défini en (1.14), en ne considérant que les N premières fonctions propres. Autrement dit, on considère le problème d'optimisation de forme :

$$\sup_{a\in\overline{\mathcal{U}_L}} J_N(a), \tag{1.51}$$

où

$$J_N(a) = \inf_{1\leqslant j\leqslant N} \frac{1}{\lambda_j} \int_{\partial\Omega} a(x) \left(\frac{\partial\phi_j}{\partial\nu}(x)\right)^2 d\mathcal{H}^{n-1}. \tag{1.52}$$

On étudiera notamment le comportement des maximseurs quand N tends vers $+\infty$.

L'étude du problème tronqué trouve également son intêret dans les applications pratiques. En ingénierie notamment, il est souvent plus pertinent de ne prendre en compte qu'un nombre fini de modes. Enfin, contrairement au problème général, on montrera qu'en un sens générique l'optimum est une indicatrice, autrement dit un élément de $\mathcal{U}_L$. Ceci est évidemment un point particulièrement utile lors de la mise

en oeuvre pratique.

1.3.1 Valeur optimale du problème tronqué

On a le résultat d'existence suivant, dont la preuve est en tout point identique à celle de la proposition 3 :

Proposition 11. *Soit $L \in [0,1]$ et $N \in \mathbb{N}^*$, le problème* (1.51) *admet au moins une solution dans $\overline{\mathcal{U}_L}$.*

On a également la proposition suivante.

Proposition 12. *J_N Γ-converge vers J au sens de De Giorgi (voir définition 2). En particulier, d'après le théorème 1, toute suite $(a_N^*)_{N\in\mathbb{N}} \in (\overline{\mathcal{U}_L})^{\mathbb{N}}$ de maximiseurs J_N dans $\overline{\mathcal{U}_L}$ converge (à sous-suite près) pour la topologie faible étoile de $L^\infty(\partial\Omega,[0,1])$ vers un maximiseur de J dans $\overline{\mathcal{U}_L}$. Egalement*

$$\max_{a\in\overline{\mathcal{U}_L}} J(a) = \lim_{N\to+\infty} J_N(a_N^*).$$

Démonstration. Pour montrer la Γ-convergence de J_N vers J il faut prouver que :

(i) Pour toute suite $(a_N)_{N\in\mathbb{N}}$ dans $\overline{\mathcal{U}_L}$ qui converge vers a pour la topologie faible étoile de $L^\infty(\partial\Omega,[0,1])$ on a $\limsup_{N\to+\infty} J_N(a_N) \leqslant J(a)$.

(ii) Pour tout $a \in \overline{\mathcal{U}_L}$, il existe une suite $(a_N)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\overline{\mathcal{U}_L}$ convergeant vers a pour la topologie faible étoile de $L^\infty(\partial\Omega,[0,1])$, telle que $J(a) \leqslant \liminf_{N\in\mathbb{N}} J_N(a_N)$

Pour (ii), on pose pour tout N dans $\mathbb{N}$, $a_N = a$, pour a dans $\overline{\mathcal{U}_L}$. Dans ce cas on a évidemment $J(a) \leqslant J_N(a)$ et donc le résultat.

Pour (i), on introduit une suite (a_N) et a dans $\overline{\mathcal{U}_L}$, tels que a_N converge vers a pour la topologie faible étoile de $L^\infty(\partial\Omega,[0,1])$. Du fait de l'expression de J, on a que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un k_0 dans $\mathbb{N}^*$ tel que

$$J(a) \leqslant \frac{1}{\lambda_{k_0}} \int_{\partial\Omega} a(x) \left(\frac{\partial\phi_{k_0}}{\partial\nu}(x)\right)^2 d\mathcal{H}^{n-1} \leqslant J(a) + \varepsilon.$$

Notons $j_{k_0}(a) = \dfrac{1}{\lambda_{k_0}} \displaystyle\int_{\partial\Omega} a(x) \left(\frac{\partial\phi_{k_0}}{\partial\nu}(x)\right)^2 d\mathcal{H}^{n-1}$. Alors, pour tout $N \geqslant k_0$, on a $J_N(a_N) \leqslant j_{k_0}(a_N)$, et puisque $(a_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers a pour la topologie faible étoile de $L^\infty(\partial\Omega,[0,1])$, et que $\frac{1}{\lambda_{k_0}}\left(\frac{\partial\phi_{k_0}}{\partial\nu}\right)^2$ appartient à $L^1(\partial\Omega,\mathbb{R})$, $j_{k_0}(a_N)$ converge vers $j_{k_0}(a)$. Ainsi,

$$\limsup_{N\in\mathbb{N}} J_N(a_N) \leqslant \limsup_{N\in\mathbb{N}} j_{k_0}(a_N) = j_{k_0}(a) \leqslant J(a) + \varepsilon.$$

□

Remarque 9.

Notons que, lorsqu'on cherche $\sup_{a\in\overline{\mathcal{U}_L}} J(a)$*, la proposition 12 ne fournit pas a priori de suite maximisante pour* J *dans* $\overline{\mathcal{U}_L}$*. En effet, puisque* J *n'est que semi-continue supérieurement, si l'on construit une suite de maximiseurs de* J_N *dans* $\overline{\mathcal{U}_L}$*, notés* a_N^**, ils convergent vers* a^**, une solution du problème* (1.13) *pour la topologie faible étoile de* $L^\infty(\partial\Omega,[0,1])$*, mais si il est possibe que* $J(a_N^*)$ *ne converge pas vers* $J(a^*)$*.*

En dimension 1*, le phénomène de* "spillover"*, introduit dans [HH05] synthétise bien le genre de problème qui peut se présenter. Ce qui suit à pour but d'illustrer par un exemple simple ce phénomène de spillover.*

Définissons à titre d'exemple, et de manière très artificielle $\partial\Omega=[0,1]$*, et prenons* $\left(\frac{\partial\phi_{j_0}}{\partial\nu}(x)\right)^2=\sin(n\pi x)^2$ *(notons que le cas du carré se ramène à ce cadre théorique, voir partie 1.2.2). Notons maintenant pour tout* $N\in\mathbb{N}^*$*,* $\chi^*_{\Gamma_N}\in\overline{\mathcal{U}_L}$*, un maximiseur de* J_N *(qui existe, voir [HH05]). On veut montrer que* $J(\chi^*_{\Gamma_N})$ *ne converge pas vers* $\sup_{a\in\overline{\mathcal{U}_L}} J(a)=L/2$*. Puisqu'on a* $J(\chi^*_{\Gamma_N})\leqslant J_{N+1}(\chi^*_{\Gamma_N})\leqslant J_N(\chi^*_{\Gamma_N})$*, il suffit de prouver que* $J_{N+1}(\chi^*_{\Gamma_N})<L/2-\varepsilon$*, où* ε *est indépendant de* N*. A sous-suite près, et sauf pour* $L\in\{0,1/2,1\}$*, on peut supposer que* $J_{N+1}(\chi^*_{\Gamma_N})=\int_0^1\chi^*_{\Gamma_N}(x)\sin((N+1)\pi x)^2dx$

En effet, si l'on ne fait pas cette hypothèse, on voit facilement qu'on est mené à l'existence d'un $\kappa\in\mathbb{N}$ *tel que* $\max J_N=\max J_{N+1}$*, et* $\Gamma_N=\Gamma_{N+1}$*,* $\forall N\geqslant\kappa$*. Puisque* χ_{Γ_N} *doit converger vers* a^* *pour la topologie faible étoile de* $L^\infty(\partial\Omega)$*, ceci impliquerai que* $a^*=\chi_{\Gamma_\kappa}$ *ce qui contredit le fait que* $\max_{a\in\overline{\mathcal{U}_L}} J(a)$ *ne peut être atteint par un élément de* $\mathcal{U}_L$*, ce qu'on sait dans le cas* $L\neq\{0,1/2,1\}$*, d'après [HH05].*

D'après [HH05] et [PTZ13b], si N *est pair on a que*

$$\Gamma_N^*=\left(\bigcup_{i=1}^K[\alpha_i-\ell_i/2,\alpha_i+\ell_i/2]\right)\cup\left(\bigcup_{i=1}^K[1-\alpha_i-\ell_i/2,1-\alpha_i+\ell_i/2]\right)$$

où $N=2K$*,* $\alpha_i=\frac{i}{N+1}$ *et* $\ell_i=\frac{L}{N}+\frac{1}{N}o(L)$*. Il s'ensuit que*

$$J_{N+1}(\chi^*_{\Gamma_N})=\frac{L}{2}-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^K\int_{\alpha_i-\ell_i/2}^{\alpha_i+\ell_i/2}\cos((N+1)2\pi x)dx-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^K\int_{1-\alpha_i-\ell_i/2}^{1-\alpha_i+\ell_i/2}\cos((N+1)2\pi x)dx,$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{K}\int_{\alpha_i-\ell_i/2}^{\alpha_i+\ell_i/2}\cos((N+1)2\pi x)dx &= \sum_{i=1}^{K}\frac{1}{\pi(N+1)}\sin((N+1)\pi\ell_i)\\ &= \sum_{i=1}^{K}\frac{1}{\pi(N+1)}\left(\frac{N+1}{N}\pi L+\frac{N+1}{N}o(L)\right)\\ &= \frac{L}{2}+o(L).\end{aligned}$$

Le même résultat est évidemment vrai pour $\sum_{i=1}^{K}\int_{1-\alpha_i-\ell_i/2}^{1-\alpha_i+\ell_i/2}\cos((N+1)2\pi x)dx$*, et donc*

$$J_{N+1}(\chi^*_{\Gamma_N})=o(L).$$

On peut faire un calcul similaire quand N est impair. Ceci permet de conclure pour L suffisamment petit.

1.3.2 Existence et unicité de solutions dans $\mathcal{U}_L$

On veut montrer dans cette partie que pour une large classe de domaines Ω, le problème (1.51) admet une unique solution s'écrivant comme une indicatrice d'un sous-ensemble de $\partial\Omega$. Ce résultat repose sur la notion de généricité. Grossièrement, la généricité permet de quantifier la fréquence et la robustesse d'une propriété donnée.

Cadre

Définissons tout d'abord la notion de généricité qui sera utilisée ici. Soit X un espace topologique, et $\mathcal{P}$ une propriété représentée par une fonction $\mathcal{P}:X\mapsto\{0,1\}$. On dira que $\mathcal{P}$ est générique s'il existe un sous-espace $Y\subset X$ ouvert et dense, tel que $\mathcal{P}(Y)=1$.

Nous allons donc construire un espace topologique X de domaines Ω, la propriété $\mathcal{P}$ représente évidemment le résultat d'existence et d'unicité de solutions dans $\mathcal{U}_L$.

Soit $\alpha\in\mathbb{N}^*$, on considère les domaines Ω qui sont des boules topologiques $\mathcal{C}^\alpha$ (c'est-à-dire un domaine ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel qu'il existe un $\mathcal{C}^\alpha$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui transforme la boule unité en Ω), On note $\mathcal{C}^\alpha_{\text{Diff}}$ l'ensemble des $\mathcal{C}^\alpha$-difféomorphismes. On munit ensuite $\mathcal{C}^\alpha_{\text{Diff}}$ de la topologie τ usuelle sur cet espace, induite par la famille de semi-normes p_η :

$$\forall\eta\in[\![1,\alpha]\!],\ \forall K\subset\mathbb{R}^n\text{ compact},\ \forall T\in\mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n),p_\eta(T)=\sup_{x\in K,j\in[\![1,\alpha]\!]^n,|j|\leqslant\eta}\left\{|\partial^j T(x)|\right\}.$$

Dans toute la suite on identifiera le domaine Ω avec l'élément correspondant dans $\mathcal{C}^{\alpha}_{\text{Diff}}$. De sorte que l'espace topologique des domaines Ω se notera :

$$\widetilde{\Sigma_\alpha} = \{T(B(0,1)), T \in \mathcal{C}^{\alpha}_{\text{Diff}}\}.$$

muni de la topologie τ. Définissons également dans cet espace topologique, Σ_α la composante connexe dans $(\widetilde{\Sigma_\alpha}, \tau)$ qui contient la boule unité. Autrement dit

$$\Sigma_\alpha = \left\{T(B(0,1)), T \in \mathcal{C}^{\alpha,\text{Id}}_{\text{Diff}}\right\},$$

où $\mathcal{C}^{\alpha,\text{Id}}_{\text{Diff}}$ désigne la composante connexe de l'identité dans $\mathcal{C}^{\alpha}_{\text{Diff}}$.

Dans un second temps, nous verrons plus tard que la démonstration repose sur des résultats d'analycité des dérivées normales des fonctions propres. Il est donc nécessaire de définir ici l'ensemble $\mathcal{D}$ des domaines $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ à bord analytique, ainsi que l'ensemble $\mathcal{A}_\alpha = \mathcal{D} \cap \Sigma_\alpha$, que l'on munit de la topologie induite par τ.

Le théorème suivant, inspiré par le théorème principal de [PS10], propose un résultat d'existence et d'unicité génériquement vrai dans $\mathcal{A}_\alpha$.

Théorème 3. *Soit $\alpha \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $N \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble des domaines $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ vérifiant la propriété $\mathcal{Q}_N(\Omega)$: " $\forall L \in [0,1]$, le problème (1.51) admet une unique solution dans $\mathcal{U}_L$", est ouvert et dense dans $\mathcal{A}_\alpha$.*

Soit $\Omega \in \mathcal{A}_\alpha$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que pour tout $L \in [0,1]$, il existe une solution au problème (1.51) dans $\mathcal{U}_L$. Puisque la fonctionnelle J_N est concave sur $\overline{\mathcal{U}_L}$, comme minimum de fonctions linéaires, l'ensemble des minimiseurs de J_N est convexe dans $\overline{\mathcal{U}_L}$, de sorte qu'il ne peut exister qu'un seul maximiseur qui soit une indicatrice. Autrement dit le problème (1.51) admet une unique solution dans $\mathcal{U}_L$. On montre dans la partie 1.3.2, l'existence d'une solution dans $\mathcal{U}_L$ génériquement pour tout domaine Ω dans $\mathcal{A}_\alpha$. Ce qui démontre le théorème ci-dessus.

Le résultat suivant montre en particulier que l'ensemble de domaines $\mathcal{A}_\alpha$ sur lequel le théorème 3 porte, est non vide.

Proposition 13. *Soit $\Omega = \psi(B(0,1))$, avec ψ dans Σ_α. Alors il existe une suite $(\Omega_k)_{\mathbb{N}} \in (\mathcal{A}_\alpha)^{\mathbb{N}}$, telle que $\Omega_k \longrightarrow \Omega$ pour τ.*

Démonstration. Tout d'abord notons qu'on a la densité des applications analytiques de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, dans $\mathcal{C}^{\alpha}_{\text{Diff}}$ pour la topologie τ. Ainsi il existe une suite de domaines $\Omega_k = \psi_k(B(0,1))$ indexée par $k \in \mathbb{N}$ telle que les ψ_k sont des applications analytiques de $\mathbb{R}^n$ et

$$\psi_k \xrightarrow{\tau} \psi.$$

Il suffit de prouver que cette suite est bien dans $\mathcal{A}_\alpha$. Tout d'abord, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\Omega_k \in \mathcal{D}$ puisque, ψ_k étant analytique elle conserve les bords (voir par exemple [Kat12]) et donc $\partial\Omega_k = \psi_k(\partial B(0,1))$, Ω_k est donc bien à bord analytique. Ensuite $\Omega_k \xrightarrow{\tau} \Omega$, et puisque $\Omega \in \mathcal{C}^\alpha_{\text{Diff}}$ et que $\mathcal{C}^\alpha_{\text{Diff}}$ est ouvert dans $\mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ pour la topologie τ (voir par exemple [Hir12, p. 38])), il s'ensuit que $\Omega_k \in \mathcal{C}^\alpha_{\text{Diff}}$ pour k suffisamment grand. Enfin par le même raisonnement, puisque $\mathcal{C}^{\alpha,\text{Id}}_{\text{Diff}}$ est ouvert dans $\mathcal{C}^\alpha_{\text{Diff}}$ pour la topologie τ (il s'agit d'une composante connexe), pour k suffisamment grand, $\psi_k \in \mathcal{C}^{\alpha,\text{Id}}_{\text{Diff}}$ et donc $\Omega \in \Sigma_\alpha$. □

Remarque 10. *Notons par ailleurs que Σ_α est constituée des boules topologiques $\mathcal{C}^\alpha$ qui sont connexes.*

Preuve du théorème 3

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

On définit le simplexe

$$\Pi_N = \left\{ \beta = (\beta_j)_{1\leqslant j\leqslant N} \in \mathbb{R}^N_+ \text{ tel que } \sum_{1\leqslant j\leqslant N} \beta_j = 1 \right\}.$$

Le problème (1.51) est équivalent au problème suivant

$$\sup_{a\in\overline{\mathcal{U}_L}} \inf_{\beta \in \Pi_N} \int_{\partial\Omega} a(x) \sum_{1\leqslant j\leqslant N} \frac{\beta_j}{\lambda_j} \left(\frac{\partial\phi_j}{\partial\nu}(x)\right)^2 d\mathcal{H}^{n-1}. \tag{1.53}$$

En effet on a évidemment que $\forall \beta \in \Pi_N$

$$\begin{aligned}\inf_{1\leqslant j\leqslant N} \frac{1}{\lambda_j} \int_{\partial\Omega} a(x) \left(\frac{\partial\phi_j}{\partial\nu}(x)\right)^2 d\mathcal{H}^{n-1} \\ \leqslant \int_{\partial\Omega} a(x) \sum_{1\leqslant j\leqslant N} \frac{\beta_j}{\lambda_j} \left(\frac{\partial\phi_j}{\partial\nu}(x)\right)^2 d\mathcal{H}^{n-1}\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}\inf_{1\leqslant j\leqslant N} \frac{1}{\lambda_j} \int_{\partial\Omega} a(x) \left(\frac{\partial\phi_j}{\partial\nu}(x)\right)^2 d\mathcal{H}^{n-1} \\ \leqslant \inf_{\beta \in \Pi_N} \int_{\partial\Omega} a(x) \sum_{1\leqslant j\leqslant N} \frac{\beta_j}{\lambda_j} \left(\frac{\partial\phi_j}{\partial\nu}(x)\right)^2 d\mathcal{H}^{n-1}\end{aligned}$$

et puisque pour tout $i \in [\![1, N]\!]$ on peut choisir $\beta = (\delta_{i,j})_{1\leqslant j\leqslant N}$, l'inégalité inverse est assurée.

Notons alors $\eta(a,\beta) = \int_{\partial\Omega} a(x) \sum_{1\leqslant j\leqslant N} \frac{\beta_j}{\lambda_j} \left(\frac{\partial\phi_j}{\partial\nu}(x)\right)^2 d\mathcal{H}^{n-1}$. D'après le théorème du minimax de Sion [12], on a l'existence d'un point selle (a^*,β^*) pour η, lequel est par conséquent solution du problème (1.53). On définit alors la fonction de switch :

$$\varphi^* = \sum_{1\leqslant j\leqslant N} \frac{\beta_j^*}{\lambda_j} \left(\frac{\partial\phi_j}{\partial\nu}\right)^2, \tag{1.54}$$

et par application du théorème du minimax de Sion,

$$\eta(a^*,\beta^*) = \max_{a\in\overline{\mathcal{U}_L}} \eta(a,\beta^*) = \max_{a\in\overline{\mathcal{U}_L}} \int_{\partial\Omega} a(x)\varphi^*(x) d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Ainsi, l'étude du problème 1.51 est équivalent à l'étude du problème d'optimisation suivant :

$$\max_{a\in\overline{\mathcal{U}_L}} \int_{\partial\Omega} a(x)\varphi^*(x) d\mathcal{H}^{n-1}. \tag{1.55}$$

On introduit alors le Lagrangien [13] associé au problème d'optimisation sous contraintes (1.55) :

$$\mathcal{L}(a,\Lambda) = \eta(a,\beta^*) + \Lambda\left(\int_{\partial\Omega} a(x) d\mathcal{H}^{n-1} - L\mathcal{H}^{n-1}(\Omega)\right).$$

Si l'on considère un point selle (a^*,Λ), de $\mathcal{L}$, alors pour tout $h \in L^\infty(\partial\Omega,\mathbb{R})$ dans l'ensemble $\mathcal{C}_{ad}$ des perturbation admissibles de a^*, on a nécessairement

$$\int_{\partial\Omega} h(x)(\varphi^*(x)+\Lambda) d\mathcal{H}^{n-1} \leqslant 0. \tag{1.56}$$

Puisque sur $\{a^*=1\}$, tout $h \in \mathcal{C}_{ad}$ doit être négatif, on a $\varphi^* \geqslant -\Lambda$ sur $\{a^*=1\}$. Réciproquement sur $\{a^*=0\}$, tout $h \in \mathcal{C}_{ad}$ doit être positif, donc $\varphi^* \leqslant -\Lambda$ sur $\{a^*=0\}$. Et pour tout $\varepsilon>0$, on a $\varphi^*(x) = -\Lambda$ presque partout sur $I_\varepsilon = \{\varepsilon \leqslant a^* \leqslant 1-\varepsilon\}$.

La proposition suivante implique que, génériquement pour tout domaine Ω dans $\mathcal{A}_\alpha$, la solution a^* du problème (1.51), vaut 0 ou 1 presque partout. Ce qui implique le théorème 3.

Proposition 14. *Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble des domaines $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tels que la propriété $\widetilde{\mathcal{Q}}_N(\Omega)$: "$|\{\varphi^* = -\Lambda\}| = 0$" est ouvert et dense dans $(\mathcal{A}_\alpha,\tau)$.*

Remarque 11. *Par ce qui précède, on a évidemment que, lorsque la fonction de switch φ^* définie par* (1.54) *vérifie $|\{\varphi^* = -\lambda\}| = 0$, alors la solution dans $\mathcal{U}_L$ du problème* (1.51) *est précisément l'ensemble de niveau $-\Lambda$ de φ^*. Par ailleurs la*

12. Théorème 4 dans les rappels théoriques.
13. voir section A.1.2

détermination de la fonction φ^* repose sur celle du vecteur β^*. Par ce qui précède ce vecteur se caractérise comme le multiplicateur de Lagrange associé au minimum dans le problème de maximisation

$$\max_{a\in L^\infty(\partial\Omega,[0,1])} \min_{\beta\in\Pi_N} \eta(a,\beta).$$

sous contrainte

$$\int_{\partial\Omega} a(x)d\mathcal{H}^{n-1} = L\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega).$$

Par ailleurs la valeur du niveau Λ est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte d'aire $\int_{\partial\Omega} a(x)d\mathcal{H}^{n-1} = L\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)$, dans le problème d'optimisation ci-dessus.

Démonstration de la proposition 14 :

Dans toute la suite, pour tout $1 \leqslant j \leqslant N$, ϕ_j désignera l'extension par 0 à $\mathbb{R}^n$ de la j-ème fonction propre du Laplacien Dirichlet sur Ω, et λ_j la valeur propre correspondante. La preuve qui suit est directement inspirée de [PS10].

Notons que si $\Omega \in \mathcal{A}_\alpha$, en particulier $\Omega \in \mathcal{D}$, et donc Ω est à bord analytique. Ainsi les dérivées normales des fonctions propres sont analytiques sur $\partial\Omega$ (voir [Mor58]), ainsi que φ^*. S'il existe ε tel que $|I_\varepsilon| \neq 0$ alors φ^* est constante égale à Λ sur I_ε donc sur tout $\partial\Omega$. Le but de ce qui suit est de montrer, ce qui est équivalent au résultat, que génériquement sur $\mathcal{A}_\alpha$, φ^* ne peut-être constante.

On définit la fonction analytique $F : \mathbb{R}^{N^2+N} \longrightarrow \mathbb{R}$, de la manière suivante :

$$F(y_1,\cdots,y_{N(N+1)}) = \det\begin{pmatrix} 1 & y_1 & \cdots & y_N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & y_{N^2+1} & \cdots & y_{N^2+N} \end{pmatrix}.$$

On a en particulier, pour tout $(x_1,\cdots,x_n) \in \partial\Omega$,

$$F\left(\left(\tfrac{\partial\phi_1}{\partial\nu}(x_1)\right)^2,\cdots,\left(\tfrac{\partial\phi_N}{\partial\nu}(x_{N+1})\right)^2\right) =$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & \left(\tfrac{\partial\phi_1}{\partial\nu}(x_1)\right)^2 & \cdots & \left(\tfrac{\partial\phi_N}{\partial\nu}(x_1)\right)^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \left(\tfrac{\partial\phi_1}{\partial\nu}(x_{N+1})\right)^2 & \cdots & \left(\tfrac{\partial\phi_N}{\partial\nu}(x_{N+1})\right)^2 \end{pmatrix},$$

Définissons enfin la propriété

$\widetilde{\mathcal{P}}(\Omega)$: "Il existe $N+1$ points $x_1, \cdots, x_{N+1}$ de $\partial\Omega$, distincts, tels que

$$F\left(\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial\nu}(x_1)\right)^2, \cdots, \left(\frac{\partial\phi_N}{\partial\nu}(x_{N+1})\right)^2\right) \neq 0." \tag{1.57}$$

Si on peut montrer que génériquement pour tout domaine Ω dans $\mathcal{A}_\alpha$, la propriété $\widetilde{\mathcal{P}}$ est vraie, alors, génériquement pour tout domaine Ω dans $\mathcal{A}_\alpha$, il ne peut exister aucune combinaison linéaire des $\left(\left(\frac{\partial\phi_j}{\partial\nu}\right)^2\right)_{1\leqslant j\leqslant N}$ qui soit constante sur un sous-ensemble de mesure non-nulle de $\partial\Omega$. En particulier φ^*, qui est un combinaison linéaires des $\left(\left(\frac{\partial\phi_j}{\partial\nu}\right)^2\right)_{1\leqslant j\leqslant N}$ ne peut être constante sur un sous-ensemble de mesure non-nulle de $\partial\Omega$. Ainsi $|I_\varepsilon| = 0$. Ce qui permet de conclure.

Le résultat suivant implique que la propriété $\widetilde{\mathcal{P}}$ est vraie génériquement pour tout domaine Ω dans $\mathcal{A}_\alpha$. □

Proposition 15. *L'ensemble des domaines $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ vérifiant la propriété*

$$\mathcal{P}(\Omega) \text{ : " } \Omega \textit{ vérifie } \widetilde{\mathcal{P}} \textit{ et ses valeurs propres } (\lambda_i)_{i\in[\![1,N]\!]} \textit{ sont simples"},$$

est ouvert et dense dans (Σ_α, τ) [14].

Démonstration. Notons

$$\Sigma_P = \{\Omega \in \mathcal{A} \text{ satisfaisant } \mathcal{P}\}$$

il s'agit de prouver que Σ_P est ouvert et dense dans Σ_α.

Rappelons qu'une suite de domaine $(\Omega_k)_{\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ est dite convergente au sens des compacts vers Ω si pour tout compact $K \subset (\Omega \cup \overline{\Omega}^c)$, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geqslant k_0$, $K \subset (\Omega_k \cup \overline{\Omega}_k^c)$. Rappelons égalemnt que la convergence pour τ implique la convergence au sens des compacts.

Notons également que, du fait des conditions de Dirichlet on a $\left(\frac{\partial\phi_j}{\partial\nu}\right)^2 = |\nabla\phi_j|^2$. Pour des raisons de clarté on utilisera plutôt la seconde notation dans cette partie. Par ailleurs on définit la notation :

$$\mathcal{F} = \left\{|\nabla\phi_1|^2, \cdots, |\nabla\phi_N|^2\right\}.$$

Supposons dans un premier temps que Σ_P est non-vide.

Σ_P est ouvert dans Σ_α

14. La propriété $\mathcal{P}$ étant plus restrictive que $\widetilde{\mathcal{P}}$ il s'ensuit de ce résultat que la propriété $\widetilde{\mathcal{P}}$ est générique sur Σ_α (donc en particulier sur $\mathcal{A}_\alpha$).

Soit $\Omega \in \Sigma_P$, et $x_1, \cdots, x_N$, les points de $\partial\Omega$ correspondants. Supposons par l'absurde qu'il existe une suite $\Omega_k \in \Sigma_\alpha \setminus \Sigma_P$, qui converge vers Ω dans $\mathcal{A}$. Comme on l'a dit plus haut, Ω_k converge alors au sens des compacts vers Ω. Si λ_j^k désigne la j-ème valeur propre du domaine Ω^k et ϕ_j^k le prolongement par 0 à $\mathbb{R}^n$ de la fonction propre correspondante, alors on a le résultat suivant (voir [AD07, Théorème 7.3]) :

Proposition 16. *Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $\Omega \in \mathcal{A}$, tel que $\lambda_1, \cdots, \lambda_N$ sont simples. Soit $(\Omega_k)_\mathbb{N}$ une suite de $\mathcal{A}$ qui converge au sens des compacts vers Ω, telle que $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \Omega_k$ est borné, alors on a $\lambda_j^k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda_j$. Par ailleurs, dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$:*

$$\phi_j^k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \phi_j \tag{1.58}$$

pour tout $j \leqslant N$.

En particulier, de ce résultat on déduit que pour k assez grand, les N premières valeurs propres $(\lambda_j^k)_{j\in[\![1,N]\!]}$ de Ω_k sont simples. Si on peut montrer que pour k assez grand, Ω_k vérifie la propriété $\widetilde{\mathcal{P}}$, on obtient évidemment l'absurdité souhaitée.

Définissons pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ d'une part $\Lambda \in \mathcal{C}^\alpha_{\text{Diff}}$ l'application transformant Ω en Ω^k, et d'autre part l'analogue de la famille $\mathcal{F}$ pour Ω_k :

$$\mathcal{F}^k = \left\{ |\nabla\phi_1^k \circ \Lambda^k|^2, \cdots, |\nabla\phi_N^k \circ \Lambda_]^2 \right\}. \tag{1.59}$$

Il s'agit alors de démontrer que

$$\mathcal{F}^k \text{ converge ponctuellement sur } \overline{\Omega} \text{ vers } \mathcal{F}, \text{ quand } k \text{ tend vers } +\infty. \tag{1.60}$$

En effet, dans ce cas on en déduit que $F((\nabla\phi_1^k(\Lambda_j^k(x_1)))^2, \cdots, (\nabla\phi_N^k(\Lambda_j^k(x_N)))^2)$ converge vers
$F((\nabla\phi_1(x_1))^2, \cdots, (\nabla\phi_N(x_N))^2) \neq 0$, et donc, pour k assez grand
$F((\nabla\phi_1^k(\Lambda_j^k(x_1)))^2, \cdots, (\nabla\phi_N^k(\Lambda_j^k(x_N)))^2) \neq 0$, ce qui implique $\Omega^k \in \Sigma_P$ [15] .

D'après la proposition 16, on a que $(\Delta\phi_j^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\Delta\phi_j$, dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, donc dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Par ailleurs, la suite $(\phi_j^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est supportée par la suite de domaines $(\Omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui est bornée pour l'inclusion. On peut donc définir un domaine B

15. Rappelons que puisque $\Lambda_k \in \mathcal{C}^\alpha_{\text{Diff}}$, il préserve les frontières, autrement dit $\Lambda^k(x_i) \in \partial\Omega_k$ (cf [Kat12]).

englobant cette suite. Ainsi, $\forall \varphi \in H_0^1(B)$ on a :

$$\begin{aligned} & \Delta\phi_j^k - \Delta\phi_j = \lambda_j\phi_j - \lambda_j^k\phi_j^k \\ \Rightarrow \quad & \int_B \langle \nabla\phi_j^k - \nabla\phi_j \cdot \nabla\varphi \rangle = \int_B \lambda_j\phi_j\varphi - \int_B \lambda_j^k\phi_j^k\varphi \\ \Rightarrow \quad & \| \nabla\phi_j^k - \nabla\phi_j \|^2_{L^2(B)} = \lambda_j^k \| \phi_j^k \|^2_{L^2(B)} + \lambda_j \| \phi_j \|^2_{L^2(B)} - (\lambda_j^k + \lambda_j) \int_B \phi_j\phi_j^k \end{aligned}$$

Ainsi on a :

$$\| \nabla\phi_j^k - \nabla\phi_j \|^2_{L^2(B)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Par conséquent, on a également que $\nabla\phi_j^k \circ \Lambda^k$ converge vers $\nabla\phi_j$ dans $L^2(B)$ [16]. Cette dernière convergence implique la convergence presque partout sur B donc en particulier sur $\overline{\Omega}$. Enfin, d'après [Mor58], puisque $\Omega \in \mathcal{A}_\alpha$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\nabla\phi_j^k$ est analytique sur $\overline{\Omega}$, en particulier elle est continue. De sorte que la convergence presque partout implique la convergence ponctuelle (1.60).

Σ_P est dense dans Σ_α

Soit $\Omega_0 \in \Sigma_P$ et $x_1, \cdots, x_N$ les points de $\partial\Omega$ correspondants. Soit $\Omega_1 \in \Sigma_\alpha$ quelconque. On veut approcher Ω_1 dans Σ_α par une suite d'élément dans Σ_P. Plus précisément on va construire un chemin de domaines

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & [0,1] & \to & \Sigma_\alpha \\ & t & \mapsto & \Omega_t \end{array}, \tag{1.61}$$

tel que Ω_t est de spectre simple. Par ailleurs, définissant comme dans (1.59), la famille de fonctions $\mathcal{F}^t$ analogue de $\mathcal{F}$ pour Ω_t,

$$\mathcal{F}^t = \left\{ |\nabla\phi_1^t \circ \Lambda^t|^2, \cdots, |\nabla\phi_N^t \circ \Lambda^t|^2 \right\},$$

où $\Lambda^t \in \mathcal{C}^\alpha_{\text{Diff}}$ désigne l'application transformant Ω_0 en Ω_t, on désire également que pour tout $x \in \overline{\Omega_0}$, l'application $t \longrightarrow \mathcal{F}^t(x)$ soit analytique de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

En effet, dans ce cas, l'application

$$\widetilde{\Psi} : t \mapsto F(1, (\nabla\phi_1^t \circ \Lambda^t(x_1))^2, \cdots, (\nabla\phi_N^t \circ \Lambda^t(x_N))^2)$$

est alors analytique de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Puisque $\widetilde{\Psi}(0) \neq 0$, il s'ensuite que, sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs de $t \in [0,1]$, $\widetilde{\Psi}(t) \neq 0$, et donc Ω_t vérifie

16. C'est une conséquence immédiate du fait que Λ^k converge vers Id dans $\mathcal{C}^\alpha_{\text{Diff}}$, donc en particulier, uniformément sur B

la propriété $\widetilde{\mathcal{P}}$ avec les points $\Lambda^t(x_i) \in \partial\Omega^t$. Par ailleurs Ω_t a un spectre simple, de sorte que, sauf pour un nombre fini de valeurs de $t \in [0,1]$, $\Omega_t \in \Sigma_P$. En particulier, cela prouve que Σ_P est dense dans Σ_α.

La contruction d'une telle application Ψ repose sur les travaux de [Tey99]. Puisque Ω_0 et Ω_1 sont dans la même composante connexe de $\widetilde{\Sigma_\alpha}$, l'auteur prouve dans cet article qu'il existe une application Ψ telle que décris dans (1.61), et telle que Ω_t est de spectre simple pour tout $t \in [0,1]$. La première condition est donc remplie, il reste à montrer que $\forall x \in \overline{\Omega_0}$,

$$t \longrightarrow \mathcal{F}^t(x) \text{ est analytique de } [0,1] \text{ dans } \mathbb{R} \ . \tag{1.62}$$

Dans [Tey99] l'auteur montre en fait qu'il existe des fonctions analytiques réelles de t, $\beta_{i,j}(t)$, $1 \leqslant i,j \leqslant n$, et $h(t)$, telles que le problème aux valeurs propres sur Ω_t définis par :

$$\begin{cases} -\Delta u^t(x) = \lambda^t u^t(x) & x \in \Omega_t \\ u^t(x) = 0 & x \in \partial\Omega_t \end{cases} \tag{1.63}$$

est équivalent au problème suivant, posé sur Ω_0 :

$$\begin{cases} A(t)v^t(x) = -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\beta_{i,j}(t)\frac{\partial v^t}{\partial x_{i,j}}\right) + h(t)v^t = \lambda^t v^t(x) & x \in \Omega_0 \\ v^t(x) = 0 & x \in \partial\Omega_0. \end{cases} \tag{1.64}$$

Pour une construction explicite de ces fonctions on peut se référer à [Rel69, p. 83-88].

En écrivant, pour tout $1 \leqslant i \leqslant N$, $x_i^t = \Lambda_i^t(x_1, \cdots, x_n)$. Alors on a $v^t = (\det(\xi))^{-1/2}\,(u^t \circ \Lambda^t)$, avec $\xi = \left(\dfrac{\partial x_m^t}{\partial x_l}\right)_{1\leqslant m,l\leqslant N}$. Dans [Tey99], l'auteur montre que la famille d'opérateurs $A(t)$ de $H^2(\Omega_0)$ vers $L^2(\Omega_0)$, est (A)-holomorphe par rapport à t au sens de Kato (voir [Kat12, p. 375], pour la définition). Un résultat standard montre alors que la projection sur chacun des sous-espaces propres de $A(t)$, est analytique par rapport à t dans l'espace image de la famille d'opérateurs, c'est-à-dire ici $L^2(\Omega_0)$ (voir [Kat12, p. 370]). Autrement dit, puisque dans notre cas le spectre de Ω_t est simple, il s'ensuit que l'application $t \longrightarrow v^t$ est analytique par rapport à t de $[0,1]$ dans $L^2(\Omega_0)$. Enfin, toujours d'après [Tey99], $t \longrightarrow \xi$ est également analytique par rapport à t. Par ailleurs, puisque $\Lambda^t \in \mathcal{C}^\alpha_{\text{Diff}}$, avec $\alpha > 1$, on a également $\det(\xi) \neq 0$, pour tout t. De ce fait, par multiplication par $\det(\xi)^{1/2}$ (qui est analytique par rapport à t), l'application $t \longrightarrow u^t \circ \Lambda^t$ est analytique par rapport à t de $[0,1]$ dans $L^2(\Omega_0)$. Dans notre cas, cela s'écrit, pour tout $j \in [\![1, N]\!]$,

$$t \longrightarrow \phi_j \circ \Lambda^t, \text{ est analytique par rapport à } t \text{ de } [0,1] \text{ dans } L^2(\Omega_0). \tag{1.65}$$

Introduisons maintenant la caractérisation de l'analycité que nous allons utiliser. Une fonction $f(t)$ à valeurs dans espace normé $(E, \| \cdot \|_E)$ est analytique sur $[0,1]$ si et seulement si

— La dérivée $\frac{d^k}{dt^k} f$ (définie par les limites usuelles dans E), est bien définie dans E.

— Il existe deux constantes positives M, α telles quel

$$\sup_{t\in[0,1]} \| \frac{d^k}{dt^k} f_t \|_E^2 < M\alpha^k k!.$$

Notons au passage que l'analycité établie sur $(E, \| \cdot \|_E)$ implique l'analycité également pour toute norme sur E équivalente ou inférieure à $\| \cdot \|_E$. En particulier, de l'assertion (1.65) on déduit celle sur $L^2(B)$, de l'applications $t \longrightarrow \phi_j^t$, via l'identité (1.66) ci-après :

$$\forall f_t \in L^2(\Omega_t), \quad \int_{\Omega_t = \Psi_t(\Omega_0)} f_t(x)dx = \int_{\Omega_0} f_t \circ \Psi_t \, |\det(J_{\Psi_t}(x))| dx,$$

de sorte que

$$\| f_t \|_{L^2(B)} = \| f_t \|_{L^2(\Omega^t)} = \int_{\Omega_0} (f_t \circ \Psi_t)^2 |\det(\xi)| dx$$

Or, comme on sait que $t \to \det(\xi)$ est analytique et ne s'annule jamais sur $[0,1]$, il existe deux constantes positives $\overline{C_1}, \underline{C_1}$ indépendantes de t et de f_t telles que :

$$\underline{C_1} \ \| f_t \circ \Psi_t \|_{L^2(\Omega_0)}^2 \leqslant \| f_t \|_{L^2(B)}^2 \leqslant \overline{C_1} \ \| f_t \circ \Psi_t \|_{L^2(\Omega_0)}^2 . \tag{1.66}$$

Ensuite, comme on l'a vu dans l'étape précédente, on a

$$\| \nabla \phi_j^t \|_{L^2(B)}^2 = \lambda_j^t \| \phi_j^t \|_{L^2(B)}^2,$$

puisque $t \longrightarrow \lambda_j^t$ est analytique, il s'ensuit, via la caractérisation de l'analycité proposée ci-dessus, que $t \longrightarrow \nabla \phi_j^t$ est également analytique de $[0,1]$ dans $L^2(B)$, et par (1.66), on a, pour tout $j \in [\![1, N]\!]$,

$$t \longrightarrow \nabla \phi_j \circ \Lambda^t, \text{ est analytique par rapport à } t \text{ de } [0,1] \text{ dans } L^2(\overline{\Omega_0}). \tag{1.67}$$

Comme dans l'étape précédente, ceci implique l'analycité en tout point de $\overline{\Omega_0}$, et donc la relation (1.62)

$\underline{\Sigma_P}$ est non vide

Soit $(\mu_1, \cdots, \mu_d)$ une suite non-résonante de réels positifs et Ω le pavé $\Pi_{i=1}^n (0, \mu_i \pi)$.

Alors Ω vérifie la propriété $\mathcal{P}$. Par ailleurs, dans [PS10], les auteurs prouvent qu'il existe une suite $(\Omega_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \Sigma_\alpha^{\mathbb{N}}$ qui converge au sens des compacts vers Ω. En utilisant les même arguments que dans la première étape avec pour seule différence que Λ^k est cette fois dans $\mathcal{C}^{0,1}$ au lieu de $\mathcal{C}^\alpha_{\text{Diff}}$, on obtient que pour k suffisamment grand, Ω_k vérifie la propriété $\mathcal{P}$. □

1.3.3 Simulations numériques

Cette partie a pour but de produire certain nombre de simulations numériques, validées par l'étude qui précède. En particulier on a prouvé au travers du théorème 3 que génériquement pour tout domaine Ω dans $\mathcal{A}_\alpha$ il existe une solution dans $\mathcal{U}_L$ du problème (1.51). Dans la remarque 11, on montre que cette solution s'écrit alors comme un ensemble de niveau de la fonction

$$\varphi^* = \sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_j^*}{\lambda_j} \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial \nu}\right)^2,$$

où la valeur Λ du niveau ainsi que celle des réels β_j^* se caractérisent comme étant des multiplicateurs de Lagrange d'un problème d'optimisation sous contraintes (ce problème est explicité dans la remarque 11). Ainsi le problème d'optimisation de forme posé par le problème tronqué (1.51) se restreint directement à un problème d'optimisation sous contraintes en dimension finie .

Afin de produire des simulations numériques permettant de visualiser ces ensembles de niveau, on propose l'approche suivante. On commence par obtenir les multiplicateurs β_j^* et Λ via un logiciel d'optimisation non linéaire, IPOPT (voir [WB06]) combiné au langage AMPL (voir [FGK90]). Ceci est rendu possible via une approximation numérique des fonctions de $L^\infty(\partial\Omega, [0,1])$

$$\frac{1}{\lambda_j}\left(\frac{\partial \phi_j}{\partial \nu}\right)^2.$$

Cette approximation s'obtient en discrétisant le problème aux valeurs propres sous-jacent. Enfin l'ensemble de niveau est obtenu par simple méthode de dichotomie. Les figures 1.15, 1.16, 1.17, et 1.18, illustrant les cas de rectangles, du carré et d'ellipses, ont été réalisées avec cette méthode. Notons que dans le cas de rectangles dans $\mathbb{R}^2$, on peut s'assurer par des moyens directs que la fonction de switch φ^* n'est pas constante, comme en atteste la remarque suivante.

Remarque 12. *On considère comme dans la partie 1.2.4 le cas* $\Omega = [-\alpha\pi/2, \alpha\pi/2]\times$

$[-\beta\pi/2, \beta\pi/2]$. *On pose la fonction de switch définie en* (1.54) *dans la remarque 11,*

$$\varphi^* = \sum_{1\leqslant n,k\leqslant N,K} \frac{\beta^*_{n,k}}{\lambda_{n,k}} \left(\frac{\partial \phi_{n,k}}{\partial \nu}\right)^2 .$$

Dans notre cas, sur aucun des bords on ne peut avoir φ^* *constante, car, au vu de l'expression des fonctions propres* (1.38) *ceci imliquerait la dépendance des* $\cos\left(\frac{n}{\alpha}\left(x+\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right)$ *sur* $]-\alpha\pi/2, \alpha\pi/2[$ *ou respectivement des* $\cos\left(\frac{k}{\beta}\left(y+\frac{\pi\beta}{2}\right)\right)$ *sur* $]-\beta\pi/2, \beta\pi/2[$, *ce qui est exclu.*

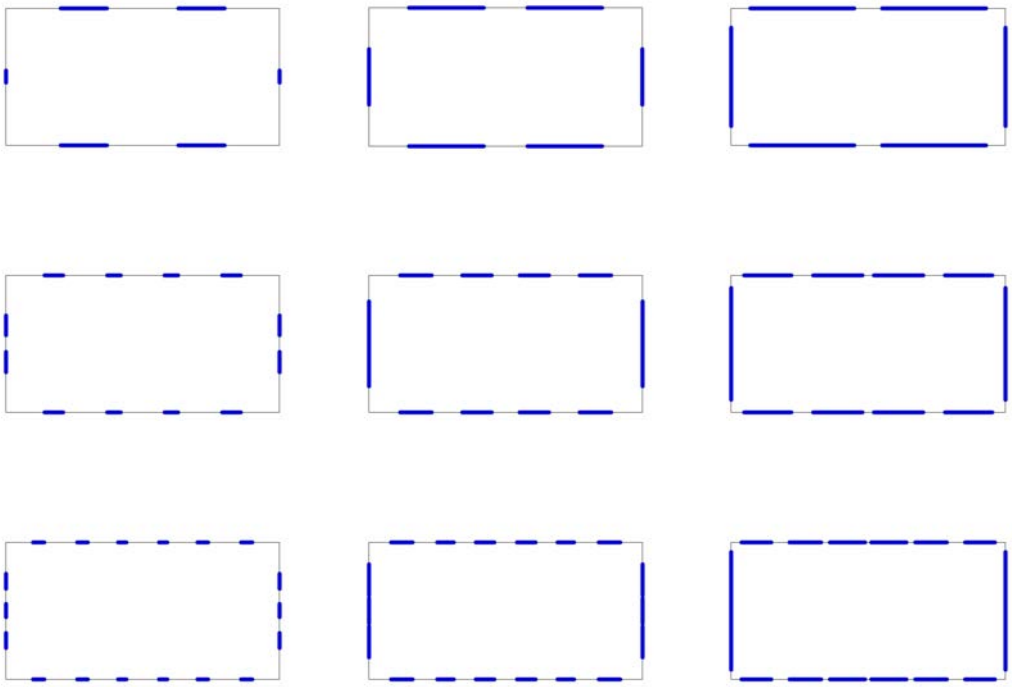


Figure 1.15 – Cas d'un rectangle, en ligne $L = 1/4, 1/2$, et $3/4$ et en colonne $N = 2, 4$, et 6.

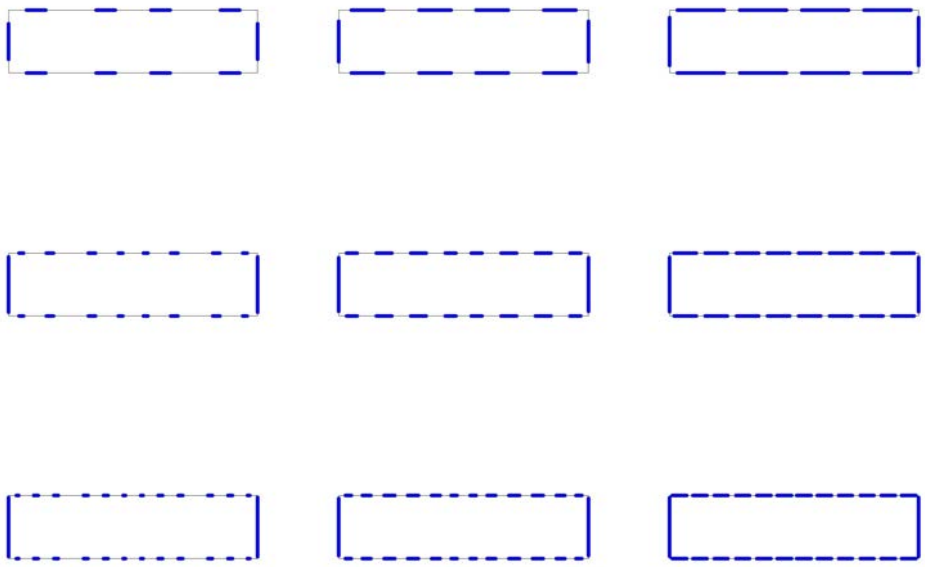


Figure 1.16 – Cas d'un rectangle, en ligne $L = 1/4, 1/2$, et $3/4$ et en colonne $N = 2, 4$, et 6.

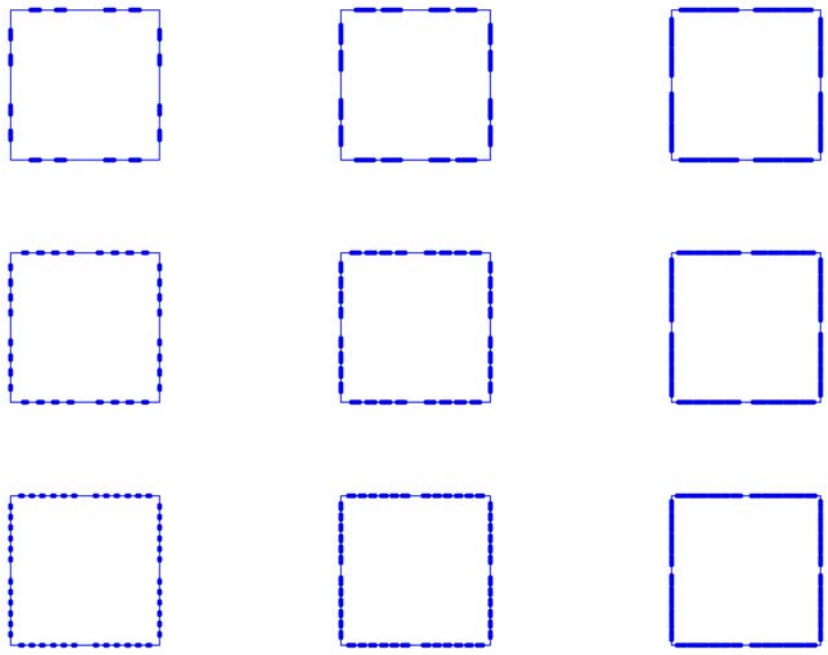


Figure 1.17 – Le cas du carré, en ligne $L = 1/4, 1/2$, et $3/4$ et en colonne $N = 2, 4$, et 6.

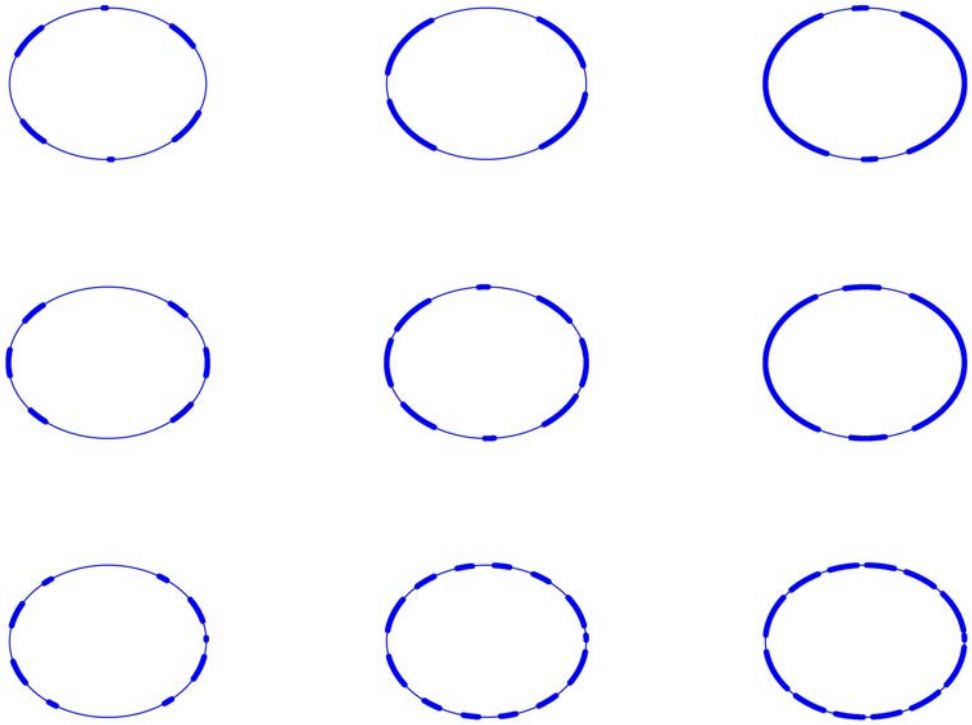


Figure 1.18 – Le cas d'une l'ellipse, en ligne $L = 1/4, 1/2$, et $3/4$ et en colonne $N = 2, 4$, et 6.

Le cas du disque illustré par la figure 1.19, est légèrement différent. D'après (1.33) on a

$$J_N(a) = \frac{2}{\pi R} \min \left(\inf_{1 \leqslant n \leqslant N} \int_0^{2\pi} a(x) \cos(nx)^2 dx, \inf_{1 \leqslant n \leqslant N} \int_0^{2\pi} a(x) \sin(nx)^2 dx \right).$$

Par application du lemme de Riemann-Lebesgue, la constante L est solution du problème (1.51). Par ailleurs, pour toute fonction φ^* définie par

$$\varphi^*(x) = \frac{2}{\pi R} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^* \cos^2(nx) + \beta_i^* \sin^2(nx),$$

où les paramètres $(\alpha^*, \beta^*) = (\alpha_i^*, \beta_i^*)_{1 \leqslant i \leqslant N} \in \mathbb{R}^{2N}$ satisfont $\sum_{1 \leqslant i \leqslant N} \alpha_i^* + \beta_i^* = 1$ et

$$\int_0^{2\pi} L\varphi^*(x) dx = \min_{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^{2N}, \sum \alpha_i + \beta_i = 1} \int_0^{2\pi} (\alpha_i \cos^2(nx) + \beta_i \sin^2(nx)) dx,$$

le couple (L, φ^*) constitue un point-selle pour le problème tronqué sous la forme (1.53). En particulier le couple de fonctions constantes $(L, \frac{2}{\pi R})$ est un tel point-selle.

Ainsi le disque ne satisfait pas les hypothèses du théorème 3.

Notons également que dans ce cas on n'a pas unicité de la solution dans $\mathcal{U}_L$. D'après l'expression de J_N ci-dessus, la valeur optimale pour le problème (1.51) est égale $2L/R$ pour tout $N \in \mathbb{N}^*$. En linéarisant $\cos(nx)^2$ et $\sin(nx)^2$, il s'ensuit que la valeur optimale est atteinte pour toute fonction a definie par

$$a = L + \sum_{j=N+1}^{+\infty} (\gamma_j \cos(2jx) + \delta_j \sin(2jx)),$$

où $(\gamma_j)_{j\in\mathbb{N}}$ et $(\delta_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de $\ell^2(\mathbb{R})$ telles que $\max\{\|\gamma\|_{\ell^\infty}, \|\delta\|_{\ell^\infty}\} \leqslant \varepsilon$ pour $\varepsilon > 0$ choisi assez petit pour garantir $a \in \overline{\mathcal{U}_L}$.

Il est donc possible de déterminer par calcul direct des domaines optimaux pour le problème (1.51). Quelques exemples de ces domaines sont représentés dans la figure 1.19.

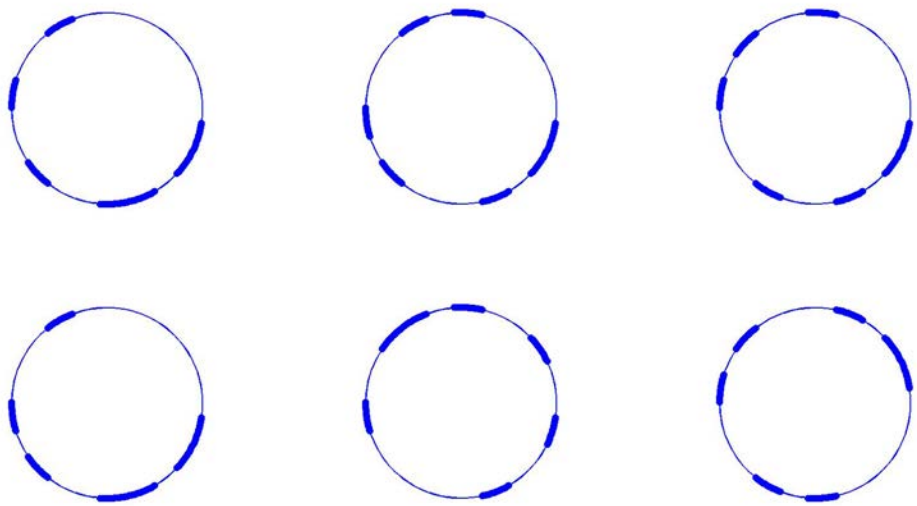


Figure 1.19 – Le cas du disque pour 1, 2 et 5 modes, deux exemples de solutions (L=0.3).

1.4 Remarques et problèmes ouverts

1. **Autres conditions de bord.**

   On établit ici que les différents résultats établis dans ce chapitre restent vrais (à quelques changements près) si l'on choisit les conditions de bord de Neumann dans l'équation des ondes (1.1).

Bien sur, dans ce cas, on ne peut plus définir la variable d'observation z_Γ comme dans (1.2). Dans [Bur03, HZ04], les auteurs établissent que pour les conditions de bord de Neumann, et sous des conditions d'ergodicité du domaine Ω, l'existence d'une sous-suite de densité un de la suite de mesures $\left(\frac{1}{\lambda_j}\left(\frac{\partial\phi_j}{\partial\nu}\right)^2 d\mathcal{H}^{n-1}\right)_{j\in\mathbb{N}^*}$, telle que

$$\lim_{j\to+\infty}\langle A(\phi_j),\phi_j\rangle = \frac{4}{|\mathcal{S}^{n-1}|\ |\Omega|}\int_{T^*(\partial\Omega)}\frac{a(y,\eta)}{\sqrt{1-|\eta|^2}}\,d\eta\,d\mathcal{H}^{n-1}, \tag{1.68}$$

pour tout opérateur semi-classique A d'ordre 0 et de symbole a. On pourra se référer à [BH11] pour plus de précision sur le sens de cette convergence.

On définit alors la variable d'observation

$$z_\Gamma(t,x) = \chi_\Gamma(x)\left(\partial_t y(t,x) + \nabla y(t,x)\right),$$

où y désigne la solution de l'equation des ondes

$$\begin{cases} \partial_{tt}y(t,x) - \Delta y(t,x) = 0 & \forall (t,x)\in[0,T]\times\Omega, \\ \partial_\nu y(t,x) = 0 & \forall (t,x)\in[0,T]\times\partial\Omega, \\ y(0,x) = y^0(x),\ \partial_t y(0,x) = y^1(x) & \forall x\in\Omega, \end{cases} \tag{1.69}$$

avec $(y^0,y^1)\in H^1(\Omega,\mathbb{C})\times L^2(\Omega,\mathbb{C})$.

Dans ce cas, l'inégalité d'observabilité, analogue de (1.3), s'ecrit pour tout (y_0,y_1) dans $H^1(\Omega,\mathbb{C})\times L^2(\Omega,\mathbb{C})$:

$$C_T(\Sigma)\parallel(y_0,y_1)\parallel^2_{H^1(\Omega,\mathbb{C})\times L^2(\Omega,\mathbb{C})} \leqslant \int_0^T\int_{\partial\Omega}\chi_\Gamma(x)(\partial_t y^2(t,x)+|\nabla y(t,x)|^2)d\mathcal{H}^{n-1}dt.$$

Procédant comme dans la partie 1.2.1 à une *"randomisation"* des conditions initiales, puis à une relaxation de $\mathcal{U}_L$, on est mené au problème d'optimisation suivant (analogue de (1.13)-(1.14)) :

$$\max_{v\in\overline{\mathcal{U}_L}} J(v) := \inf_{j\in\mathbb{N}}\int_{\partial\Omega} v(x)\left(\phi_j(x)^2 + \frac{1}{\lambda_j}|\nabla\phi_j(x)|^2\right)d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Enfin si on choisit $a(y,\eta) = v(y)(1-|\eta|^2)$, dans l'equation (1.68) on obtient que la suite de mesures $((\phi_j^2 + \frac{1}{\lambda_j}\nabla\phi_j^2)d\mathcal{H}^{n-1})_{j\in\mathbb{N}}$ converge au sens vague vers la mesure uniforme sur $\partial\Omega$, $\frac{2}{n|\Omega|}d\mathcal{H}^{n-1}$.

Afin de déterminer des solution dans $\overline{\mathcal{U}_L}$, la proposition suivante fournit un analogue de (1.18).

Proposition 17. *Pour tout domaine Ω borné et convexe ou de régularité $\mathcal{C}^{1,1}$,*

$$\int_{\partial\Omega}\langle x,\nu(x)\rangle\left(\phi_j(x)^2+\frac{|\nabla\phi_j(x)|^2}{\lambda_j}\right)d\mathcal{H}^{n-1}=2.$$

On peut trouver une preuve de cette proposition dans [Liu07].

Ainsi, les fonctions de Rellich admissibles définies par 1, constituent toujours des solutions du problème (1.13) avec les conditions de bord de Neumann. Ce qui fournit le résultat suivant, analogue de la proposition 4 :

Proposition 18. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ borné, connexe et $\mathcal{C}^{1,1}$ ou convexe. Supposons que Ω satisfait* (1.68) *et (HRel), ainsi que la propriété suivante :*

$$\exists A>0,\quad \|\ \phi_j^2+\frac{|\nabla\phi_j|^2}{\lambda_j}\ \|_{L^\infty(\partial\Omega)}\leqslant A.$$

Alors

$$\max_{a\in\overline{\mathcal{U}_L}}J(a)=\frac{2L\mathcal{H}^{n-1}(\Omega)}{n|\Omega|}.$$

La preuve de ce résultat est identique à celle de la proposition 4.

2. **Contrôle optimal sur la frontière pour l'équation des ondes.** On se propose dans cette remarque de montrer que determiner le meilleur domaine d'observation frontière est équivalent à déterminer le meilleur domaine de contrôle sur la frontière. En effet, on peut rappeler le résultat suivant :
On introduit le problème de contrôle au bord

$$\begin{cases}\partial_{tt}w(t,x)-\Delta w(t,x)=0 & \forall(t,x)\in[0,T]\times\Omega,\\ w(t,x)=0 & \forall(t,x)\in(\partial\Omega\setminus\Gamma)\times[0,T],\\ w(t,x)=u(t,x) & \forall(t,x)\in\Gamma\times[0,T],\\ w(0,x)=w^0(x),\ \partial_t w(0,x)=w^1(x), & \forall x\in\Omega,\end{cases}\tag{1.70}$$

où le contrôle au bord u est supposé dans $L^2([0,T]\times\Gamma,\mathbb{C})$. Le problème de Cauchy (1.70) est alors bien posé pour toute condition initiale $(w^0,w^1)\in H_0^1(\Omega,\mathbb{C})\times L^2(\Omega,\mathbb{C})$ et tout contrôle $u\in L^2([0,T]\times\Gamma,\mathbb{C})$. Par ailleurs on a que *le système* (1.70) *est contrôlable en temps T si et seulement si le problème* (1.1)-(1.2) *est observable en temps T* (voir par exemple [TW09]).

Par ailleurs, si le problème (1.70) est exactement contrôlable, en appliquant la méthode HUM (Hilbert Uniqueness Method, voir par exemple [Lio88b, Lio88a]), on obtient un contrôle optimal donné par la formule

$$u_\Gamma(t,x)=\chi_\Gamma(x)y(t,x)$$

où y est l'unique solution de (1.1) associées aux conditions initiales $(y^0, y^1) \in L^2(\Omega, \mathbb{C}) \times H^{-1}(\Omega, \mathbb{C})$ minimisant la fonctionnelle :

$$\mathcal{F}_\Gamma(y^0, y^1) = \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Gamma \left(\frac{\partial y}{\partial \nu}\right)^2 d\mathcal{H}^{n-1}dt - \langle y^1, w^0\rangle_{H^{-1},H_0^1} + \langle y^0, w^1\rangle_{L^2}$$

(la notation $\langle\cdot,\cdot\rangle$ désigne ici, dans un premier temps le produit de dualité, puis le produit scalaire standard). Ainsi, définissant l'opérateur HUM

$$\begin{array}{rccc} \Lambda_\Gamma : & H_0^1(\Omega,\mathbb{C}) \times L^2(\Omega,\mathbb{C}) & \to & L^2([0,T]\times\Omega,\mathbb{C}) \\ & (w^0, w^1) & \mapsto & u_\Gamma \end{array}, \tag{1.71}$$

la question naturelle lorsqu'on cherche à optimiser le domaine de contrôle est : Comment minimiser la norme de ce dernier opérateur par rapport au domaine $\Gamma \subset \partial\Omega$? Dans [PTZ12], les auteurs montrent que $\inf_{\chi_\Gamma \in \mathcal{U}_L} \| \Lambda_\Gamma \| = \left(\sup_{\chi_\Gamma \in \mathcal{U}_L} C_T(\chi_\Gamma)\right)^{-1}$ (voir également [TW09]). En ce sens, le problème qui consiste à déterminer un domaine de contrôle optimal est bien équivalent à maximisier la constante d'observabilité définie par (1.3).

3. **Maximisation de la constante déterministe.** Comme on l'a vu dans la partie 1.1.2, le problème qui consiste à maximiser la constante d'observabilité $C_T(\chi_\Gamma)$ s'avère particulièrement difficile, du fait, notamment, des termes croisés. Par ailleurs ce critère est moins pertinent du point de vue applicatif que le critère *"randomisé"* $C_{T,rand}(\chi_\Gamma)$. *Pour autant, l'étude de la constante déterministe* $C_T(\chi_\Gamma)$ *reste intéressante pour plusieurs raisons.*

   Tout d'abord, elle permet de déterminer un domaine de contrôle optimal. En effet, comme expliqué ci-dessus, rechercher un domaine de contrôle optimal est équivalent à minimiser la norme de l'opérateur Λ_Γ*, défini par* (1.71)*, et donc à maximiser la constante* $C_T(\chi_\Gamma)$*. Si on maximise plutôt* $C_{T,rand}(\chi_\Gamma)$*, alors toutes les considérations faites au cours de ce chapitre peuvent effectivement s'appliquer à un problème de recherche de domaine de contrôle optimal, cependant l'interprétation du problème de contrôle randomisé, en termes de conditions initiales aléatoires n'est évident.*

   Par ailleurs la constante d'observabilité randomisée, consiste en la borne inférieure des valeurs diagonales de l'opérateur Grammien pour l'observabilité (voir par exemple [TW09]) alors que la constante d'observabilité initiale prend également en compte les autre termes. L'analyse de l'opérateur Grammien entier est particulièrement intéressant et toujours ouvert, comme précisé dans [PTZ12], dans un cas similaire. Même l'étude de la version tronquée en modes

de ce critère est reste ouvert.

4. **Instabilité Numérique.** *Comme expliqué dans la proposition 12, l'étude des valeurs optimales pour le problème tronqué* (1.51) *peut être un moyen d'accéder à la valeur optimale pour le problème initial* (1.13)*. Le calcul numérique de ces valeurs optimales est donc particulièrement intéressant. Malheureusement la suite des domaines optimaux pour le critère tronqué peut ne pas constituer une suite maximisante pour J. Rappelons par exemple le phénomène de spillover introduit par [HH05] et rappelé pour un cas simple dans la remarque 9.*

Chapitre 2

Positionnement de capteurs pour la tomographie photoacoustique

Introduction

Ce chapitre s'attache à appliquer les résultats précédents au positionnement de capteurs pour la tomographie photoacoustique, un procédé d'imagerie médicale décrit plus en détail ci-dessous. Ces résultats ont été établis en collaboration avec M. Bergounioux de l'Université d'Orléans, dans le cadre du projet ANR Aventures (Analyse Variationnelle EN Tomographies photoacoustique, photoacoustique et UltrasonoRES).

La tomographie photoacoustique est un procédé d'imagerie médicale non invasif. C'est dans le cadre de ce procédé que nous modélisons dans cette partie l'influence de la forme et de la disposition des capteurs dans le problème de reconstruction de la densité des tissus. Ces capteurs sont disposés à la frontière du corps à imager, plongé dans un milieu ambiant (air ou eau). Plus précisément, il s'agit de définir une fonctionnelle de la disposition de capteurs rendant compte de la qualité de l'image obtenue. Dans le chapitre précédent nous avons mené une étude similaire dans le cas où la fonctionnelle utilisée est la constante d'observabilité. Cette fonctionnelle répond naturellement aux enjeux de ce chapitre. En effet rappelons que la constante d'observabilité rend compte du caractère bien posé du problème inverse qui consiste à déterminer la densité des tissus du corps à imager à partir d'observations sur le domaine de capteurs. Néanmoins, dans le cas du présent chapitre il n'est pas pertinent de maximiser cette constante seule. Définissons Ω le corps à imager, $\mathcal{B}$ le domaine dans lequel l'onde se propage (corps à imager et milieu ambiant) et T le temps d'acquisition. Rappelons que la condition "GCC" (introduite par [BLR92])

stipule que pour une disposition de capteurs Σ donnée, la constante d'observabilité associée $C_T(\chi_\Sigma)$, est non-nulle si et seulement si tout rayon partant de Ω et se propageant à vitesse 1 suivant les lois de l'optique géométrique dans $\mathcal{B}$, rencontre Σ en temps T. Enfin, dans la pratique le temps d'acquisition T est suffisamment court pour qu'il soit légitime de supposer que $\mathcal{B} = \mathbb{R}^3$. En particulier, si Σ ne couvre pas l'intégralité du bord de Ω, il existe nécessairement un rayon partant de Ω se propageant à vitesse 1 dans $\mathcal{B}$ ne rencontrant pas Σ, autrement dit, un rayon se propageant dans $\mathcal{B}$ passant *« entre les capteurs »*. Par conséquent si la surface de capteurs Σ ne couvre pas l'intégralité de $\partial\Omega$, on a $C_T(\chi_\Sigma) = 0$. La constante d'observabilité ne constitue donc pas, dans ce chapitre, un critère pertinent.

Par ailleurs lorsqu'elle constitue le seul critère à optimiser, la constante d'observabilité aboutit, comme on l'a vu dans le chapitre précédent, à des dispositions optimales de capteurs uniquement caractérisées par la géométrie du bord du corps à imager. Dans un contexte applicatif, il n'est pas pertinent de considérer une telle contrainte sur la disposition optimale de capteurs. En effet, une telle disposition ne peut fournir la meilleure résolution de l'image reconstruite. La raison en est simple : dans le cas de la tomographie photoacoustique, un des buts est de pouvoir localiser des tumeurs (par exemple) dans les tissus sains. Comme on le verra plus loin, il s'agit de déterminer à partir du signal mesuré par les capteurs la position d'hétérogénéités dans les tissus composant le corps à imager. Intuitivement, la disposition de capteurs fournissant la meilleure qualité de l'image reconstuite dépend de la position de ces hétérogénéités, et donc du signal observé.

Ainsi, pour produire une disposition optimale de capteurs, on s'attachera d'une part à optimiser le caractère bien posé du problème inverse, mais aussi à adapter la disposition de capteurs au signal observé.

Si le problème du positionnement de capteurs a été largement étudié en ingénierie, (cf par exemple [AD06, HMW80, WPPR00]), notons que dans la majorité des contributions le nombre de capteurs ainsi que leur forme sont fixés a priori. On s'attache ici à ne poser sur le domaine d'observation qu'une contrainte sur l'aire couverte par les capteurs, ainsi qu'une pénalisation du périmètre, de manière à autoriser une grande variété de formes et positions de capteurs.

Ce chapitre consiste, dans un premier temps, à construire avec des arguments de modélisation, une fonctionnelle rendant compte de la qualité de l'image obtenue. Dans un second temps, pour une disposition initiale de capteurs donnée et un premier signal observé, nous proposons d'indiquer comment modifier la position de ces capteurs pour améliorer la reconstruction. Ceci passe par l'étude théorique du problème d'optimisation de forme sous-jacent. Enfin en utilisant les différents résultats

établis, on illustrera par un certain nombre de simulations numériques, la méthode proposée.

2.1 La tomographie photoacoustique

Cette partie reprend et résume les travaux de synthèse sur la tomographie photoacoustique exposés dans [Bon10]. On pourra trouver dans [Bon10] plus de précisions sur le modèle utilisé dans ce chapitre, ainsi qu'un certain nombre de remarques sur ses avantages et limitations. En particulier on exposera les principes physiques sur lesquels repose ce procédé d'imagerie, ainsi que les outils mathématiques traditionnellement utilisés pour résoudre le problème inverse associé.

2.1.1 Principes physiques

La tomographie photoacoustique (en abrégé PAT), aussi appelée optoacoustique ou photoacoustique, est une technique d'imagerie hybride ultra-sonore, non invasive encore peu développée qui est une alternative précise et plus économique à l'imagerie X. Depuis le premier prototype clinique, mis au point par Kruger en 1998 [KSKJ02, KKJM$^+$00], elle fait l'objet d'études intensives aussi bien sur les plans médicaux et physiques que mathématiques [XW06, XW02, Liu96]. Pour des raisons de densité des tissus sains et de contraste, la PAT s'avère particulièrement performante dans un contexte de détection des tumeurs dans un tissu mou (mammographie par exemple).

Le principe est le suivant : les tissus à imager sont illuminés par un laser ; en absorbant cette énergie les tissus se réchauffent et subissent une expansion générant une onde de pression acoustique. La diversité de capacité des tissus à absorber l'impulsion lumineuse, selon leur densité, entraine une expansion non uniforme des tissus et donc une signature particulière de l'onde de pression acoustique. C'est cette onde de pression que des capteurs appropriés, des microphones piézoélectriques dans ce cas, vont mesurer. On résout enfin le problème inverse consistant à reconstruire la densité des tissus à imager à partir de ces mesures.

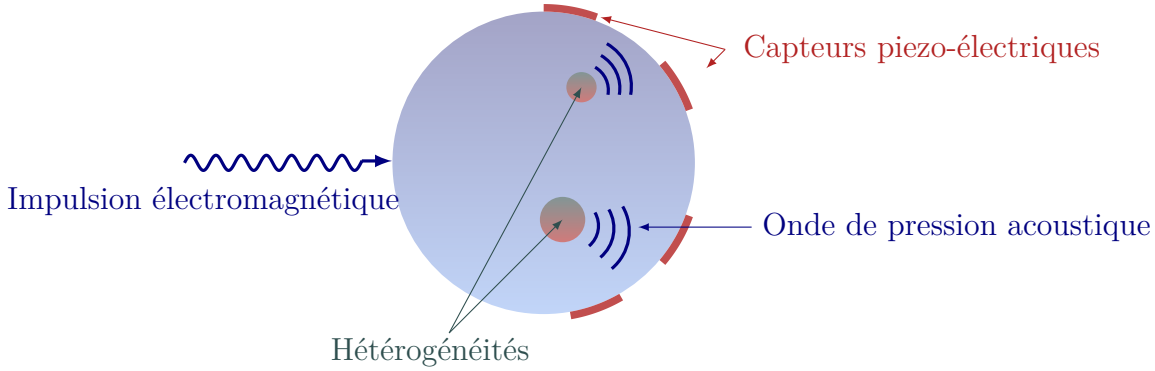


FIGURE 2.1 – La PAT : le corps illuminé restitue une onde acoustique enregistrée par les capteurs

La méthode repose donc sur la possibilité de distinguer les différents types de tissus présents dans le corps humain en identifiant leur capacité à absorber l'impulsion électromagnétique originale. Plus précisément, il s'agit de reconstruire la carte de l'absorptivité de toutes les régions du corps grâce à l'enregistrement de l'onde de pression générée. L'avantage d'une telle technique réside dans le fait que les tissus composant les tumeurs, qui sont précisément les hétérogénéités à localiser dans le corps à imager, sont plus vascularisés que les tissus sains, même dans les stades les moins avancés. Cette vascularisation modifie grandement la capacité d'absorption. Des études montrent que cette capacité d'absorption est porteuse d'excellentes capacités de contraste. Par exemple un laser émettant dans la région des proches infra-rouges produit des coefficients d'absorption variant du simple au quintuple dans les tissus souples humains ([JZLJ94]). Enfin la richesse spectrale du signal acoustique produit permet, selon la méthode de détection choisie, des résolutions allant de 0.5mm à 100m ([AKO03, PNHB07, XW03]).

Lors d'une illumination laser la durée de l'impulsion lumineuse est d'à peu près $20ps$ et la vitesse du son v_s dans les tissus est de $1.5nm/ps$. Ainsi, tant que nous ne nous intéressons pas à des résolutions spatiales inférieures à $20 \times 1.5 = 30nm$, la distribution temporelle de l'intensité lumineuse constitue une approximation de la distribution de Dirac. Sous cette approximation, le modèle généralement adopté assimile les hétérogénéités à des sources acoustiques internes au corps à imager (voir [BBHP14, BR11, HSS05, SGG+09, XW06]).

Pour résumer, l'onde de pression dans le corps Ω à imager est solution du système

suivant (voir par exemple [Bon10, BBHP14])

$$\begin{cases} \partial_{tt} p(x,t) - \Delta p(x,t) = 0 & \text{sur } \Omega \times [0,T] \\ p(x,0) = u(x) := \mu_{abs}(x) I(x) & \text{sur } \Omega \\ \partial_t p(x,0) = 0 & \text{sur } \Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

où $T > 0$ désigne le temps d'acquisition, μ_{abs} le coefficient d'absorption qui décrit la capacité du fluide à absorber l'énergie issue de l'illumination, et $I(x)$ la fluence, c'est à dire la moyenne dans toutes les directions de l'intensité lumineuse. Les conditions de bord seront précisées plus loin.

Par ailleurs, lorsqu'il s'agit d'imager des tissus mous, on peut en première approximation, supposer que la fluence I satisfait l'équation suivante (voir par exemple [Arr99]) :

$$\forall x \in \Omega, \quad \mu_{abs}(x) I(x) - \Delta I(x) = S(x), \tag{2.2}$$

où S désigne la source lumineuse incidente.

On considère alors le problème inverse consistant à reconstruire la condition intiale $p(x,0) = u(x)$ à partir des mesures de p sur les capteurs. En effet, puisque $S(x)$ est connue par hypothèse, l'équation (2.2) permet de déduire de $u(x) = \mu_{abs}(x) I(x)$, la valeur de $I(x)$. Il s'ensuit une estimation de la carte d'absoptivité $\mu_{abs}(x) = u(x)/I(x)$ qu'il s'agit de reconstruire.

L'objectif de ce chapitre est de proposer une disposition de capteurs améliorant la qualité de la reconstruction. Ainsi nous ne nous intéresserons pas aux techniques de résolution du problème inverse que constitue la PAT. Rappelons toutefois que ce problème inverse a été largement étudié. Quant aux techniques utilisées il s'agit le plus souvent de rétroprojection filtrée (voir par exemple [BBMG$^+$07, HSS05, Kun08, XW05]) ou de renversement temporel (voir par exemple [HKN08, Hri09, ABJK10, ABJW12, ABGW11])

2.2 Positionnement optimal des capteurs

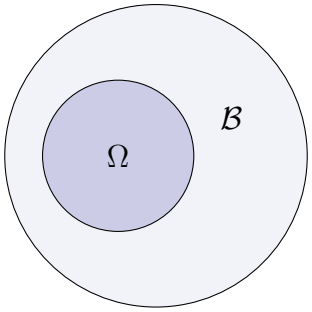
Lorsque se pose la question de l'optimisation du placement des capteurs, la plupart des modélisations consiste à assimiler ces capteurs à des points, dont il faut optimiser la disposition ou le nombre. Contrairement à cette approche on considère dans cette étude des capteurs disposés sur la surface du corps à imager, dont la forme, la taille, le nombre et la position ne sont pas fixés a priori. Ce sont justement ces paramètres qu'on va optimiser afin d'améliorer la qualité de l'image obtenue. Le défi d'une telle approche est de considérer, non plus des problèmes d'optimisation en

dimension finie, mais des problèmes d'optimisation de formes en dimension infinie, plus généraux, et donc plus riches.

2.2.1 Modélisation

Cadre

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ représentant le corps à imager ($n = 2$ ou 3 dans ce chapitre). On le suppose $\mathcal{C}^1$ et convexe, pour des raisons essentiellement techniques qui apparaîtront par la suite. Notons cependant que ces hypothèses sont raisonnables d'un point de vue pratique. Soit un ouvert $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ contenant Ω. Le domaine $\mathcal{B} \setminus \Omega$ représente le milieu ambiant (air ou eau par exemple). Dans la pratique le domaine $\mathcal{B}$ est non borné. Néammoins, pour les besoins des simulations numériques on définit $\mathcal{B}$ comme une boule dont le rayon R est supposé très grand. Ainsi, en considérant un temps d'acquisition $T > 0$ donné, le support de l'onde de pression n'atteint pas le bord de $\mathcal{B}$ (voir plus loin la proposition 2).



On considère la propagation de l'onde acoustique décrite dans la partie 2.1.1, pendant un temps T avec la vitesse du son $c = c_1\chi_\Omega + c_2\chi_{\mathcal{B}\setminus\Omega}$, où c_1 et c_2 sont des réels positifs, représentant les célérités respectives de l'onde de pression dans Ω et dans $\mathcal{B} \setminus \Omega$ supposés homogènes. Conformément à la modélisation décrite dans la partie précédente, on souhaite reconstruire la pression initiale p_0, qui est directement reliée à la carte de l'absorptivité μ_{abs} du corps à imager (cf (2.1) - (2.2)). Rappelons qu'on suppose la vitesse initiale de l'onde de pression, $\partial_t p_0$, nulle. Ainsi le système (2.1) s'écrit dans ce cas :

$$\begin{cases} \partial_{tt}p(x,t) - \operatorname{div}(c(x)\nabla p(x,t)) = 0 & \text{sur } \mathcal{B} \times [0,T], \\ p(x,0) = p_0,\ \operatorname{supp}(p_0) \subset \Omega & \text{sur } \mathcal{B}, \\ \partial_t p(x,0) = 0 & \text{sur } \mathcal{B}, \\ p(x,t) = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{B} \times [0,T], \end{cases} \tag{2.3}$$

On suppose enfin que $p_0 \in H_0^1(\Omega)$, et on a le résultat suivant :

Proposition 1. *Pour tout $p_0 \in H_0^1(\Omega)$, il existe une unique solution $p_{[p_0]}$ au problème* (2.3)*, vérifiant*

$$p_{[p_0]} \in \mathcal{C}^1\left([0,T], L^2(\mathcal{B})\right) \cap \mathcal{C}^0\left([0,T], H_0^1(\mathcal{B})\right).$$

La preuve de ce résultat est standard lorsqu'on munit l'espace $H_0^1(\mathcal{B})$ du produit scalaire suivant

$$\langle u, v\rangle_{H^1} = \int_{\mathcal{B}} u(x)v(x)\,dx + \int_{\mathcal{B}} c(x)\langle \nabla u(x).\nabla v(x)\rangle\,dx,$$

qui en fait un espace de Hilbert (rappelons que $c > 0$, presque partout sur $\mathcal{B}$). On pourra se référer par exemple à [Bre10].

Dans toute la suite, lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, on notera p la solution $p_{[p_0]}$ du système (2.3) associée à la condition initiale p_0.

La proposition suivante assure que pour R suffisamment grand, ou pour T assez petit, le problème (2.3) posé sur $\mathcal{B}$ est équivalent au problème posé sur $\mathbb{R}^n$, comme annoncé au début de cette section. Soit le problème

$$\begin{cases} \partial_{tt}p(x,t) - \operatorname{div}(c(x)\nabla p(x,t)) = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^n \times [0,T], \\ p(x,0) = p_0(x),\ \operatorname{supp}(p_0) \subset \Omega & \text{sur } \mathbb{R}^n, \\ \partial_t p(x,0) = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{2.4}$$

avec $p_0 \in H_0^1(\Omega)$, et $c = c_1\chi_\Omega + c_2\chi_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega}$.

Proposition 2. *Soit $T > 0$ fixé. Pour R suffisamment grand les problèmes* (2.3) *et* (2.4) *sont équivalents, au sens où le problème* (2.4) *admet une unique solution, qui coïncide pour tout $t \in [0,T]$ avec la solution de* (2.3)*, prolongée par* 0 *sur $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{B}$.*

On pourra trouver la preuve de ce résultat dans l'annexe B.2

Modélisation du problème d'optimisation

La fonctionnelle objectif

On cherche à reconstruire p_0 à partir de mesures sur des capteurs Σ répartis sur la surface de Ω pendant un temps $T > 0$. On suppose les capteurs d'*« épaisseur »* non nulle : il existe $\Gamma \subset \partial\Omega$, $\mathcal{H}^{n-1}$-mesurable et $\varepsilon > 0$, tels que

$$\Sigma = \{s + \mu\,\vec{n}(s), s \in \Gamma, \mu \in [0,\varepsilon]\} \tag{2.5}$$

où $\vec{n}(s)$ désigne la normale extérieure au domaine Ω en s, comme représenté sur la figure 2.2, et $\mathcal{H}^{n-1}$ représente la mesure de Hausdorff $(n-1)$-dimensionnelle sur $\partial\Omega$.

. Rappelons que le domaine Ω est supposé $\mathcal{C}^1$, l'application $s \mapsto \vec{n}(s)$ est donc bien définie partout sur $\partial\Omega$.

Remarque 1. *On définit des capteurs volumiques car, l'équation des ondes n'étant pas régularisante, si la condition initiale est de régularité trop faible (par exemple des hétérogénéités au contraste net), on ne peut pas définir la trace sur $\partial\Omega$ de la variable d'observation définie par l'équation (2.9) plus loin. Ainsi des capteurs surfaciques ne sont pas adaptés. Comme p_0 est supposée dans $H_0^1(\Omega)$, des capteurs volumiques sont toujours adaptés.*

Le domaine Σ représentant les capteurs est donc à support dans la couronne

$$\widetilde{\partial\Omega} := \{s + \mu\vec{n}(s), s \in \partial\Omega, \mu \in [0, \varepsilon]\}.$$

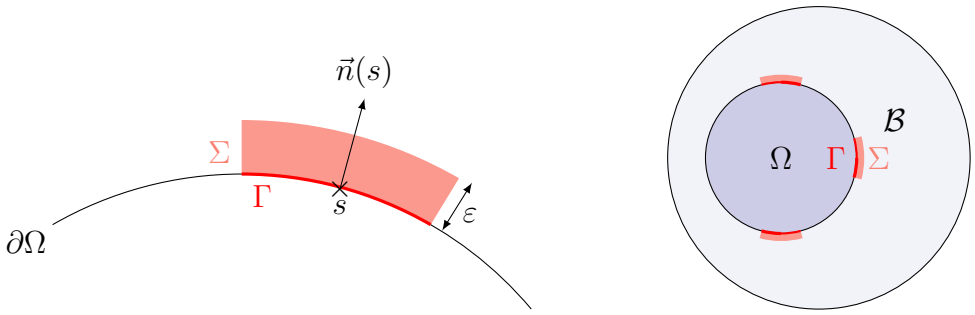


FIGURE 2.2 – Répartition des capteurs.

On choisit d'imposer une contrainte de volume sur l'ensemble Σ représentant les capteurs, sans quoi la répartition $\Sigma = \widetilde{\partial\Omega}$ qui recouvre l'intégralité du bord $\partial\Omega$, est évidemment solution du problème. Cette contrainte de volume coïncide par ailleurs avec les exigences pratiques. On peut en effet la comprendre comme un coût maximal imposé pour la fabrication des capteurs.

En réalité, comme dans le chapitre précédent, on ne va considérer que les domaines $\Sigma = \{s + \mu\vec{n}(s), s \in \Gamma, \mu \in [0, \varepsilon]\}$, satisfaisant la contrainte d'aire sur Γ suivante (avec $L \in [0, 1]$) :

$$\mathcal{H}^{n-1}(\Gamma) = L\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega).$$

En effet, cette contrainte sur Γ impose bien une contrainte de volume sur Σ, car, dans la pratique, on peut supposer que la surface de capteurs en contact avec le corps Ω est assez petite pour justifier l'approximation suivante :

$$\mathrm{Vol}(\Sigma) \approx \varepsilon\mathcal{H}^{n-1}(\Gamma).$$

Pour tout $L \in [0,1]$, on appelle alors $\mathcal{U}_L$ l'ensemble des indicatrices χ_Σ admissibles, c'est-à-dire telles que la disposition de capteurs Σ vérifie la contrainte d'aire. Formellement $\mathcal{U}_L$ s'écrit

$$\mathcal{U}_L = \{a \in L^\infty(\widetilde{\partial\Omega}),\ a(s+\mu\vec{n}(s)) = X(s),\ \forall (s,\mu) \in \partial\Omega \times [0,\varepsilon],\ \text{avec } X \in \mathcal{V}_L\}, \tag{2.6}$$

et

$$\mathcal{V}_L = \{a \in L^\infty(\partial\Omega),\ a(1-a) = 0 \text{ p.p.},\ \int_{\partial\Omega} a(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x) = L\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)\}.$$

Notons que la définition de $\mathcal{U}_L$ a un sens puisque le domaine Ω est supposé $\mathcal{C}^1$ et convexe. Par conséquent l'application $\partial\Omega \times [0,\varepsilon] \ni (s,\mu) \mapsto s + \mu\vec{n}(s) \in \widetilde{\partial\Omega}$ est bijective.

On appelle enfin p_{obs} la pression mesurée sur $\Sigma \times [0,T]$ par les capteurs, et $p_{[p_0]}$ la solution du problème (2.3) pour la donnée initiale $p_0 \in H_0^1(\Omega)$.

On cherche la meilleure disposition de capteurs Σ, au sens du problème d'optimisation suivant :

$$\sup_{\chi_\Sigma \in \mathcal{U}_L} \inf_{p_0 \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} J(\chi_\Sigma, p_0). \tag{2.7}$$

avec

$$\begin{aligned} J(\chi_\Sigma, p_0) &= \gamma_1 \int_0^T \int_{\mathcal{B}} \chi_\Sigma(x)(p_{[p_0]}(x,t) - p_{obs}(x,t))^2 dxdt \\ &+ \gamma_2 \frac{\displaystyle\int_0^T \int_{\mathcal{B}} \chi_\Sigma(x) \partial_t p_{[p_0]}(x,t)^2 dxdt}{\| p_0 \|^2_{H^1(\Omega)}} \end{aligned} \tag{2.8}$$

où $(\gamma_1, \gamma_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ sont des paramètres à ajuster.

Justification de la fonctionnelle J

Avant de considérer les questions d'existence et d'unicité des solutions d'un tel problème, justifions l'introduction de la fonctionnelle J. Posons

$$A_1(\chi_\Sigma, p_0) = \int_0^T \int_{\mathcal{B}} \chi_\Sigma(x)(p_{[p_0]}(x,t) - p_{obs}(x,t))^2 dxdt,$$

et

$$A_2(\chi_\Sigma, p_0) = \frac{\int_0^T \int_{\mathcal{B}} \chi_\Sigma(x) \partial_t p_{[p_0]}(x,t)^2 dx dt}{\| p_0 \|^2_{H^1(\Omega)}}.$$

- Le terme $A_1(\chi_\Sigma, p_0)$ est un terme d'attache aux données : il assure que la solution p_0 du problème d'optimisation (2.7) constitue une condition initiale proche, au sens de la distance L^2 sur les capteurs, de celle qui a généré p_{obs} et que l'on cherche à reconstruire.
- Le terme $A_2(\chi_\Sigma, p_0)$, est directement issu de la notion d'observabilité. Dans la pratique les capteurs utilisés mesurent les variations temporelles de l'onde de pression. On définit donc la variable d'observation correspondante

$$z_\Sigma(x,t) = \chi_\Sigma(x) \partial_t p(x,t). \tag{2.9}$$

Lorsqu'on est en situation d'observabilité, la constante d'observabilité s'écrit

$$C_T(\chi_\Sigma) = \inf_{p_0 \in H_0^1(\Omega)} \frac{\int_0^T \int_{\mathcal{B}} z_\Sigma(x,t)^2 dx dt}{\| p_0 \|^2_{H^1(\Omega)}}. \tag{2.10}$$

En accord avec la modélisation du chapitre 1, l'ajout du terme A_2 dans la fonctionnelle vise à modéliser la qualité de la reconstruction. En effet, dans le cas idéal de la propagation des ondes dans un billard en temps grand, le problème inverse est bien posé si et seulement si la constante d'observabilité est strictement positive. Dans le cas réaliste considéré ici, on ne peut pas espérer être dans une situation d'observabilité puisque le temps de l'expérience est très court. Cependant, si la quantité A_2 est petite cela signifie que les capteurs n'ont mesuré qu'une faible part du signal initial. Pour cette raison on choisit de maximiser $C_T(\chi_\Sigma)$ par rapport à Σ.

Justification du problème d'optimisation (2.7)

Montrons à présent que la résolution en Σ du problème (2.7) :

$$\sup_{\chi_\Sigma \in \mathcal{U}_L} \inf_{p_0 \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} J(\chi_\Sigma, p_0),$$

répond bien aux objectifs fixés, c'est-à-dire aboutit à une disposition de capteurs améliorant la qualité de la reconstruction.

- Lorsqu'on est en situation d'observabilité, le problème

$$\sup_{\chi_\Sigma \in \mathcal{U}_L} \inf_{p_0 \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} A_2(\chi_\Sigma, p_0),$$

correspond à maximiser la constante d'observabilité, ce qui a pour conséquence d'améliorer la qualité de la reconstruction (voir la section 1.1.1).

- Dans un premier temps, toute solution du problème à Σ fixé :

$$\inf_{p_0 \in H_0^1(\Omega)} A_1(\chi_\Sigma, p_0),$$

si elle existe, fournit une condition initiale p_0 telle que la solution p du système (2.3) correspondante approche au mieux le signal observé p_{obs} sur Σ.

- Dans un second temps, afin de justifier (au moins qualitativement) la maximisation en χ_Σ du terme A_1 on considère le cas suivant, illustré par la figure 2.3. Supposons que les signaux p_{obs} et $p_{[p_0]}$ coïncident sur un petit ouvert $\mathcal{O}$ mais pas ailleurs, et considérons deux dispositions de capteurs Σ_1 et Σ_2. Si $\Sigma_2 \subset \mathcal{O}$, on a $A_1(p, \chi_{\Sigma_1}) > A_1(p, \chi_{\Sigma_2}) = 0$. Or $p \neq p_{obs}$, donc, dans cet exemple, Σ_1 est plus fiable que Σ_2. C'est pour cette raison qu'on maximise A_1 par rapport à χ_Σ.

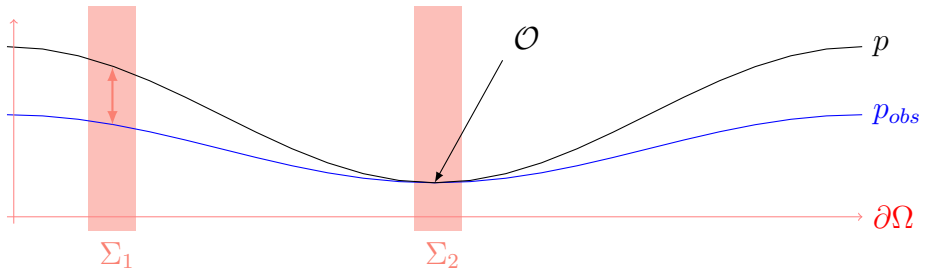


Figure 2.3 – Illustration.

- Enfin, notons que d'après le théorème de Sion (voir en annexe le théorème 4), on a

$$\sup_{\chi_\Sigma \in \mathcal{U}_L^*} \inf_{p_0 \in H_0^1(\Omega)} A_1(\chi_\Sigma, p_0) = \inf_{p_0 \in H_0^1(\Omega)} \sup_{\chi_\Sigma \in \mathcal{U}_L} A_1(\chi_\Sigma, p_0),$$

où $\mathcal{U}_L^*$ désigne l'adhérence de $\mathcal{U}_L$ pour la topologie faible étoile de $L^\infty(\widetilde{\partial\Omega})$ (voir la figure 2.5 pour plus de précisions).

Une première approche

Montrons, à l'aide d'un cas particulier, que le problème (2.7) est mal posé. Considérons le problème à Σ fixé dans $\mathcal{U}_L$:

$$\inf_{p_0 \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} J(\chi_\Sigma, p_0), \tag{$\mathcal{P}_\Sigma$}$$

et supposons que $c_1 = c_2 = 1$, et $L < 1$. On va montrer dans ce cas que pour un choix générique d'ensemble admissible Σ, il existe une suite minimisante $(p_0^k)_{k\in\mathbb{N}} \in (H_0^1(\Omega)\setminus\{0\})^{\mathbb{N}}$ pour le problème $(\mathcal{P}_\Sigma)$ telle que $\| p_0^k \|_{H^1(\Omega)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et $A_2(\chi_\Sigma, p_0^k) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ceci invalide la modélisation et justifie la régularisation que nous introduirons dans le paragraphe suivant. Qualitativement on peut interpréter l'annulation du terme A_2 comme la conséquence du défaut d'observabilité évoqué en introduction.

Remarque 2. *Le défaut d'observabilité peut s'interpréter de la façon suivante : si $x(t)$ est un rayon se propageant dans $\mathcal{B}$ suivant les lois de l'optique géométrique, tel que $x(0) \in \Omega$, on peut construire une suite de conditions initiales $(p_0^{m,g})_{m\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{B})$ à support dans Ω telle que les solutions de l'équation des ondes (2.3) associées $p^{m,g}$ sont d'énergie bornée et se concentrent autour de la géodésique x.*

Proposition 3. *Soit $L < 1$ et un domaine $\Sigma \subset \widetilde{\partial\Omega}$ tel que $\chi_\Sigma \in \mathcal{U}_L$, et $\Gamma \subset \partial\Omega$ la surface associée (voir (2.5)). On suppose qu'il existe un ouvert $\mathcal{O}$ de $\partial\Omega$ inclus dans $\partial\Omega \setminus \Gamma$. Alors toute une suite minimisante $(p_0^k)_{k\in\mathbb{N}} \in (H_0^1(\Omega) \setminus \{0\})^{\mathbb{N}}$ vérifie*

$$A_2(\chi_\Sigma, p_0^k) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par ailleurs il existe une suite minimisante $(\widetilde{p_0^k})_{k\in\mathbb{N}} \in (H_0^1(\Omega) \setminus \{0\})^{\mathbb{N}}$ qui vérifie

$$\| \widetilde{p_0^k} \|_{H^1(\Omega)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Démonstration. Soit $(p_0^k)_{k\in\mathbb{N}} \in (H_0^1(\Omega) \setminus \{0\})^{\mathbb{N}}$ une suite minimisante du problème $(\mathcal{P}_\Sigma)$. Par l'absurde, supposons qu'il existe $A > 0$ tel que $A_2(p_0^k) > A$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (à sous-suite près).

On rappelle le théorème suivant, tiré de [MZI02].

Théorème 1. *Soit $x(t)$ un rayon se propageant dans $\mathcal{B}$ suivant les lois de l'optique géométrique. Alors il existe une suite $(p^{m,g})_{m\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{C}^\infty([0,T] \times \mathcal{B})$, de solutions de (2.3) telle que :*

- **les $p^{m,g}$ se concentrent autour du rayon $x(t)$:**

$$\exists \alpha > 0, \quad \sup_{t\in[0,T]} \int_{\mathcal{B}\setminus B_m} (|\partial_t p^{m,g}(x,t)|^2 + |\nabla p^{m,g}(x,t)|^2) dxdt \leqslant Ce^{-\alpha\sqrt{m}} \quad (2.11)$$

  où B_m représente la boule de centre $x(t)$ et de rayon $m^{-1/4}$, et α est une constante ne dépendant pas de m.

- **L'énergie de $p^{m,g}$ est bornée par rapport à m :**

$$\exists \beta > 0, \quad \lim_{m\to+\infty} \int_0^T \int_{\mathcal{B}} (|\partial_t p^{m,g}(x,t)|^2 + |\nabla p^{m,g}(x,t)|^2) dxdt = \beta. \quad (2.12)$$

On dit alors qu'il existe une solution asymptotique à l'équation des ondes se concentrant autour de tout rayon se propageant dans $\mathcal{B}$ selon les lois de l'optique géométrique. La suite $(p^{m,g})_{m\in\mathbb{N}}$ s'appelle "faisceau gaussien" *associé au rayon x.*

Pour une construction explicite des faisceaux gaussiens on peut également se rapporter à [Ral82].

Soit $x \in \mathcal{O}$, on définit $x_0 = x - \varepsilon\vec{n}(x)$ avec $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que $x_0 \in \Omega$. Le rayon $x(t)$ issu de $(x_0, \vec{n}(x))$ rencontre $\partial\Omega$ en x. En particulier, par (2.11) l'énergie du faisceau gaussien associé à ce rayon tend vers 0 sur Σ.

On définit $(p^{m,g})_{m\in\mathbb{N}}$ la suite de solutions de l'équation des ondes donnée par le théorème 1, pour le choix de rayon $x(t)$. On définit également $p_0^{m,g} = p^{m,g}(0,\cdot)$ les conditions initiales associées à ces solutions. D'après la remarque 2, on peut supposer que $(p_0^{m,g})_{m\in\mathbb{N}} \in H_0^1(\Omega)^{\mathbb{N}}$.

D'après la définition de J (2.8) et en utilisant la linéarité de l'équation des ondes (2.3), on a pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$ fixés,

$$J(\chi_\Sigma, p_0^k + \lambda p_0^{m,g}) = \gamma_1 \int_0^T \int_\Sigma (p^k + \lambda p^{m,g} - p_{obs})^2 dx\, dt + \gamma_2 \frac{\displaystyle\int_0^T \int_\Sigma (\partial_t p^k + \lambda\, \partial_t p^{m,g})^2 dx\, dt}{\| p_0^k + \lambda p_0^{k,g} \|_{H_0^1(\Omega)}}$$

Par conservation de l'énergie, l'équation (2.12) implique qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\| p_0^{m,g} \|_{H_0^1(\Omega)} > \delta$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Ainsi, pour $k \in \mathbb{N}$ fixé, il existe $\lambda_0(k)$ tel que

$$\lambda > \lambda_0(k) \;\Rightarrow\; \lim_{m\to+\infty} \| p_0^k + \lambda p_0^{m,g} \|_{H_0^1(\Omega)} \geqslant k \| p_0^k \|_{H_0^1(\Omega)}.$$

D'après le théorème 1, pour tout $\lambda > \lambda_0(k)$ fixé on a

$$\int_0^T \int_\Sigma (p^k + \lambda p^{m,g} - p_{obs})^2 dx\, dt \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^T \int_\Sigma (p^k - p_{obs})^2 dx\, dt$$
$$\int_0^T \int_\Sigma (\partial_t p^k + \lambda\, \partial_t p^{m,g})^2 dx\, dt \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^T \int_\Sigma (\partial_t p^k)^2 dx\, dt.$$

Ainsi pour tout $\varepsilon > 0$ et $\lambda > \lambda_0(k)$ fixés, il existe un $m_0(k) \in \mathbb{N}$ tel que :

$$m > m_0(k) \;\Rightarrow\; A_1(\chi_\Sigma, p_0^k + \lambda p_0^{m,g}) \leqslant A_1(\chi_\Sigma, p_0^k) + \varepsilon.$$

et

$$m > m_0(k) \;\Rightarrow\; A_2(\chi_\Sigma, p_0^k + \lambda p_0^{m,g}) \leqslant \frac{\displaystyle\int_0^T \int_\Sigma (\partial_t p^k)^2 dx\, dt + \varepsilon}{k \parallel p_0^k \parallel_{H_0^1(\Omega)}}.$$

Rappelons que par conservation de l'énergie $\dfrac{\int_0^T \int_\Sigma (\partial_t p^k)^2 dx\, dt}{\parallel p_0^k \parallel_{H_0^1(\Omega)}} \leqslant 1$, et donc

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\displaystyle\int_0^T \int_\Sigma (\partial_t p^k)^2 dx\, dt + \varepsilon}{k \parallel p_0^k \parallel_{H_0^1(\Omega)}} = 0.$$

Enfin pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, on construit la suite $(\widetilde{p_0^k})_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}$ définie par $\widetilde{p_0^k} = p_0^k + \lambda p_0^{m,g}$ avec $m > m_0(k)$ et $\lambda > \lambda_0(k)$. On a par conséquent

$$\lim_{k\to+\infty} A_1(\chi_\Sigma, \widetilde{p_0^k}) \leqslant \lim_{k\to+\infty} A_1(\chi_\Sigma, p_0^k) + \varepsilon$$

et

$$\lim_{k\to+\infty} A_2(\chi_\Sigma, \widetilde{p_0^k}) = 0 < A,$$

ce qui, pour $\varepsilon < A$, contredit l'hypothèse que la suite $(p_0^k)_{k\in\mathbb{N}}$ minimise J sur $H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}$. Notons par ailleurs que la suite $(\widetilde{p_0^k})_{k\in\mathbb{N}}$ vérifie $\parallel \widetilde{p_0^k} \parallel_{H^1(\Omega)} \longrightarrow_{k\to+\infty} +\infty$. □

2.2.2 Régularisations et résultat d'existence

D'après la proposition 3, le problème (2.7) n'est pas pertinent, et n'aboutit pas, a priori, à l'optimisation de la qualité de l'image reconstruite. On choisit dans la suite de rajouter à la fonctionnelle J un terme régularisant ad hoc.

Régularisation du problème $(\mathcal{P}_\Sigma)$

On choisit ici d'imposer d'une part $p_0 \geqslant 0$, afin d'obtenir $A_2 \nrightarrow 0$ (voir plus loin la proposition 5), et d'autre part une borne supérieure pour $\parallel p_0 \parallel^2_{H^1(\Omega)}$ afin d'obtenir certaines propriétés de compacité. Plus précisément, on ajoute à la fonctionnelle J le terme de pénalisation $\gamma_3 \parallel p_0 \parallel^2_{H^1(\Omega)}$, avec $\gamma_3 \in \mathbb{R}_+^*$.

Remarque 3. *1. L'hypothèse $p_0 \geqslant 0$ est naturelle dans le cadre de la PAT. En effet, rappelons que l'onde de pression est générée par l'expansion des tissus*

due à l'impulsion lumineuse. Quelle que soit la densité des tissus composant Ω, et leur capacité à absorber l'energie, cette expansion induit une augmentation de la pression ([DSL]).

2. *Notons que la pénalisation de la norme H^1 de p_0 impose une limite au constraste dans la reconstruction de la densité des tissus, rendant floues les frontières des hétérogénéités. La figure 2.4 illustre ce phénomène.*

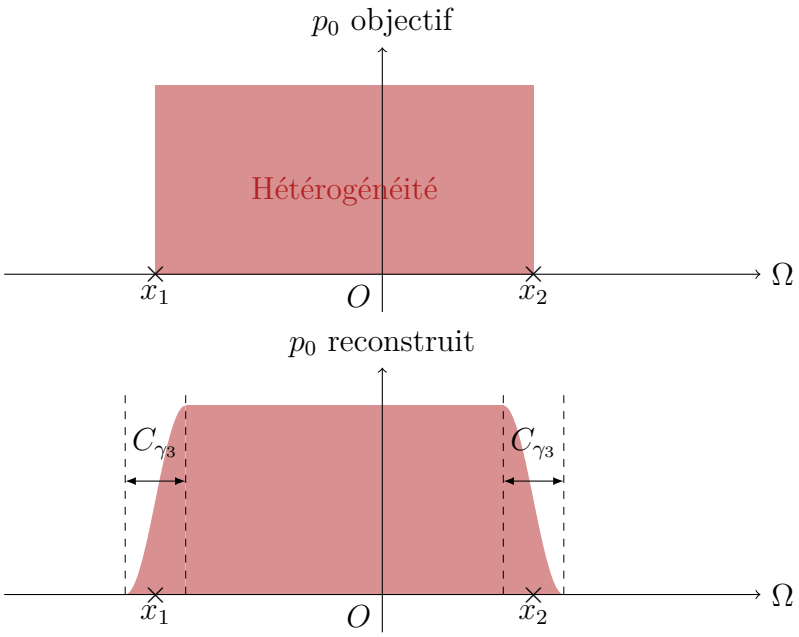


Figure 2.4 – Illustration de l'effet de la pénalisation sur le contraste de l'image reconstruite. C_{γ_3} est une constante dépendant uniquement de γ_3

Néanmoins, le choix de γ_3 étant libre, il est tout à fait possible de le choisir très petit lors de la mise en oeuvre numérique, de sorte à avoir C_{γ_3} très petite.

On introduit l'espace fonctionnel suivant :

$$\mathcal{K} := \left\{ p_0 \in H_0^1(\Omega),\ p_0 \geqslant 0 \right\}.$$

et la nouvelle fonctionnelle, encore notée J, définie sur $\mathcal{U}_L \times \mathcal{K} \setminus \{0\}$ par

$$\begin{aligned} J(\chi_\Sigma, p_0) &= \gamma_1 \int_0^T \int_{\mathcal{B}} \chi_\Sigma(x)(p(x,t) - p_{obs}(x,t))^2 dxdt \\ &+ \gamma_2 \frac{\displaystyle\int_0^T \int_{\mathcal{B}} \chi_\Sigma(x) \partial_t p(x,t)^2 dxdt}{\| p_0 \|^2_{H^1(\Omega)}} + \gamma_3 \| p_0 \|^2_{H^1(\Omega)}, \end{aligned} \tag{2.13}$$

avec $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$.

Proposition 4. *Soit $\Sigma \in \mathcal{U}_L$. De toute suite minimisante $(p_0^k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{K}\setminus\{0\})^{\mathbb{N}}$ du problème de minimisation $(\mathcal{P}_\Sigma)$, on peut extraire une sous-suite convergeant faiblement dans $H_0^1(\mathcal{B})$ vers un élément $p_0^* \in \mathcal{K}$.*

Démonstration. Soit $(p_0^k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{K}\setminus\{0\})^{\mathbb{N}}$ une suite minimisante. D'après (2.13), cette suite est bornée dans $H_0^1(\Omega)$, en particulier elle converge faiblement (à sous-suite près) dans cet espace vers $p_0^* \in H_0^1(\Omega)$. Par ailleurs, d'après le théorème de Rellich, la suite $(p_0^k)_{\mathbb{N}}$ converge fortement vers p_0^* dans $L^2(\Omega)$, donc elle converge également presque partout sur $\mathcal{B}$ et donc p_0^* est à support dans Ω et positive sur ce domaine, autrement dit $p_0^* \in \mathcal{K}$. □

La condition $p_0 \in \mathcal{K}$ a pour but de s'assurer que $\lim_{k\to+\infty} A_2(\chi_\Sigma, p_0^k) \neq 0$. Montrons dans un cas simple ce résultat.

Proposition 5. *On suppose que $n = 2$ ou 3, et $c_1 = c_2 = 1$. On suppose également que le signal p_{obs} vérifie l'hypothèse suivante :*

$$(H_{obs}) \ : \quad \textit{Il existe } p_0^h \in \mathcal{K}\setminus\{0\} \textit{ tel que, } \int_0^T \int_\Sigma (p_{[p_0^h]} - p_{obs})^2 dx\, dt < \int_0^T \int_\Sigma p_{obs}^2 dx\, dt.$$

Soit $(p_0^k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{K}\setminus\{0\})^{\mathbb{N}}$ une suite minimisante pour le problème $(\mathcal{P}_\Sigma)$, alors il existe $K_2 > 0$ et $K_3 > 0$ tel que si $\gamma_1 > K_2\gamma_2 + K_3\gamma_3$, on a

$$\lim_{k\to+\infty} A_2(\chi_\Sigma, p_0^k) > 0.$$

Démonstration. On rappelle le résultat suivant :

Lemme 6. *On suppose $c_1 = c_2 = 1$. Soit $p_0 \in \mathcal{K}$ et p la solution de l'équation* (2.3) *associée. On a pour tout $t \in]0, T]$ et pour presque tout $x \in \mathcal{B}$,*

- *lorsque $n = 2$, la* formule de Poisson *:*

$$2\pi \int_0^t p(x,u)du = t \int_{B(x,t)} \frac{p_0(y)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}}\, dy,$$

  où $B(x,t)$ désigne la boule de centre x et de rayon t.
- *lorsque $n = 3$, la* formule de Kirchoff *:*

$$4\pi \int_0^t p(x,u)du = t \int_{\partial B(x,t)} p_0(y)dy.$$

Preuve du lemme 6 : Les formules de Kirchoff et Poisson s'obtiennent par la méthode des moyennes sphériques (voir par exemple [Joh58]) lorsque $p_0 \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^n)$, et si p désigne la solution de l'équation des ondes (2.4) (posée sur $\mathbb{R}^n$) associée. On

obtient le même résultat si $p_0 \in \mathcal{K}$ en utilisant la densité de $\mathcal{C}^3(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$. Enfin d'après le théorème 2, les solutions des systèmes (2.3) et (2.4) associées à la condition initiale p_0, coïncident sur $\mathcal{B} \times [0,T]$, ce qui permet de conclure. □

Procédons par l'absurde et supposons que $A_2(\chi_\Sigma, p_0^k) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Puisque la suite $(p_0^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$, il s'ensuit que

$$\int_\Sigma \int_0^T |\partial_t p^k(x,t)|^2 dxdt \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En particulier, pour tout $t \in [0,T[$ et presque tout $x \in \Sigma$,

$$\int_0^t |\partial_t p^k(x,v)|^2 dv \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

et d'après la formule de Cauchy-Schwarz on en déduit que

$$\int_0^t |\partial_t p^k(x,v)| dv \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par ailleurs, pour tout $t \in [0,T]$ et presque tout $x \in \Sigma$,

$$\begin{aligned}
\left| \int_{u=0}^t p^k(x,u)du \right| &= \left| \int_{u=0}^t p^k(x,0)du + \int_{u=0}^t \int_{v=0}^u \partial_t p^k(x,v)dvdu \right| \\
&= \left| 0 + \int_{v=0}^t (t-v)\partial_t p^k(x,v)dv \right| \\
&\leqslant T \int_{v=0}^t \left|\partial_t p^k(x,v)\right| dv \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Supposons $n = 3$. D'après le lemme 6, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in]0,T]$, et pour presque tout $x \in \Sigma$

$$4\pi \int_0^t p^k(x,u)du = t \int_{\partial B(x,t)} p_0^k(y)dy,$$

où $B(x,t)$ désigne la boule de centre x et de rayon t.

Il s'ensuit que pour tout $t \in [0,T[$ et presque tout $x \in \Sigma$ on a

$$\int_{\partial B(x,t)} p_0^k(y)dy \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{2.14}$$

On peut toujours supposer $T > \mathrm{diam}(\Omega)$, quitte à élargir $\mathcal{B}$. Donc, puisque $p_0^k \geqslant 0$, la suite $(p_0^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 presque partout sur Ω. D'après la proposition 4 il existe $p_0^* \in H_0^1(\Omega)$ tel que la suite $(p_0^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers p_0^* pour la topologie faible de $H_0^1(\Omega)$. Par conséquent, par unicité de la limite, p_0^* est nulle presque partout sur Ω, et $(p_0^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers 0 dans $H_0^1(\Omega)$.

De plus l'application $p \mapsto A_1(\chi_\Sigma, p_0) = \int_0^T \int_{\mathcal{B}} \chi_\Sigma(x)(p(x,t) - p_{obs}(x,t))^2 \, dxdt$ est continue comme application de $L^2([0,T], L^2(\mathcal{B}))$ sur $\mathbb{R}$, et l'application $p_0 \mapsto p$ est continue comme application linéaire de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2([0,T], L^2(\mathcal{B}))$ [1]. Ainsi, par composition on a

$$\lim_{k\to+\infty} A_1(\chi_\Sigma, p_0^k) = A_1(\chi_\Sigma, 0) = \| \, p_{obs}(x,t)^2 \, \|^2_{L^2(\Sigma)} \, .$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \inf_{p_0\in\mathcal{K}} J(\chi_\Sigma, p_0) &= \lim_{k\to+\infty} J(\chi_\Sigma, p_0^k) = \gamma_1 \, \| \, p_{obs} \, \|^2_{L^2(\Sigma)} + \gamma_3 \lim_{k\to+\infty} \| \, p_0^k \, \|^2_{H_0^1(\Omega)} \\ &\geqslant \gamma_1 \, \| \, p_{obs} \, \|^2_{L^2(\Sigma)} \, . \end{aligned}$$

Dans un second temps on a, par homogénéité du terme A_2 et par linéarité du système (2.3), pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $\mu > 0$

$$J(\chi_\Sigma, \mu p_0^k) = \gamma_1 \int_0^T \int_\Sigma (\mu p^k - p_{obs})^2 dxdt + \gamma_2 A_2(\chi_\Sigma, p_0^k) + \gamma_3 \mu^2 \, \| \, p_0^k \, \|^2_{H_0^1(\Omega)} \, .$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \inf_{p_0\in\mathcal{K}} J(\chi_\Sigma, p_0) &\leqslant \lim_{k\to+\infty} \lim_{\mu\to 0} J(\chi_\Sigma, \mu p_0^k) \\ &\leqslant \lim_{k\to+\infty} \gamma_1 \, \| \, p_{obs} \, \|^2_{L^2(\Sigma)} + \gamma_2 A_2(\chi_\Sigma, p_0^k) \\ &\leqslant \gamma_1 \, \| \, p_{obs} \, \|^2_{L^2(\Sigma)} \, . \end{aligned}$$

On a donc

$$\inf_{p_0\in\mathcal{K}} J(\chi_\Sigma, p_0) = \gamma_1 \, \| \, p_{obs} \, \|^2_{L^2(\Sigma)} \, .$$

Soit p_0^h l'élément de $\mathcal{K}$ dont l'existence est donnée par l'hypothèse (H_{obs}), et p^h la solution de (2.3) associée. On définit

$$K_2 = \frac{A_2(\chi_\Sigma, p_0^h)}{\| \, p_{obs} \, \|^2_{L^2(\Sigma)} - A_1(p^h)}, \quad \text{et} \quad K_3 = \frac{A_3(\chi_\Sigma, p_0^h)}{\| \, p_{obs} \, \|^2_{L^2(\Sigma)} - A_1(p^h)}.$$

Dans ce cas, si $\gamma_1 < K_2\gamma_2 + K_3\gamma_3$, un calcul direct fournit

$$J(\chi_\Sigma, p_0^h) < \gamma_1 \, \| \, p_{obs} \, \|^2_{L^2(\Sigma)} = \inf_{p_0\in\mathcal{K}} J(\chi_\Sigma, p_0),$$

1. Par conservation de l'énergie d'une part on a, pour tout $t \in [0,T]$, $\int_{\mathcal{B}} |\nabla p(x,t)|^2 dx \leqslant \int_{\mathcal{B}} \left(\partial_t p(x,t)^2 + |\nabla p(x,t)|^2\right) dx \leqslant \int_\Omega |\nabla p_0(x)|^2 \leqslant \| \, p_0 \, \|^2_{H_0^1(\Omega)}$, et par l'inégalité de Poincaré-Wirtinger d'autre part $\int_{\mathcal{B}} |p(x,t)|^2 dx \leqslant C \int_{\mathcal{B}} |\nabla p(x,t)|^2 dx$ où la constante C ne dépend que de $\mathcal{B}$.

ce qui est absurde.

Le cas $n = 2$ se traite de la même façon. En effet, en utilisant le même raisonnement, la formule de Poisson fournit, pour tout $t \in [0, T[$ et presque tout $x \in \Sigma$, l'analogue de (2.14) :

$$\int_{B(x,t)} \frac{p_0^k(y)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}}\, dy \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi $(p_0^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge presque partout vers 0. La fin de la preuve est strictement identique. □

Remarque 4. *1. On peut justifier l'hypothèse (H_{obs}) par le raisonnement suivant. Supposons que (H_{obs}) ne soit pas vérifiée, on a alors*

$$\min_{p_0\in\mathcal{K}} A_1(\chi_\Sigma, p_0) = A_1(\chi_\Sigma, 0) = \| p_{obs} \|^2_{L^2(\Sigma)} .$$

En d'autres termes, au sens de l'attache aux données, une reconstruction optimale fournit un coefficient d'absorption constant dans Ω, ce qui n'est pas satisfaisant : le signal observé p_{obs} est impropre à reconstruire la carte de l'apsorptivité. Grossièrement les capteurs ne reçoivent aucune information, il n'est donc pas surprenant que dans ce cas la contribution du terme A_2 puisse être nulle. C'est pourquoi on écarte volontairement ce cas. Dans la pratique, dès que $p_{obs} \neq 0$, à perturbations près, on enregistre toujours une solution de l'équation des ondes relevable en une condition initiale. On limite par ailleurs les perturbations par des calibrages préalables.

2. Notons au passage que la limite $p_0^* \in \mathcal{K}$ fournie par la proposition 4 ne constitue pas nécessairement un minimiseur de J dans $\mathcal{K}$. En effet l'application $p_0 \mapsto 1/ \| p_0 \|_{H^1(\Omega)}$ n'est pas séquentiellement semi-continue inférieurement, et donc l'application J non plus.

On considère dans la suite le problème d'optimisation suivant :

$$\sup_{\chi_\Sigma\in\mathcal{U}_L} \inf_{p_0\in\mathcal{K}\setminus\{0\}} J(\chi_\Sigma, p_0). \tag{2.15}$$

avec

$$\begin{aligned} J(\chi_\Sigma, p_0) &= \gamma_1 \int_0^T \int_{\mathcal{B}} \chi_\Sigma(x)(p_{[p_0]}(x,t) - p_{obs}(x,t))^2 dxdt \\ &+ \gamma_2 \frac{\displaystyle\int_0^T \int_{\mathcal{B}} \chi_\Sigma(x)\partial_t p_{[p_0]}(x,t)^2 dxdt}{\| p_0 \|^2_{H^1(\Omega)}} + \gamma_3 \| p_0 \|^2_{H^1(\Omega)} \end{aligned} \tag{2.16}$$

où $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$ sont des paramètres à ajuster.

Le problème relaxé

Puisque $\mathcal{U}_L$ n'est pas compact pour la topologie faible étoile de $L^\infty(\widetilde{\partial\Omega})$, on étudie dans un premier temps une version relaxée du problème (2.15). On considère l'ensemble $\mathcal{U}_L^*$ défini par

$$\mathcal{U}_L^* = \{a \in L^\infty(\widetilde{\partial\Omega}),\ a(s+\mu\vec{n}(s)) = X(s),\ \forall (s,\mu) \in \partial\Omega \times [0,\varepsilon],\ \text{avec } X \in \mathcal{V}_L^*\}$$

avec

$$\mathcal{V}_L^* = \{a \in L^\infty(\partial\Omega),\ 0 \leqslant a \leqslant 1,\ \int_{\partial\Omega} a(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x) = L\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)\}.$$

Comme Ω est convexe et $\mathcal{C}^1$, la définition de $\mathcal{U}_L^*$ a un sens. On verra dans la démonstration de la proposition 6 que l'ensemble $\mathcal{U}_L^*$ est l'adhérence de $\mathcal{U}_L$ pour la topologie faible étoile de $L^\infty(\widetilde{\partial\Omega})$. Qualitativement, $\mathcal{U}_L^*$ représente, des densités de capteurs entre 0 et 1 sur bord de Ω et *"épaissies"* suivant la normale (cf figure 2.5).

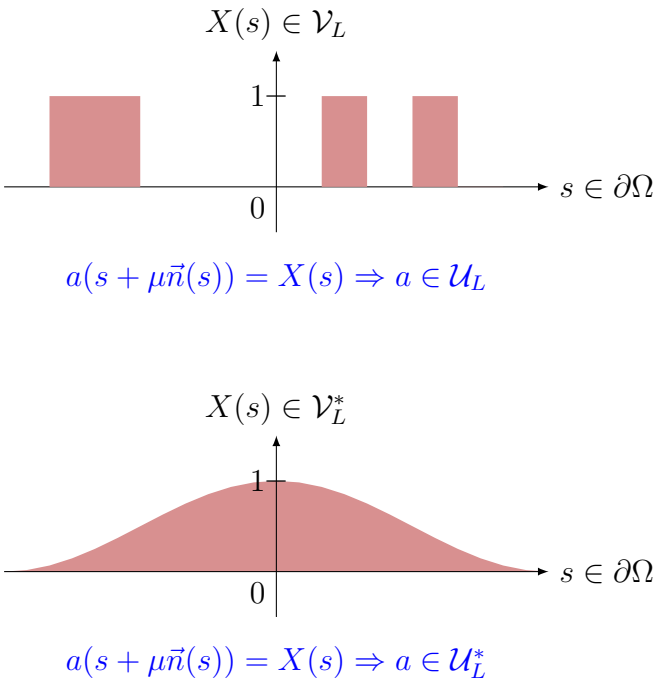


FIGURE 2.5 – Illustrations de $\mathcal{V}_L$ (en haut) et $\mathcal{V}_L^*$ (en bas).

Soit le problème relaxé :

$$\max_{a \in \mathcal{U}_L^*} \min_{p_0 \in \mathcal{K}\setminus\{0\}} J(a, p_0) \tag{2.17}$$

Proposition 6. *Le problème* (2.17) *admet une solution dans* $\mathcal{U}_L^*$.

Démonstration. La fonctionnelle J s'écrit :

$$\begin{aligned} J(a,p_0) &= \gamma_1 \int_0^T \int_{\mathcal{B}} a(x)(p(x,t)-p_{obs}(x,t))^2 dxdt \\ &+ \gamma_2 \int_0^T \int_{\mathcal{B}} a(x) \frac{\partial_t p(x,t)^2}{\| p_0 \|^2_{H^1(\Omega)}} dxdt + \gamma_3 \| p_0 \|^2_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

Pour tout $p_0 \in \mathcal{K}$ fixé, la fonctionnelle $a \in \mathcal{U}_L^* \mapsto J(p_0,a)$ est linéaire et continue pour la topologie $L^\infty(\widetilde{\partial\Omega})$ faible-étoile. Ainsi, $a \in \mathcal{U}_L^* \to \inf_{p_0\in\mathcal{K}} J(p_0,a)$ est semi-continue supérieurement pour cette même topologie, en tant que borne inférieure de fonctionnelles linéaires continues (voir par exemple [FL07]). Reste alors à prouver que $\mathcal{U}_L^*$ est bien l'adhérence de $\mathcal{U}_L$ pour la topologie $L^\infty(\widetilde{\partial\Omega})$ faible-étoile. On a alors l'existence d'un maximiseur, car la fonctionnelle est semi-continue supérieurement sur un compact.

Rappelons que

$$\mathcal{V}_L = \{a \in L^\infty(\partial\Omega),\ a(1-a)=0 \text{ p.p},\ \int_{\partial\Omega} a(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x) = L\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)\}$$

et

$$\mathcal{U}_L = \{a(s+\mu\vec{n}(s)) = X(s),\ \forall (s,\mu) \in \partial\Omega \times [0,\varepsilon],\ \text{avec } X \in \mathcal{V}_L\}.$$

Tout d'abord $\mathcal{V}_L^*$ est l'adhérence de $\mathcal{V}_L$ pour la topologie faible étoile de $L^\infty(\partial\Omega)$ (voir par exemple [HP06]). Ensuite $\mathcal{U}_L^*$ est convexe et contient $\mathcal{U}_L$. Montrons qu'il est fermé pour la topologie $L^\infty(\widetilde{\partial\Omega})$ faible-étoile : soit une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{U}_L^*)^{\mathbb{N}}$ convergeant faiblement vers $a \in L^\infty(\widetilde{\partial\Omega})$. Alors pour tout $\phi \in L^1(\widetilde{\partial\Omega})$ positive, on a d'une part :

$$0 \leqslant \int_{\widetilde{\partial\Omega}} a(x)\phi(x)dx,$$

et d'autre part :

$$\int_{\widetilde{\partial\Omega}} a(x)\phi(x)dx \leqslant \int_{\widetilde{\partial\Omega}} \phi(x)dx$$

et donc $\int_{\widetilde{\partial\Omega}} (a(x)-1)\phi(x)dx \leqslant 0$, $\forall \phi \in L^1(\widetilde{\partial\Omega})$ positive, ce qui impose :

$$0 \leqslant a(x) \leqslant 1 \text{ presque partout dans } \widetilde{\partial\Omega}.$$

Montrons maintenant que a est invariante par *« translation selon la normale »*. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n l'élément de $\mathcal{V}_L^*$ dont a_n est issu. Pour $\eta \geqslant 0$ on étend à $\mu \in [0, \varepsilon+\eta]$ et $s \in \partial\Omega$, la définition $a_n(s+\mu\vec{n}(s)) = X_n(s)$, et on définit l'élément

$a_n^\eta \in \mathcal{U}_L^*$ par

$$a_n^\eta(s+\mu\vec{n}(s)) = a_n(s+(\mu+\eta)\vec{n}(s)).$$

Dans ce cas, en posant $a^\eta(s+\mu\vec{n}(s)) = a(s+(\mu+\eta)\vec{n}(s))$, on a que a_n^η converge vers a^η pour la topologie faible étoile de $L^\infty(\widetilde{\partial\Omega})$. Par ailleurs, puisque $a_n^\eta = a_n$ sur $\widetilde{\partial\Omega}$, on a $a^\eta = a$ p.p sur $\widetilde{\partial\Omega}$, pour tout $\varepsilon > \eta > 0$. On a donc bien l'invariance par translation selon la normale. Ceci impose en particulier qu'il existe $X \in L^\infty(\partial\Omega)$ tel que $a(s+\mu\vec{n}(s)) = X(s)$, et par conséquent, $0 \leqslant X \leqslant 1$.

Il reste à montrer que $\displaystyle\int_{\partial\Omega} X(s)d\mathcal{H}^{n-1} = L\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)$.

Pour tout $(s,\mu) \in \partial\Omega \times [0,\varepsilon]$, on note dans la suite $x_{s,\mu} = s+\mu\vec{n}(s)$. On a pour tout $\phi \in L^1(\widetilde{\partial\Omega})$:

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega}\int_0^\varepsilon a_n(x_{s,\mu})\phi(x_{s,\mu})d\mu d\mathcal{H}^{n-1} &= \int_{\partial\Omega}\int_0^\varepsilon X_n(s)\phi(x_{s,\mu})d\mu d\mathcal{H}^{n-1}\\ &= \int_{\partial\Omega} X_n(s)\int_0^\varepsilon \phi(x_{s,\mu})d\mu d\mathcal{H}^{n-1}\end{aligned}$$

En choisissant ϕ de sorte que, pour tout $s \in \partial\Omega$, $\displaystyle\int_0^\varepsilon \phi(x_{s,\mu})d\mu = 1$ (ce qui est toujours possible) on a :

$$\int_{\partial\Omega}\int_0^\varepsilon a_n(x_{s,\mu})\phi(x_{s,\mu})d\mu d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{s\in\partial\Omega} X_n(s)d\mathcal{H}^{n-1} = L\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega).$$

Puis, par passage à la limite

$$\int_{\partial\Omega}\int_0^\varepsilon a(x_{s,\mu})\phi(x_{s,\mu})d\mu d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\partial\Omega} X(s)d\mathcal{H}^{n-1} = L\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega).$$

On a donc montré que $\overline{\mathcal{U}_L} \subset \mathcal{U}_L^*$.

Réciproquement, il s'agit de montrer que $\mathcal{U}_L^* \subset \overline{\mathcal{U}_L}$. Soit $a \in \mathcal{U}_L^*$, montrons qu'on peut l'approcher dans $L^\infty(\widetilde{\partial\Omega})$ faible étoile, par une suite de $\mathcal{U}_L$. Posons X l'élément de $\mathcal{V}_L^*$ dont provient a ainsi qu'une suite X_n d'éléments de $\mathcal{V}_L$ qui converge vers X pour la topologie faible étoile de $L^\infty(\partial\Omega)$, et a_n leurs représentants dans $\mathcal{U}_L$. On montre que $a_n \rightharpoonup a$ dans $L^\infty(\widetilde{\partial\Omega})$ faible étoile. Quel que soit $\phi \in L^1(\widetilde{\partial\Omega})$ on a

$$\begin{aligned}&\int_{\partial\Omega}\int_0^\varepsilon (a_n(x_{s,\mu}) - a(x_{s,\mu}))\phi(x_{s,\mu})d\mu d\mathcal{H}^{n-1}\\ =\ &\int_{\partial\Omega}\int_0^\varepsilon (X_n(s) - X(s))\phi(x_{s,\mu})d\mu d\mathcal{H}^{n-1}\\ =\ &\int_{\partial\Omega}(X_n(s) - X(s))\int_0^\varepsilon \phi(x_{s,\mu})d\mu d\mathcal{H}^{n-1}\\ \xrightarrow[n\to+\infty]{}\ &0.\end{aligned}$$

En effet, $X_n \rightharpoonup X$ pour la topologie $L^\infty(\partial\Omega)$ faible étoile, et $s \mapsto \int_0^\varepsilon \phi(x_{s,\mu})d\mu$ est bien dans $L^1(\partial\Omega)$, puisque par hypothèse $\phi \in L^1(\widetilde{\partial\Omega})$. □

Un résultat d'existence dans $\mathcal{U}_L$

Imposons à présent une condition de régularité sur le domaine Σ. Le but de cette régularisation est double. Dans un premier temps, elle permet d'obtenir un résultat d'existence de solutions au problème (2.15). Dans un second temps cette régularisation assure que la solution $\chi_\Sigma^* \in \mathcal{U}_L$ du problème (2.15) est exploitable dans la pratique. En effet, on rappelle le resultat suivant. Considérons l'équation des ondes posée sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Lorsqu'il s'agit de déterminer les ensembles $\omega \subset \Omega$ de mesure prescrite maximisant la restriction de l'énergie de la solution, à condition initiale fixée, les auteurs de [PTZ+13c] montrent que si la condition initiale vérifie une propriété d'analycité, il existe un domaine optimal ω^*, unique et possédant un nombre fini de composantes connexes. Néammoins pour certaines conditions initiales $\mathcal{C}^\infty$ mais non analytiques le domaine optimal ω^* est de type Cantor et en particulier possède une infinité de composantes connexes. Dans notre cas les conditions initales sont supposées de régularité H^1, et le terme A_2 a précisément pour but de maximiser la restriction à Σ de l'énergie des solutions p.

Soit $\Sigma \subset \widetilde{\partial\Omega}$ tel que $\chi_\Sigma \in \mathcal{U}_L$ et X son représentant dans $\mathcal{V}_L$. On ajoute à J le terme de pénalisation $-\gamma_4 \operatorname{TV}(\chi_\Sigma)$ où la notation TV désigne l'opérateur de variation totale défini sur $L^1(\mathcal{B})$ (voir en annexe la section A.1.1, pour plus de précisions).

Remarque 5. *Soit χ_Σ un élément de $\mathcal{U}_L$, et $X = \chi_\Gamma$, avec $\Gamma \subset \partial\Omega$, l'élément de $\mathcal{V}_L$ dont il est issu (voir (2.6)). Notons qu'il est équivalent de pénaliser* $\operatorname{TV}(\chi_\Gamma)$ *ou* $\operatorname{TV}(\chi_\Sigma)$ [2]. *En effet, rappelons que pour une fonction indicatrice d'un ensemble ω,* $\operatorname{TV}(\omega)$ *coïncide en dimension 2 avec le périmètre de ω et en dimension 3 avec l'aire de la surface $\partial\omega$ (voir par exemple [BMA06]). Le domaine Ω étant supposé $\mathcal{C}^1$ et convexe, l'aire de la surface $\partial\Sigma$ est toujours inférieure à celle d'un cylindre de base Γ et de hauteur ε (voir figure 2.2). Ainsi on a dans un premier temps l'inégalité suivante :*

$$\operatorname{TV}(\chi_\Sigma) \geqslant 2L\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) + \varepsilon \operatorname{TV}(\chi_\Gamma).$$

Par ailleurs, la courbure du bord $\partial\Omega$ étant par hypothèse bornée (Ω est convexe), il

2. Dans le premier cas la notation TV désigne l'opérateur ususel sur $\mathbb{R}^n$, dans le second cas elle désigne l'operateur défini sur la surface $\partial\Omega$, ce qui est licite puisque Ω est supposé de régularité $\mathcal{C}^1$ (voir en annexe la section A.1.1).

existe une constante M telle que[3] *:*

$$\mathrm{TV}(\chi_\Sigma) \leqslant M\left(2L\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) + \varepsilon\,\mathrm{TV}(\chi_\Gamma)\right).$$

Dans la suite, la pénalisation de $\mathrm{TV}(\chi_\Sigma)$ *impose donc une borne supérieure pour* $\mathrm{TV}(\chi_\Gamma)$*.*

On définit la nouvelle fonctionnelle, encore notée J, suivante :

$$\begin{aligned} J(\chi_\Sigma, p_0) &= \gamma_1 \int_0^T \int_{\mathcal{B}} \chi_\Sigma(x)(p_{[p_0]}(x,t) - p_{obs}(x,t))^2 dxdt \\ &\quad + \gamma_2 \frac{\displaystyle\int_0^T \int_{\mathcal{B}} \chi_\Sigma(x)\partial_t p_{[p_0]}(x,t)^2 dxdt}{\| p_0 \|^2_{H^1(\Omega)}} + \gamma_3 \| p_0 \|^2_{H^1(\Omega)} - \gamma_4\,\mathrm{TV}(\chi_\Sigma) \end{aligned} \tag{2.18}$$

avec $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$. Et on considère le problème d'optimisation

$$\sup_{\chi_\Sigma \in \mathcal{U}_L} \inf_{p_0 \in \mathcal{K}} J(\chi_\Sigma, p_0). \tag{2.19}$$

Proposition 7. *Il existe une solution au problème d'optimisation* (2.19)*.*

Démonstration. Soit $(\chi_\Sigma^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{U}_L$, maximisante pour J, et notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, χ_Γ^n l'élément de $\mathcal{V}_L$ correspondant, c'est-à-dire tel que $\chi_\Sigma^n(s + \mu\vec{n}(s)) = \chi_\Gamma^n(s)$, pour tout $(s, \mu) \in \partial\Omega \times [0, \varepsilon]$ (voir (2.6)).

La majoration uniforme de $\mathrm{TV}(\chi_\Sigma^n)$, et donc par la remarque précédente la majoration uniforme de $\mathrm{TV}(\chi_\Gamma^n)$, implique que la suite $(\chi_\Gamma^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compacte dans $L^1(\partial\Omega)$, (voir en annexe la proposition 3). En particulier il existe $\chi_\Gamma^* \in L^1(\partial\Omega)$ telle que :

$$\chi_\Gamma^n \overset{L^1(\partial\Omega)}{\longrightarrow} \chi_\Gamma^*.$$

On définit alors $\chi_\Sigma^*(s + \mu\vec{n}(s)) = \chi_\Gamma^*(s)$ pour tout $(s, \mu) \in \partial\Omega \times [0, \varepsilon]$. Puisqu'on a convergence forte de χ_Γ^n vers χ_Γ^* dans $L^1(\partial\Omega)$, en particulier on a convergence presque partout. Il s'ensuit que χ_Γ^* est dans $\mathcal{V}_L$, et donc $\chi_\Sigma^* \in \mathcal{U}_L$.

On écrit ensuite J comme une fonction de $\chi_\Gamma \in \mathcal{V}_L$:

$$\begin{aligned} J(\chi_\Gamma) &= \inf_{p_0\in\mathcal{K}} \int_{\partial\Omega} \chi_\Gamma(s)\gamma(p_0, s)ds - \gamma_4 \sup_{\|\varphi\|_\infty \leqslant 1} \int_{\partial\Omega} \chi_\Gamma(s)\,\mathrm{div}\,\varphi(s)ds \\ &= \inf_{p_0\in\mathcal{K}} \inf_{\|\varphi\|_\infty \leqslant 1} \int_{\partial\Omega} \chi_\Gamma(s)(\gamma(p_0)(s) - \gamma_4\ \mathrm{div}\,\varphi(s))\ ds, \end{aligned}$$

3. Voir en annexe la proposition 3.

avec

$$\gamma(p_0,s)=\gamma_1\int_0^T\int_0^\varepsilon (p(x_{s,\mu},t)-p_{obs}(x_{s,\mu},t))^2 d\mu dt+\gamma_2\int_0^T\int_0^\varepsilon \frac{\partial_t p(x_{s,\mu},t)^2}{\parallel p_0\parallel^2_{H^1(\Omega)}}\,d\mu dt.$$

où $x_{s,\mu}$ représente le point de $\widetilde{\partial\Omega}$ définit par $x_{s,\mu}=s+\mu\vec{n}(s)$, avec $(s,\mu)\in\partial\Omega\times[0,\varepsilon]$. Ainsi définie, J est semi-continue supérieurement pour la topologie de $L^1(\partial\Omega)$ comme infimum de fonctions linéaires en χ_Γ. La semi-continuité supérieure de J nous donne enfin

$$\limsup_{n\to+\infty} J(\chi_\Gamma^n)\leqslant J(\chi_\Gamma^*),$$

ce qui implique que l'élément $\chi_\Sigma^*\in\mathcal{U}_L$ issu de la surface χ_Γ^*, est un maximiseur de J. □

2.2.3 Système d'optimalité pour le problème $\mathcal{P}_\Sigma$

Pour pouvoir construire une suite minimisante approchée $(p_0^k)_{k\in\mathbb{N}}$ pour le problème à Σ fixé $(\mathcal{P}_\Sigma)$, on calcule la dérivée directionnelle en p_0 de J. Rappelons qu'on a bien la dérivabilité par rapport à p_0 de la fonctionnelle J dans toutes les directions (voir par exemple [BBHP14] pour un cas similaire). Pour plus de clarté, on notera dans cette partie $\omega=[0,T]\times\Sigma$. De même on se permet, lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, d'enlever les variables dans les différentes intégrandes.

Pour toute perturbation admissible $h\in H_0^1(\Omega)$ de p_0 (c'est-à-dire tout $h\in H_0^1(\Omega)$ tel que pour tout $\eta\leqslant\eta_0$, avec $\eta_0>0$, on a $(p_0+\eta h)\in\mathcal{K}$) on note $\langle D_{p_0}J(\chi_\Sigma,p_0),h\rangle$ la dérivée directionnelle de J dans la direction h en p_0. On a l'expression suivante :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\langle D_{p_0}J(\chi_\Sigma,p_0),h\rangle &= \gamma_1\int_\omega \dot{p}(p-p_{obs})dxdt-\gamma_2\frac{\displaystyle\int_\omega \partial_t p^2\,dxdt}{\parallel p_0\parallel^3_{H^1(\Omega)}}\langle p_0,h\rangle_{H_0^1(\Omega)}\\ &+ \frac{\gamma_2}{\parallel p_0\parallel^2_{H^1(\Omega)}}\int_\omega \partial_t\dot{p}\,\partial_t p\,dxdt+\gamma_3\langle p_0,h\rangle_{H^1(\Omega)}\end{aligned}$$

où $\dot{p}$ est l'unique solution du système

$$\begin{cases}\partial_{tt}\dot{p}(x,t)-\operatorname{div}(c(x)\nabla\dot{p}(x,t))=0 & \text{sur } \mathcal{B}\times[0,T],\\ \dot{p}(\cdot,0)=h(x) & \text{sur } \mathcal{B},\\ \partial_t\dot{p}(\cdot,0)=0 & \text{sur } \mathcal{B},\\ \dot{p}(x,t)=0 & \text{sur } \partial\mathcal{B}\times[0,T].\end{cases}\tag{2.20}$$

On pose

$$I_1 := 2\gamma_1 \int_\omega \dot{p}(p - p_{obs})dxdt + \frac{2\gamma_2}{\| p_0 \|^2_{H^1(\Omega)}} \int_\omega \partial_t\dot{p}\, \partial_t p\, dxdt,$$

Il s'agit dans la suite d'obtenir une expression de I_1 en fonction de h. La formule de Green-Riemann donne

$$\begin{aligned} I_1 &= 2\gamma_1 \int_\omega \dot{p}(p - p_{obs})dxdt + \frac{2\gamma_2}{\| p_0 \|^2_{H^1(\Omega)}} \left(- \int_\omega \dot{p}\, \partial_{tt} p\, dxdt + \int_\Sigma [\dot{p}\, \partial_t p]_0^T\, dx \right) \\ &= 2\int_0^T \int_\mathcal{B} \chi_\Sigma\, \dot{p} \left[\gamma_1(p - p_{obs}) - \frac{\gamma_2\, \partial_{tt} p}{\| p_0 \|^2_{H^1(\Omega)}} \right] dxdt + \frac{2\gamma_2}{\| p_0 \|^2_{H^1(\Omega)}} \int_\Sigma [\dot{p}\, \partial_t p]_0^T\, dx. \end{aligned}$$

On introduit la fonction q, définie comme l'unique solution du système adjoint suivant :

$$\begin{cases} \partial_{tt} q - \operatorname{div}(c(x)\nabla q) = \chi_\Sigma \left(\gamma_1(p - p_{obs}) - \frac{\gamma_2\, \partial_{tt} p}{\|p_0\|^2_{H^1(\Omega)}} \right), & \text{sur } [0,T] \times \mathcal{B}, \\ q = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{B}, \\ q(T,\cdot) = 0 & \text{sur } \mathcal{B}, \\ \partial_t q(T,\cdot) = -\frac{\gamma_2}{\|p_0\|^2_{H^1(\Omega)}} \partial_t p(T,\cdot)\chi_\Sigma & \text{sur } \mathcal{B}. \end{cases} \tag{2.21}$$

Ainsi on a (les termes en rouge s'annulent)

$$\begin{aligned} I_2 &:= \int_0^T \int_\mathcal{B} \chi_\Sigma\, \dot{p} \left[\gamma_1(p - p_{obs}) - \frac{\gamma_2\, \partial_{tt} p}{\| p_0 \|^2_{H^1(\Omega)}} \right] dxdt \\ &= \int_0^T \int_\mathcal{B} \dot{p}(\partial_{tt} q - \operatorname{div}(c(x)\nabla q))\, dxdt, \\ &= \int_0^T \int_\mathcal{B} (c(x)\langle \nabla q, \nabla \dot{p} \rangle - \partial_t q\, \partial_t \dot{p}) dxdt - \int_0^T \int_{\partial\mathcal{B}} c(x) \partial_n q\, \dot{p}\, dx d\mathcal{H}^{n-1}(x) \\ &+ \int_\mathcal{B} [\partial_t q\, \dot{p}]_0^T\, dx. \end{aligned}$$

Et par une nouvelle intégration par parties on a :

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_\mathcal{B} (c(x)\langle \nabla q, \nabla \dot{p} \rangle - \partial_t q\, \partial_t \dot{p}) dxdt \\ =&\int_0^T \int_\mathcal{B} (\partial_{tt}\dot{p} - \operatorname{div}(c(x)\nabla \dot{p}))q\, dxdt + \int_0^T \int_{\partial\mathcal{B}} c(x) q\, \partial_n \dot{p}\, d\mathcal{H}^{n-1}(x) dt - \int_\mathcal{B} [\partial_t \dot{p}\, q]_0^T\, dx. \end{aligned}$$

On a donc

$$I_2 = \int_0^T \int_{\partial\mathcal{B}} c(x) q\, \partial_n \dot{p}\, d\mathcal{H}^{n-1}(x) dt - \int_{\mathcal{B}} [\partial_t \dot{p}\, q]_0^T\, dx + \int_{\mathcal{B}} [\partial_t q\, \dot{p}]_0^T\, dx.$$

De sorte que finalement

$$\begin{aligned} I_1 &= 2\int_0^T \int_{\partial\mathcal{B}} c(x) q\, \partial_n \dot{p}\, d\mathcal{H}^{n-1}(x) dt - 2\int_{\mathcal{B}} [\partial_t \dot{p}\, q]_0^T\, dx \\ &+ 2\int_{\mathcal{B}} [\partial_t q\, \dot{p}]_0^T\, dx + \frac{2\gamma_2}{\| p_0 \|^2_{H^1(\Omega)}} \int_\Sigma [\dot{p}\, \partial_t p]_0^T\, dx \end{aligned}$$

En utilisant les conditions de bord et aux limites dans (2.21), $\partial_t p(0,x) = 0$ et $\partial_t \dot{p}(0,x) = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} I_1 &= 2\int_0^T \int_{\partial\mathcal{B}} c(x) q\, \partial_n \dot{p}\, d\mathcal{H}^{n-1}(x) dt - 2\int_{\mathcal{B}} [\partial_t \dot{p}\, q]_0^T\, dx \\ &+ 2\int_{\mathcal{B}} [\partial_t q\, \dot{p}]_0^T\, dx + \frac{2\gamma_2}{\| p_0 \|^2_{H^1(\Omega)}} \int_\Sigma [\dot{p}\, \partial_t p]_0^T\, dx \end{aligned}$$

En résumé, pour toute perturbation admissible h de p_0, on a

$$\tfrac{1}{2} \langle D_{p_0} J(\chi_\Sigma, p_0), h\rangle = -\int_{\mathcal{B}} \partial_t q(0,x) h(x) dx + \left(\gamma_3 - \gamma_2 \frac{\int_\omega \partial_t p^2\, dxdt}{\| p_0 \|^3_{H^1(\Omega)}}\right) \langle p_0, h\rangle_{H^1(\Omega)} \tag{2.22}$$

avec

$$(1)\quad \begin{cases} \partial_{tt} p(x,t) - \operatorname{div}(c(x)\nabla p(x,t)) = 0 & \text{sur } \mathcal{B}\times[0,T], \\ p(x,0) = p_0(x) \in \mathcal{K} & \text{sur } \mathcal{B}, \\ \partial_t p(x,0) = 0 & \text{sur } \mathcal{B}, \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \partial_{tt} q(x,t) - \operatorname{div}(c(x)\nabla q(x,t)) = \gamma_1 (p - p_{obs})(x,t)\chi_\Sigma(x) \\ \qquad -\dfrac{\gamma_2\, \partial_{tt} p(x,t)}{\| p_0 \|^2_{H^1(\Omega)}} \chi_\Sigma(x) & \text{sur } \mathcal{B}\times[0,T], \\ q(x,t) = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{B}\times[0,T], \\ q(x,T) = 0 & \text{sur } \mathcal{B}, \\ \partial_t q(x,T) = -\dfrac{\gamma_2}{\| p_0 \|^2_{H^1(\Omega)}} \partial_t p(x,T)\chi_\Sigma(x) & \text{sur } \mathcal{B}, \end{cases}$$

(2.23)

2.3 Applications Numériques

On s'intéresse dans cette partie à la mise en œuvre numérique des résultats précédents. Plus précisément on cherche à construire une approximation d'une suite minimisante $(p_0^k)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{K}^{\mathbb{N}}$ pour le problème à Σ fixé $(\mathcal{P}_\Sigma)$. Rappelons que les suites minimisantes du problème $(\mathcal{P}_\Sigma)$ possèdent les propriétés de convergence établies dans la proposition 4. La disposition de capteurs Σ choisie ici peut-être déterminée par exemple par un premier diagnostic, ou un calibrage moyen.

Une fois cette suite minimisante approchée construite jusqu'à un certain indice k^∞ suffisamment grand, $p_0^{k^\infty}$ constitue une solution approchée du problème de minimisation à Σ fixé $(\mathcal{P}_\Sigma)$. Puisque J est linéaire en Σ on obtient directement pour $p_0^{k^\infty}$ fixé la dérivée de J par rapport à χ_Σ. Cette dérivée fournit enfin une direction pertinente de déplacement des capteurs Σ pour effectuer une seconde mesure.

Notons qu'il existe évidemment une grande variété de processus possibles pour améliorer cette approche. On peut par exemple introduire un effet de mémoire sur le signal observé, d'une mesure sur l'autre, doublant par là, à chaque itération, la surface de capteurs disponible. On peut également, au lieu de proposer une direction de déplacement des capteurs, proposer une disposition explicite, il faut pour cela prendre en compte les diverses contraintes physiques sur le positionnement de Σ. Néammoins, la fonctionnelle J étant linéaire en χ_Σ, ces différentes approches sont relativement classiques. On laisse donc volontairement de côté le problème de la maximisation en χ_Σ pour se concentrer sur le problème de minimisation en p_0 à Σ fixé.

2.3.1 Reformulation de la pénalisation

On choisit de reformuler le problème $(\mathcal{P}_\Sigma)$ de la façon suivante. Considérons le problème

$$\inf_{p_0\in\mathcal{K}} G(p_0) := \int_0^T \int_{\mathcal{B}} \chi_\Sigma(x)(p_{[p_0]}(x,t) - p_{obs}(x,t))^2 dxdt, \qquad (\mathcal{Q}_\Sigma)$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} F_1(p_0) := \dfrac{\displaystyle\int_0^T \int_{\mathcal{B}} \chi_\Sigma(x)\partial_t p_{[p_0]}(x,t)^2 dxdt}{\| p_0 \|^2_{H^1(\Omega)}} \leqslant \varepsilon_1 \\ \\ F_2(p_0) := \| p_0 \|^2_{H^1(\Omega)} \leqslant \varepsilon_2 \end{cases} \qquad (\mathcal{C}_\mathcal{Q})$$

avec $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. On sait que pour un choix de paramètres $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ il existe des paramètres $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ tels que les problèmes $(\mathcal{Q}_\Sigma)$-$(\mathcal{C}_\mathcal{Q})$ et $(\mathcal{P}_\Sigma)$ sont équivalents (voir

par exemple [BNO+03]). Contrairement aux paramètres $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, les paramètres ε_1 et ε_2 ont un sens physique. En effet la valeur du paramètre ε_1 peut s'établir à partir d'une estimation du terme d'observabilité pour la disposition Σ initiale, et pour un profil moyen de la carte d'absorptivité. Cette valeur permet d'assurer que les capteurs reçoivent lors de l'expérience, au moins autant d'information que lors du calibrage. La valeur du paramètre ε_2 se déduit d'une part d'une estimation des propriétés d'absorptivité des tissus à imager et d'autre part du contraste que l'on désire imposer à la reconstruction.

2.3.2 Méthode primale-duale

Pour construire une approximation d'une suite minimisante pour le problème $(\mathcal{Q}_\Sigma)$-$(\mathcal{C}_\mathcal{Q})$, on utilise une méthode primale-duale, faisant intervenir le système d'optimalité étudié dans la section (2.2.3). On introduit le Lagrangien augmenté associé au problème $(\mathcal{Q}_\Sigma)$-$(\mathcal{C}_\mathcal{Q})$, défini sur $\mathcal{K} \times (\mathbb{R}_+)^2$ par

$$\mathcal{L}_r(p_0, \lambda) = G(p_0) + \lambda(F(p_0) - \varepsilon) + \frac{r}{2} \left| (F(p_0) - \varepsilon)^+ \right|^2, \tag{2.24}$$

avec $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, $F = (F_1, F_2)$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, et où $r \in \mathbb{R}_+$ est un paramètre à fixer. La notation f^+ désigne $\max(f, 0)$.

D'après le théorème de Karush Kuhn et Tucker (voir par exemple [FG00, Han86]), si p_0^* est solution du problème d'optimisation $(\mathcal{Q}_\Sigma)$-$(\mathcal{C}_\mathcal{Q})$, alors il existe un couple de réels $(\lambda^*) \in (\mathbb{R}_+)^2$ tel que (p_0^*, λ^*) est un point selle du Lagrangien $\mathcal{L}_r$, au sens

$$\mathcal{L}_r(p_0^*, \lambda^*) = \max_{\lambda \in (\mathbb{R}_+^*)^2} \min_{p_0 \in \mathcal{K}} \mathcal{L}_r(p_0, \lambda).$$

Dans ce qui suit, il s'agit de déterminer numériquement des approximations des points selles de $\mathcal{L}_r$. On implémente l'algorithme d'Uzawa, pour ce problème. Il existe beaucoup d'algorithmes plus récents et plus performants pour produire des solutions approchées du système $(\mathcal{Q}_\Sigma)$-$(\mathcal{C}_\mathcal{Q})$, néanmoins le propos de cette partie est d'illustrer et valider par des simulations numériques, le modèle proposé dans ce chapitre.

Soit à considérer l'algorithme suivant :

$$\begin{array}{lll} \text{Initialisation :} & & \lambda_0 \in \mathbb{R}_+ \\ \text{Itération } k \in [\![0, k^\infty]\!] : & 1. & \mathcal{L}_r(p_0^k, \lambda^k) = \min\limits_{p_0 \in \mathcal{K}} \mathcal{L}_r(p_0, \lambda^k) \\ & 2. & \lambda^{k+1} = \max\left(0, \lambda^k + \mu F(p_0^k)\right) \end{array} \tag{2.25}$$

où $\mu \in \mathbb{R}_+^*$ désigne le pas fixe dans l'étape de maximisation en λ. La valeur affectée à ce paramètre sera précisée plus loin.

Détail de l'étape de minimisation en p_0. Pour implémenter l'étape de minimisation en p_0, on procède par descente de gradient. En effet, $p_0^k \in \mathcal{K}$ est caractérisé par

$$\left\langle D_{p_0}\mathcal{L}_r(p_0^k, \lambda^k), q_0 \right\rangle \geqslant 0, \quad \forall q_0 \in \mathcal{K}.$$

Par ailleurs, d'après (2.24) on a pour tout $q_0 \in \mathcal{K}$

$$\begin{aligned}\left\langle D_{p_0}\mathcal{L}_r(p_0^k, \lambda^k), q_0 \right\rangle &= \Big\langle D_{p_0}G(p_0^k) + (\lambda_1^k + r(F_1(p_0^k) - \varepsilon_1)^+)\, D_{p_0}F_1(p_0^k) \\ &\quad +(\lambda_2^k + r(F_2(p_0^k) - \varepsilon_2)^+)\, D_{p_0}F_2(p_0^k), q_0 \Big\rangle .\end{aligned}$$

Cette dérivée directionnelle coïncide avec $\langle D_{p_0}J(\chi_\Sigma, p_0^k), q_0\rangle$ pour le jeu de paramètres $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (1, \lambda_1 + r(F_1(p_0^k) - \varepsilon_1)^+, \lambda_2 + r(F_2(p_0^k) - \varepsilon_2)^+)$ (voir section 2.2.3). D'après l'expression (2.22) de $\langle D_{p_0}J(\chi_\Sigma, p_0^k), q_0\rangle$ on a

$$\begin{aligned}\left\langle D_{p_0}\mathcal{L}_r(p_0^k, \lambda^k), q_0 \right\rangle &= -\int_{\mathcal{B}} \partial_t q^k(0,x) q_0(x) dx + \Bigg((\lambda_2^k + r(F_2(p_0^k) - \varepsilon_2)^+) \\ &- (\lambda_1^k + r(F_1(p_0^k) - \varepsilon_1)^+)\, \frac{\int_\omega (\partial_t p^k)^2\, dxdt}{\| p_0^k \|_{H^1(\Omega)}^3} \Bigg) \langle p_0^k, q_0\rangle_{H^1(\Omega)}\end{aligned}$$

où p^k et q^k sont les solutions du système (2.23) associées à la condition initiale p_0^k. Dans toute la suite on définit la norme sur $H^1(\Omega)$ (et donc le produit scalaire correspondant) suivante

$$\forall f \in H^1(\Omega), \quad \| f \|_{H^1(\Omega)}^2 = \| f \|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau \| \nabla f \|_{L^2(\Omega)}^2 \tag{2.26}$$

avec $\tau \in \mathbb{R}_+$. On précisera plus loin la valeur de ce paramètre ainsi que son rôle dans les simulations numériques. On a enfin

$$\begin{aligned}\left\langle D_{p_0}\mathcal{L}_r(p_0^k, \lambda^k), q_0 \right\rangle &= -\int_{\mathcal{B}} \partial_t q^k(0,x) q_0(x) dx + \Bigg((\lambda_2^k + r(F_2(p_0^k) - \varepsilon_2)^+) \\ &- (\lambda_1^k + r(F_1(p_0^k) - \varepsilon_1)^+)\, \frac{\int_\omega (\partial_t p^k)^2\, dxdt}{\| p_0^k \|_{H^1(\Omega)}^3} \Bigg) \int_{\mathcal{B}} (p_0^k(x) - \tau \Delta p_0^k(x)) q_0(x) dx\end{aligned}$$

On décide d'implémenter pour $\mathcal{L}_r(\cdot, \lambda^k)$ une méthode de descente de gradient à pas fixe $\Theta \in \mathbb{R}_+$, avec un nombre $l^\infty \in \mathbb{N}$ d'itérations. Le but est d'obtenir une solution $p_0^{k,l^\infty} \in \mathcal{K}$ telle que $\mathcal{L}_r(p_0^{k,l^\infty}, \lambda^k)$ approche la valeur $\inf_{p_0 \in \mathcal{K}} \mathcal{L}_r(p_0, \lambda_k)$. Cette méthode

est décrite ci-dessous :

- **Initialisation** : $p_0^{k,0} = p_0^{k-1}$.
- **Itération** $l \in [\![0, l^\infty]\!]$:

  1. $q_0^{k,l+1} = p_0^{k,l} + \Theta \left[- \partial_t q_{k,l}(0,\cdot) + \left((\lambda_2 + r(F_2(p_0^{k,l}) - \varepsilon_2)^+) \right.\right.$

  $$\left.\left. - (\lambda_1 + r(F_1(p_0^{k,l}) - \varepsilon_1)^+) \frac{\int_0^T \int_\Sigma \partial_t p_{k,l}(x,t)^2 dx\, dt}{\| p_0^{k,l} \|^3_{H^1(\Omega)}} \right) (p_0^{k,l} - \tau \Delta p_0^{k,l}) \right] \quad (2.27)$$

     où $p_{k,l}$ et $q_{k,l}$ sont les solutions du système (2.23) associées à la condition initiale $p_0^{k,l}$.

  2. $p_0^{k,l+1} = \Pi_{\mathcal{K}}(q_0^{k,l+1})$, où $\Pi_{\mathcal{K}}$ représente la projection sur le convexe $\mathcal{K}$ dans $H_0^1(\mathcal{B})$.

- **Sortie** : $p_0^k = p_0^{k,l^\infty}$.

2.3.3 Mise en œuvre numérique

On met en œuvre dans des cas simples de domaines Ω en dimension 2, l'algorithme d'Uzawa (2.25), exposé dans la section précédente. Pour la deuxième étape (de minimisation de $\mathcal{L}_r$ par rapport à p_0) on utilise en espace une méthode d'éléments finis pour approcher $q_0^{k,l+1}$, la solution de l'équation (2.27). On choisit une base d'éléments finis triangulaires P2. Par ailleurs, $p^{k,l}$ et $q^{k,l}$ sont obtenus en discrétisant le système (2.23), et en procédant par différences finies en temps et éléments finis en espace. Cette méthode est implémentée à l'aide du logiciel FreeFem+++ (voir par exemple [Hec12]).

Dans l'exemple suivant Ω est une ellipse, et on se fixe une disposition de capteurs Σ ainsi qu'une condition initiale générant le signal p_{obs}. Ces différents éléments sont représentés dans la figure 2.6.

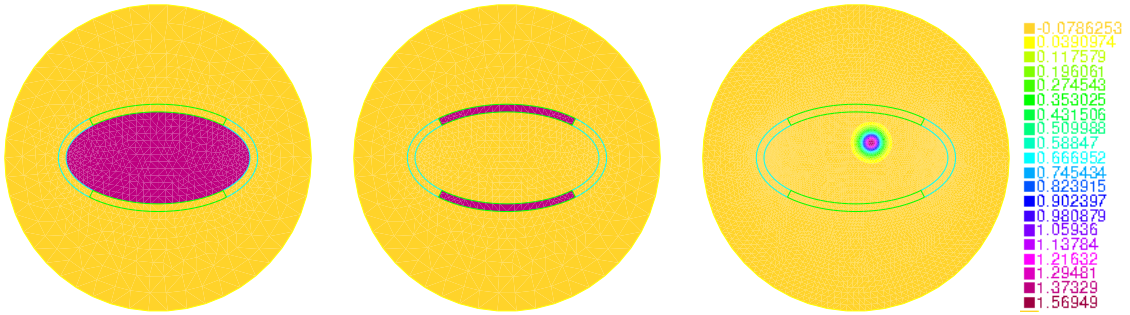


FIGURE 2.6 – Représentations du domaine Ω, du domaine Σ (ces domaines sont représentés en rouge), et de la condition initiale à reconstruire.

On implémente l'algorithme (2.25) décrit dans la section précédente, en posant $\mu = r = 0.3$ (on pourra se rapporter à [FG00] pour plus de précisions sur la détermination de ces paramètres), $\Theta = 0.01$, et $\tau = 10^{-4}$. Le paramètre τ est volontairement choisi très petit afin de limiter l'instabilité que cause le terme $\Delta p_0^{k,l}$, dans l'équation (2.27).

Les résultats de cette implémentation, pour $\varepsilon_1 = 7.10^{-2}$ et $\varepsilon_2 = 1.5$ sont résumés dans la figure 2.7. On pourra trouver plus bas une brève analyse de sensibilité de l'algorithme aux paramètres ε_1 et ε_2 (voir la figure 2.8).

Enfin posons $\gamma_4 = 0$. Soit $a \in \mathcal{U}_L^*$ et $h \in \mathcal{U}_L^*$ une perturbation admissible de a (c'est-à-dire telle que pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit $(a + \varepsilon h) \in \mathcal{U}_L^*$), alors on a (par linéarité de J en a, voir (2.18))

$$D_a J(a, p_0) = \int_{\mathcal{B}} h(x) \int_0^T \left(\gamma_1 (p_{[p_0]}(x,t) - p_{obs}(x,t))^2 + \gamma_2 \frac{(\partial_t p_{[p_0]}(x,t))^2}{\| p_0 \|^2_{H^1(\Omega)}} \right) dt\, dx$$

Par conséquent, dans toute la suite, ce qu'on appelle (abusivement) *« Dérivée de J par rapport à χ_Σ à $p_0 = p_0^{k^\infty}$ fixée »*, consiste en la quantité suivante :

$$D_{\chi_\Sigma} J(\chi_\Sigma, p_0^{k^\infty}) := \chi_{\widetilde{\partial\Omega}}(\cdot) \int_0^T \left((p^{k^\infty}(\cdot,t) - p_{obs}(\cdot,t))^2 + \gamma_2 \frac{(\partial_t p^{k^\infty}(\cdot,t))^2}{\| p_0^{k^\infty} \|^2_{H^1(\Omega)}} \right) dt,$$

avec $\gamma_2 = \lambda_1^{k^\infty} + r(F_1(p_0^{k^\infty}) - \varepsilon_1)^+$.

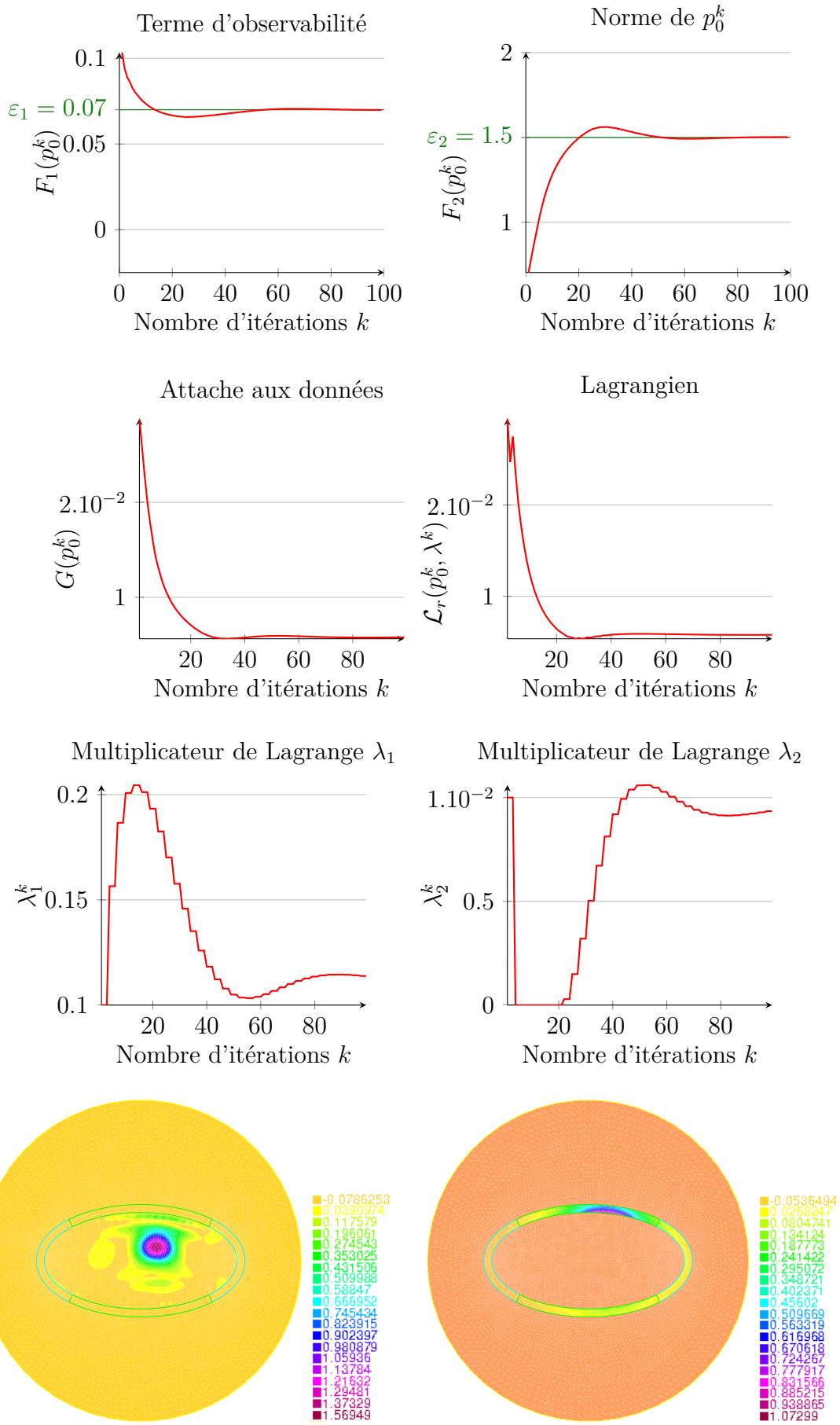


Figure 2.7 – Résultats de l'algorithme d'Uzawa pour le Lagrangien augmenté. En bas : A gauche, la solution $p_0^{k^\infty}$ obtenue. A droite, la dérivée de J par rapport à χ_Σ à $p_0 = p_0^{k^\infty}$ fixée.

La tableau 2.8 décrit les variations des termes $G(p_0^{k^\infty})$, $F_1(p_0^{k^\infty})$ et $F_1(p_0^{k^\infty})$ par rapport aux paramètres ε_1 et ε_2. Les valeurs indiquées sont obtenues pour $k^\infty = 100$. Les domaines Ω et Σ, le signal p_{obs} et les paramètres r, μ, Θ et τ sont les mêmes que pour la simulation précédente.

ε_1	ε_2	$G(p_0^{k^\infty})$	$F_1(p_0^{k^\infty})$	$F_1(p_0^{k^\infty})$	$\lambda_1^{k^\infty}$	$\lambda_2^{k^\infty}$
2.10^{-2}	1.5	$2,87.10^{-2}$	$2,0.10^{-2}$	$1,50$	$9,36.10^{-1}$	$1,09.10^{-2}$
7.10^{-2}	1.5	$5,8.10^{-3}$	$7,0.10^{-2}$	1.50	$1,14.10^{-1}$	$9,30.10^{-3}$
$1,2.10^{-1}$	1.5	$4,7.10^{-3}$	$7,9.10^{-2}$	1.50	0	$1,45.10^{-2}$
$1,7.10^{-1}$	1.5	$4,7.10^{-3}$	$7,9.10^{-2}$	1.50	0	$1,45.10^{-2}$
7.10^{-2}	1	$2,0.10^{-2}$	$7,0.10^{-2}$	$1,00$	$1,76.10^{-1}$	$3,16.10^{-2}$
7.10^{-2}	3	4.10^{-4}	$6,0.10^{-2}$	2.21	0	0
7.10^{-2}	5	4.10^{-4}	$6,0.10^{-2}$	2.21	0	0

FIGURE 2.8 – Analyse de sensibilité aux paramètres ε_1 et ε_2.

Dans la suite on présente les résultats obtenus pour d'autres domaines Ω, d'autres dispositions de capteurs Σ ou d'autres signaux observés p_{obs}.

Dans un premier temps on ne change que la condition initiale à reconstruire.

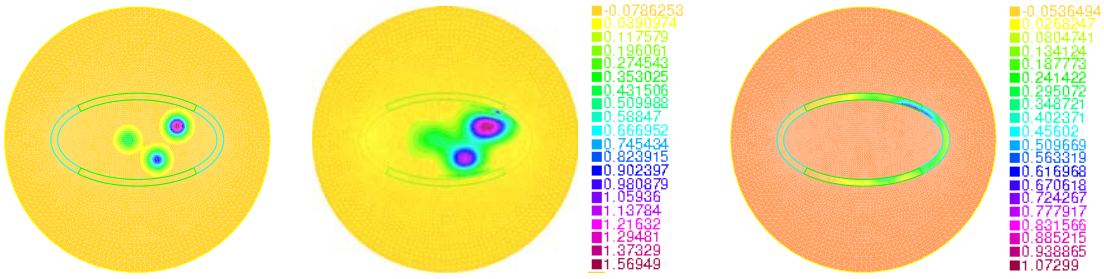


FIGURE 2.9 – De gauche à droite : la condition initale à reconstruire, la solution $p_0^{k^\infty}$ obtenue (échelles identiques), et la dérivée de J par rapport à χ_Σ à $p_0 = p_0^{k^\infty}$ fixée.

On change maintenant la disposition de capteurs Σ.

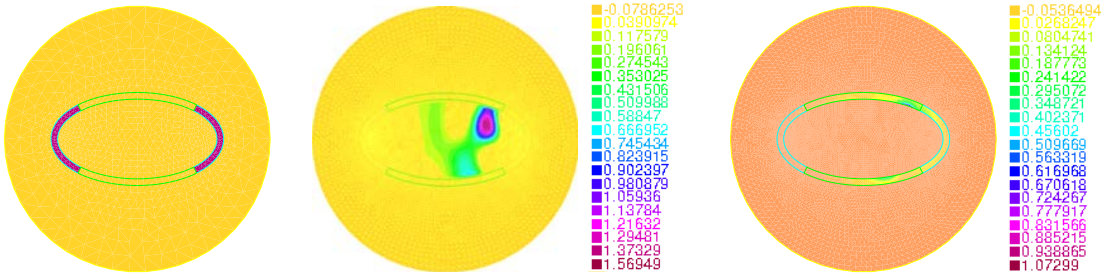


Figure 2.10 – De gauche à droite : la disposition de capteurs Σ (en rouge), la solution $p_0^{k^\infty}$ obtenue, et la dérivée de J par rapport à χ_Σ à $p_0 = p_0^{k^\infty}$ fixée.

On considère dans la suite le domaine Ω, ainsi que les dispositions de capteurs Σ_1 et Σ_2, représentés dans la figure suivante.

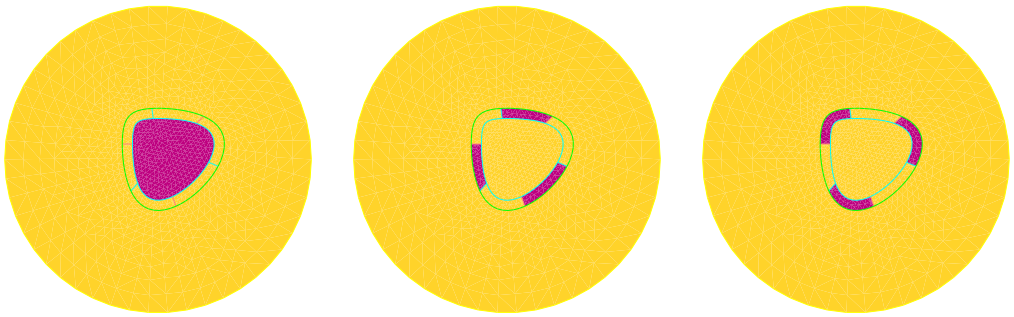


Figure 2.11 – De gauche à droite et en rouge : le domaine Ω, les dispositions de capteurs Σ_1 et Σ_2.

Pour le choix de disposition de capteurs Σ_1, la figure représente la solution approchée et la direction optimale de déplacement des capteurs pour deux conditions initiales à reconstruire.

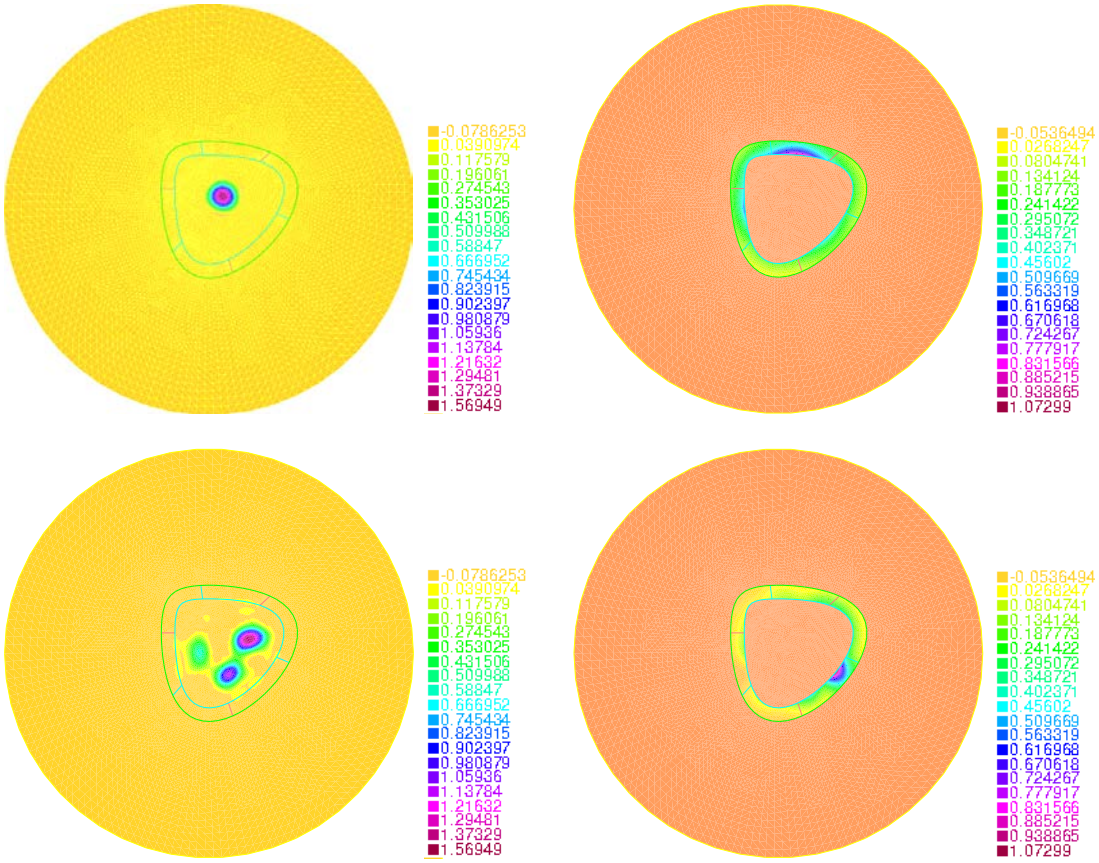


FIGURE 2.12 – Résultats obtenus avec la disposition de capteurs Σ_1. A gauche, la solution $p_0^{k^\infty}$ obtenue. A droite, la dérivée de J par rapport à χ_Σ à $p_0 = p_0^{k^\infty}$ fixée.

Enfin, la figure suivante représente les mêmes résultats, obtenus pour la disposition de capteurs Σ_2

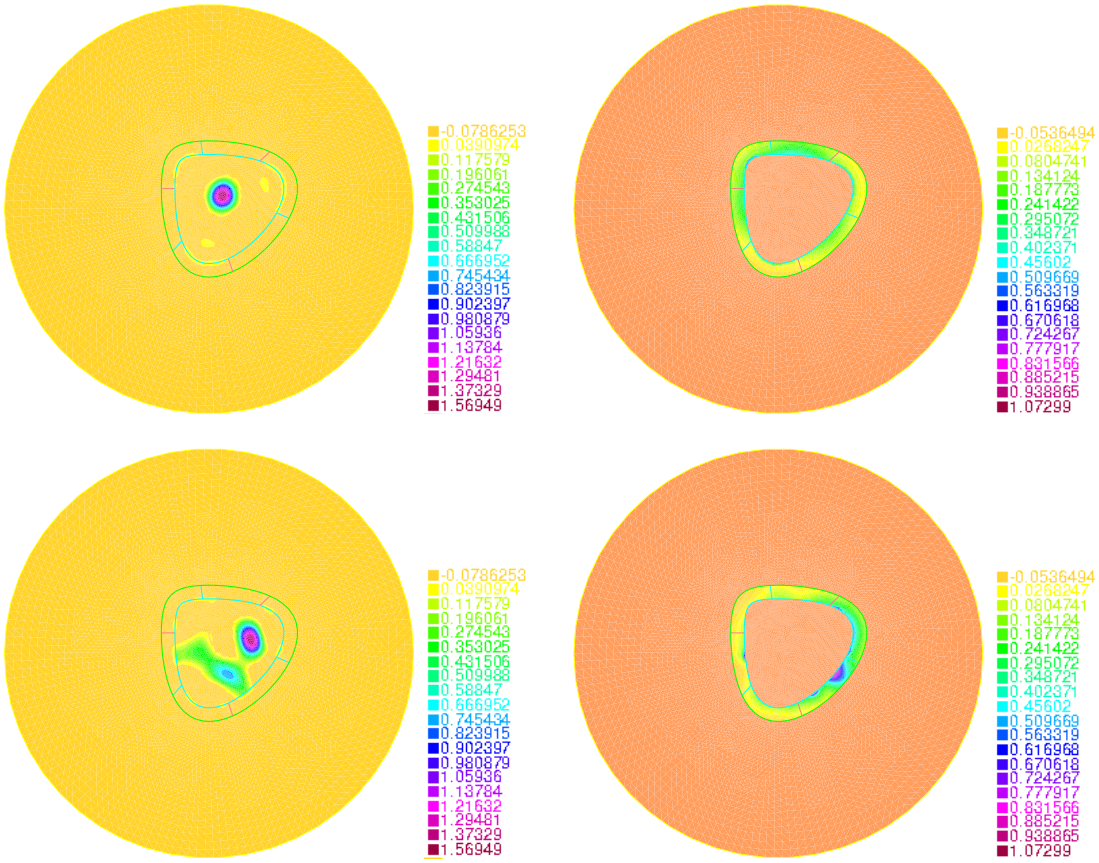


Figure 2.13 – Résultats obtenus avec la disposition de capteurs Σ_2. A gauche, la solution $p_0^{k^\infty}$ obtenue. A droite, la dérivée de J par rapport à χ_Σ à $p_0 = p_0^{k^\infty}$ fixée.

Conclusion

Nous avons traité dans cette thèse de l'optimisation de la forme des zones d'observation frontière pour l'équation des ondes. L'objectif initial de cette étude est de répondre à la question de la maximisation de la constante d'observabilité par rapport au domaine d'observation. Cette question se retrouve naturellement dans quantités de domaines appliqués. En effet, on a vu que la constante d'observabilité rend compte du caractère bien posé du problème inverse associé. C'est donc à la problématique du positionnement optimal de capteurs pour la résolution de problèmes inverses, que cette étude tente de répondre.

Néanmoins certains obstacles théoriques rendent particulièrement complexe l'étude de la constante d'observabilité. On considère alors, dans un premier temps, une version *randomisée* de la constante d'observabilité. Ce nouveau critère, introduit dans [PTZ12], et qui fait suite aux récents travaux [BT08a], constitue une réponse adaptée à ces obstacles. D'une part la procédure de sélection aléatoire des conditions initiales, qui aboutit à la constante d'observabilité *randomisée*, se justifie tout-à-fait du point de vue applicatif lorsqu'on peut faire un grand nombre de mesures, et d'autre part, l'introduction de ce critère permet de formuler une réponse positive à la question de l'optimisation du placement des capteurs.

Comme dans [PTZ13b, PTZ12] pour le cas d'observations à l'intérieur du domaine, on étudie dans un premier temps une version relaxée du problème d'optimisation. Cette relaxation permet d'obtenir sous certaines hypothèses la valeur optimale du critère objectif, un resultat d'existence de solutions, ainsi que l'expression explicite de certaines d'entre-elles (solutions dites *de Rellich*). Notons par ailleurs que, contrairement au cas de l'observabilité intérieure, les solutions de Rellich du problème relaxé ne sont pas constantes sur le bord et les caractéristiques géométriques du domaine Ω (diamètre, volume, périmètre, etc...) apparaissent naturellement dans l'expression de ces solutions. Ces résultats fournissent donc une première réponse au problème du positionnement optimal de capteurs. Il est intéressant de noter également que ces solutions de Rellich semblent jouer un rôle particulier dans la maximisation du critère randomisé. En effet, on constate expérimentalement que lorsque

ces fonctions cessent d'être admissibles, la valeur optimale du problème d'optimisation change de comportement. L'analyse de ce phénomène reste ouverte et pourrai constituer un axe de recherche futur. Enfin le théorème de No-Gap, inspiré des travaux [PTZ13b, PTZ12] établit l'égalité des valeurs optimales du problème sous sa forme relaxée et du problème initial. Néanmoins, si ce théorème permet de construire des suites maximisantes de dispositions de capteurs, il n'existe généralement pas de solution au problème sous sa forme initiale. Dans la suite de cette étude on propose deux manières de simplifier le problème de façon à obtenir l'existence de solutions, autrement dit l'existence de dispositions optimales de capteurs, utilisables dans la pratique.

Dans un premier temps on étudie une version tronquée en fréquences de la constante d'observabilité randomisée. En d'autres termes on ne considère qu'un nombre fini de modes propres dans la décomposition spectrale des solutions de l'équation des ondes. L'intérêt d'une telle restriction est de conformer la recherche de dispositions optimales de capteurs avec la réalité de l'usage pratique, où n'est généralement pris en compte qu'un nombre fini de ces modes propres. On obtient pour le problème tronqué en fréquences, un résultat générique d'existence et d'unicité de la solution. Par ailleurs un résultat de Γ-convergence explicite la proximité de la valeur optimale du problème tronqué avec celle du problème sous sa forme initiale.

Dans un second temps on tente d'appliquer les résultats précédents au cas particulier de la tomographie photoacoustique, un procédé d'imagerie médicale non invasif prometteur. Outre l'intérêt intrinsèque d'une application de ces travaux au milieu biomédical, cette seconde étude permet de proposer une modélisation, dans un cadre pratique précis, avec ses contraintes et limitations, de l'influence de la disposition des capteurs sur la qualité de l'image reconstruite. Encore une fois, afin d'obtenir un résultat d'existence d'une disposition optimale de capteurs, on doit imposer plusieurs régularisations. Il s'agit comme précédemment de choisir les hypothèses les moins restrictives possibles, pour laisser libre l'espace des formes admissibles. Ceci explique par exemple l'introduction d'espaces de fonctions à variations bornées.

De manière générale, les travaux initiés dans cette thèse ouvrent la question de l'influence de la constante d'observabilité sur l'efficacité d'une disposition de capteurs. Plus précisément, le choix d'un domaine d'application et d'un cadre pratique conditionne très fortement la modélisation de cette influence. Par conséquent les possibilités d'applications et d'adaptations de ces travaux sur l'optimisation des zones d'observation sont très larges. Mentionnons à titre d'exemple des travaux initiés en collaboration avec G. Chardon (Centrale Supelec) et T.Nowakowski (Institut Langevin) concernant la répartition de points d'échantillonnages sur la frontière optimisant

la stabilité de la reconstruction numérique des solutions de l'équation d'Helmoltz. Ces travaux, appliqués à la mécanique acoustique, font suite à [CCD13], où est étudiée l'influence de ces points d'échantillonnages selon qu'ils sont placés à l'intérieur ou sur le bord du domaine où il faut reconstruire la solution. De manière générale, la comparaison entre l' observabilité à l'intérieur et l'observabilité sur la frontière constitue également un champ d'investigation ouvert et une piste de recherche future.

Annexe A

Rappels Théoriques

A.1 Topologie

A.1.1 Principes généraux

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, ouvert borné de frontière Lipschitz.

Mesure de Hausdorff : Dans un premier temps, on rappelle qu'on peut munir la variété $\partial\Omega$, de la certaine mesure de Hausdorff.

Défintion 1. *Soit $k \in [0, +\infty]$ et $A \subset \mathbb{R}^n$. La mesure de Hausdorff k-dimensionnelle est donnée par la formule*

$$\mathcal{H}^k(A) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^k_\delta(A)$$

où, pour $0 < \delta \leqslant \infty$, $\mathcal{H}^k_\delta(A)$ est définie par

$$\mathcal{H}^k_\delta(A) = \frac{\omega_k}{2^k} \inf \left\{ \sum_{i \in I} |\operatorname{diam}(A_i)| \leqslant \delta, A \subset \bigcup_{i \in I} A_i \right\}$$

pour tout recouvrement fini $(A_i)_{i \in I}$, et où $\operatorname{diam}(A_i)$ désigne le diamètre de l'ouvert A_i, et w_k est un facteur de normalisation[1]*. De manière générale, on appelle dimension de Hausdorff d'un ensemble A la quantité*

$$\mathcal{H}(A) = \inf\{k \geqslant 0, \mathcal{H}^k(A) = 0\}.$$

Proposition 1. *On a les propriétés suivantes :*

1. *$\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}^k$ est une mesure dans $\mathbb{R}^n$.*

1. Plus précisément $\omega_k = \pi^{k/2}\Gamma(1 + k/2)$ où Γ est la focntion Gamma. Notons par ailleurs que si k est un entier ω_k coïncide avec la mesure de Lebesgue de la boule unité de $\mathbb{R}^k$.

2. *$\mathcal{H}^n$ coïncide avec la mesure de Lebesgue.*
3. *Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, et $k \in \mathbb{N}$, si A est une variété $\mathcal{C}^1$ de dimension k dans $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{H}^k(A)$ est la mesure classique de A héritée de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^k$.*

Ainsi, pour tout domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de régularité $\mathcal{C}^1$, on peut munir le bord $\partial\Omega$ de la mesure $\mathcal{H}^{n-1}$. Pour tout sous-ensemble $\Gamma \subset \partial\Omega$, on dira que Γ est mesurable s'il est $\mathcal{H}^{n-1}$-mesurable. Par ailleurs, si Γ constitue également une variété $\mathcal{C}^1$ (de dimension $k-1$) alors $\mathcal{H}^{n-1}(\Gamma)$ coïncide avec l'aire de Γ au sens usuel. Par extension on peut également définir les ensembles de Lebesgue $L^p(\partial\Omega)$, pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Soit $L \in [0,1]$, posons

$$\mathcal{U}_L := \left\{ a \in L^\infty(\partial\Omega),\ a(a-1) = 0,\ \int_{\partial\Omega} a(x) d\mathcal{H}^{n-1} = L\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) \right\}.$$

On rappelle le résultat suivant (voir par exemple [HP06]) :

Proposition 2. *L'adhérence de l'ensemble $\mathcal{U}_L$ pour la topologie faible étoile de $L^\infty(\partial\Omega)$ est donné par*

$$\overline{\mathcal{U}_L} := \overline{\mathrm{conv}(\mathcal{U}_L)} = \left\{ a \in L^\infty(\partial\Omega),\ 0 \leqslant a \leqslant 1,\ \int_{\partial\Omega} a(x) d\mathcal{H}^{n-1} = L\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) \right\},$$

C'est-à-dire que $\overline{\mathcal{U}_L}$ est l'enveloppe convexe de $\mathcal{U}_L$ pour cette topologie.

Notons au passage que $\overline{\mathcal{U}_L}$ est un compact pour la topologie faible étoile de $L^\infty(\partial\Omega)$.

Γ-convergence : Comme on l'a vu dans l'introduction, on exposera certains résultats de Γ-convergence. Rappelons brièvement ici la notion de Γ-convergence au sens de De Giorgi, que nous utilisons, ainsi que certaines propriétés utiles.

Défintion 2. *Soit $(J, (J_k))$ une suite de fonctionnelles réelles définies sur un espace métrique X. On dit que J_k Γ-converge vers J si pour tout $x \in X$ on a :*

(i) $\forall x_k \to x, \quad J(x) \leqslant \liminf J_k(x_k)$,

(ii) $\exists x_k \to x, \quad J(x) \geqslant \limsup J_k(x_k)$.

On a alors le résultat suivant (voir [HP06])

Théorème 1 (De Giorgi)**.** *Soit J_k une suite de fonctionnelles minorées, qui Γ-converge vers une fonctionnelle J. Supposons qu'il existe une suite ε_k de réels positifs, tendant vers 0 et une suite x_k relativement compacte telles que*

$$J(x_k) \leqslant \inf J_k + \varepsilon_k.$$

Alors

1. *J admet un minimum et* $\min J = \lim_{k\to+\infty} \inf J_k$.
2. *Toute valeurs d'adhérence de la suite x_k réalise le minimum de J.*

Dans le paragraphe qui suit on introduit les espaces BV (voir par exemple [AK06]), qui seront utiles dans le dernier chapitre.

Espaces BV **:** Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, et u une fonction de $L^1(\Omega)$. On note

$$\mathrm{TV}(u) = \sup\left\{\int_\Omega u(x)\ \mathrm{div}\,\phi(x)\,dx; \phi = (\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n) \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)^n, \parallel \phi \parallel_{L^\infty(\Omega)} \leqslant 1\right\}$$

où $\mathrm{div}\,\phi = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial \phi_i}{\partial x_i}$.

Défintion 3. *On définit l'espace* $\mathrm{BV}(\Omega)$ *des fonctions à variations bornées, c'est-à-dire :*

$$\mathrm{BV}(\Omega) = \left\{u \in L^1(\Omega); \mathrm{TV}(u) < \infty\right\};$$

Cet espace est naturellement muni de la norme

$$\parallel u \parallel_{\mathrm{BV}(\Omega)} = \parallel u \parallel_{L^1(\Omega)} + \mathrm{TV}(u)$$

qui en fait un espace de Banach.

Par ailleurs cet espace possède un certain nombre de propriétés dont certaines sont rappelées dans la proposition suivante.

Proposition 3.

1. *La fonction* TV *est semi-continue sur l'espace* $\mathrm{BV}(\Omega)$*, au sens suivant : soit* $(u_j)_{\mathbb{N}} \in \mathrm{BV}(\Omega)^{\mathbb{N}}$*, telle que* $u_j \underset{L^1(\Omega)}{\longrightarrow} u$*, alors*

$$\mathrm{TV}(u) \leqslant \liminf_{j\to+\infty} \mathrm{TV}(u_j).$$

2. *Si Ω est supposé de régularité $\mathcal{C}^1$, l'opérateur de trace* $\mathrm{tr} : u \to u|_{\partial\Omega}$ *défini de* $\mathrm{BV}(\Omega)$ *dans* $L^1(\partial\Omega, \mathcal{H}^{n-1})$ *est linéaire et continu pour la topologie forte. $\mathcal{H}^{n-1}$ désigne la mesure de Hausdorff $n-1$ dimensionnelle définie plus haut.*
3. *La topologie forte sur* $\mathrm{BV}(\Omega)$*, n'a pas les propriétés de compacité attendues. Ainsi on utilise plus souvent une topologie faible-étoile sur* $\mathrm{BV}(\Omega)$ *définie par*

$$u_j \overset{*}{\rightharpoonup} u \Leftrightarrow u_j \underset{L^1(\Omega)}{\to} u \text{ et } Du_j \overset{*}{\underset{M}{\rightharpoonup}} Du,$$

où $Du_j \overset{*}{\underset{M}{\rightharpoonup}} Du$*, désigne* $\int_\Omega u_j(x)\,\mathrm{div}\,\phi(x)\,dx \to \int_\Omega u(x)\,\mathrm{div}\,\phi(x)\,dx$ *pour tout* $\phi \in \mathcal{C}_0(\Omega)^n$.

4. *Pour la topologie faible-étoile définie ci-dessus on a le résultat de compacité suivant : Toute suite u_j de $\mathrm{BV}(\Omega)$ uniformément bornée est relativement compacte dans $L^p(\Omega)$, pour $1 \leqslant p \leqslant n/(n-1)$. Par ailleurs il existe une sous-suite de u_j et un élément u de $\mathrm{BV}(\Omega)$ tels que $u_j \overset{*}{\rightharpoonup} u$.*

La remarque suivante est particulièrement importante pour ce qui va suivre.

Remarque 1. *Si $u = \chi_A$, la fonction caractéristique de $A \subset \mathbb{R}^n$, et si ∂A est suffisamment régulière, alors $\mathrm{TV}(u) = \mathrm{Per}_\Omega(A)$, qui coïncide avec la longueur usuelle si $n = 2$ ou l'aire d'une surface si $n = 3$.*

On termine cette section par quelques résultats de convergence :

Soit X une variable aléatoire et soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires sur un espace de probabilités $(\mathcal{A}, \mathbb{P})$, toutes à valeurs dans le même espace métrique (E, d). Rappelons le théorème, dit Porte-manteau :

Théorème 2. *Les cinq assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *X_n converge en loi vers X ;*
2. *Pour toute fonction φ bornée et uniformément continue sur E,*

$$\lim_n \mathbb{E}\left[\varphi(X_n)\right] \;=\; \mathbb{E}\left[\varphi(X)\right] ;$$

3. *Pour tout fermé F de E,*

$$\limsup_n \mathbb{P}\left(X_n \in F\right) \;\leq\; \mathbb{P}\left(X \in F\right) ;$$

4. *Pour tout ouvert O de E,*

$$\liminf_n \mathbb{P}\left(X_n \in O\right) \;\geq\; \mathbb{P}\left(X \in O\right) ;$$

5. *Pour tout borélien A de E tel que $\mathbb{P}\left(X \in \partial A\right) = 0$,*

$$\lim_n \mathbb{P}\left(X_n \in A\right) \;=\; \mathbb{P}\left(X \in A\right).$$

Rappelons enfin la définition de la convergence au sens vague. Soit X un espace métrique compact, on note $\mathcal{M}(X)$ l'ensemble des mesures positives finies sur X, et $\mathcal{C}^0(X)$ l'ensemble des fonctions continues sur Ω. La topologie vague est la topologie la moins fine sur $\mathcal{M}(X)$ rendant continues les applications

$$\mu \mapsto \int_X f(x)\mu(x)dx, \quad \text{avec } f \in \mathcal{C}^0(X).$$

En particulier $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vaguement vers μ si et seulement si

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(X), \quad \lim_{k\to+\infty} \int_X f(x)\mu_k(x)dx = \int_X f(x)\mu(x)dx. \tag{A.1}$$

Ceci s'applique en particulier pour l'espace métrique $X = (\partial\Omega, \mathcal{H}^{n-1})$.

A.1.2 Outils d'optimisation

Le théorème suivant, dû à Danskin dans [Dan67], explicite la dérivée directionnelle du maximum de fonctions semi-continues inférieurement.

Soit X un espace topologique compact, et J une application de $\mathbb{R}^n \times X$ dans $\mathbb{R}$, supposée conjointement continue, et $\mathcal{C}^1$ par rapport à la première variable. On pose alors

$$\bar{J}(u) = \max_{x\in X} J(u,x),$$

et

$$\hat{X} = \left\{x \in X,\ J(u,x) = \bar{J}(u)\right\}.$$

Théorème 3 (Danskin, 1967)**.** *La fonction $\bar{J}$ admet pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ une dérivée directionnelle dans la direction h donnée par*

$$\left\langle D_u\bar{J}(u), h\right\rangle = \max_{x\in\hat{X}} \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial J}{\partial u_i}(u,x).$$

Par ailleurs dans [BR95], l'auteur montre que ce théorème se généralise à toute fonctionnelle J réelle définie sur $U \times V$ où U est un espace de Banach et V un espace topologique compact.

Le théorème suivant, dù à Maurice Sion dans [S$^+$58] (1958), permet d'intervertir min et max, et assure l'existence d'un point selle, solution du problème max-min.

Théorème 4 (Sion, 1957)**.** *Soit M un espace topologique compact, et N un espace topologique quelconque. Soit J une fonctionnelle réelle définie sur $M \times N$, concave-convexe. Si pour tout $n \in N$ les applications $m \mapsto J(m,n)$ sont semi-continues supérieurement, alors*

$$\sup_{m\in M} \inf_{n\in N} J(m,n) = \inf_{n\in N} \sup_{m\in M} J(m,n).$$

Ce résultat est également vrai si l'on suppose M quelconque, N compact, et pour tout $m \in M$ les applications $n \mapsto J(m,n)$ semi-continues inférieurement.

A.2 Observabilité-Contrôlabilité

On rappelle dans cette partie les notions qui sont à la base du propos même de cette thèse : la notion d'observabilité, ainsi que la notion duale, la contrôlabilité. On retrouvera tous les éléments de ces rappels dans [TW09].

Soit un domaine Ω ouvert, borné et supposé $\mathcal{C}^{1,1}$. On considère l'équation des ondes sur Ω et le domaine d'observation frontière $\Gamma \subset \partial\Omega$.

On pose dans un premier temps Δ le Laplacien Dirichlet sur Ω, et A l'opérateur défini par $D(A) = L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, à valeur dans $X = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id} \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix}.$$

L'opérateur A est générateur d'un semi-groupe fortement continu $\mathbb{T}$ ([TW09]).

On pose dans un second temps Γ un sous-ensemble de $\partial\Omega$, mesurable pour la mesure de Hausdorff $(n-1)$-dimensionnelle définie sur $\partial\Omega$. On considère alors l'opérateur d'observation $C \in \mathcal{L}(X, Y)$, avec $Y = L^2(\partial\Omega)$, défini par

$$C \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \chi_\Gamma \frac{\partial f}{\partial \nu},$$

où ν désigne la normale sortante à $\partial\Omega$, et $\frac{\partial f}{\partial \nu}$ la dérivée normale de f définie sur $\partial\Omega$. Puisque A est générateur d'un semi-groupe fortement continu, il existe une unique solution $y \in \mathcal{C}^1([0, \infty[, X)$ au système suivant

$$\begin{cases} \partial_{tt} y - \Delta y = 0 & \text{sur } \Omega \times]0, \infty[, \\ y = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, \infty[, \\ y(x,0) = y_0(x), \quad \partial_t y(x,0) = y_1(x) & \text{sur } \Omega. \end{cases}$$

Proposition 4. *Pour tout $T > 0$, l'opérateur C est un opérateur d'observation admissible pour $\mathbb{T}$.*

On a le résultat d'observabilité suivant :

Théorème 5. *Supposons qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $\Gamma(x_0) \subset \Gamma$, avec*

$$\Gamma(x_0) = \{x \in \partial\Omega,\ \langle x - x_0, \nu(x)\rangle > 0\}.$$

Posons ensuite $r(x_0) = \sup_{x\in\Omega} d(x, x_0)$, alors, si $T > 2r(x_0)$, (A, C) est exactement observable en temps T, et la constante d'observabilité K_T vérifie

$$K_T \geqslant \frac{T - 2r(x_0)}{r(x_0)}.$$

On termine cette partie par le résultat de dualité entre l'observablité du système précédent et la contrôlabilité [2] du système suivant :

$$\begin{cases} \partial_{tt} y - \Delta y = 0 & \text{sur } \Omega\times]0,\infty[, \\ y = 0 & \text{sur } \partial\Omega\times]0,\infty[, \\ y = u & \text{sur } \Gamma\times]0,\infty[, \\ y(x,0) = y_0(x), \quad \partial_t y(x,0) = y_1(x) & \text{sur } \Omega. \end{cases} \tag{A.2}$$

On a alors le théorème suivant :

Théorème 6. *T et Γ sont tels que le couple (A, C) est exactement observable en temps T, si, et seulement si, pour tout couple $(f, \tilde{f}) \in L^2(\Omega)$ et tout couple $(g, \tilde{g}) \in H^{-1}(\Omega)$, il existe $u \in L^2([0, T], L^2(\Gamma))$ tel que la solution faible du problème* (A.2) *vérifie*

$$\forall x \in \Omega, \quad y(x, T) = \tilde{f}(x), \quad \partial_t y(x, T) = \tilde{g}(x).$$

A.3 Opérateurs pseudo-différentiels

En plusieurs endroits de cette thèse, il nous faudra faire appel à certains résultats issus de l'analyse micro-locale. Plus précisément ces résultats font généralement intervenir des opérateurs pseudo-différentiels. Rappelons ici brièvement quelques définitions nécessaires. On renvoie à [Ali12] pour toutes les notions évoquées ci-dessous ainsi que tous les dévelloppements nécessaires.

Commençons par la définition suivante :

Défintion 4. *Soit $m \in \mathbb{R}$. On appelle symboles d'ordre m l'ensemble des fonctions*

2. On pourra se référer à [TW09] pour les différentes notions de contrôlabilité

$a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ telles que pour tout $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{N}^n)^2$

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)| \leqslant C_{\alpha,\beta}(1+\xi)^{m-|\beta|}.$$

On notera $\mathcal{S}^m$ l'ensemble des symboles d'ordre m.

On définit également l'espace $\mathcal{S}$ des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ à décroissance rapide[3], muni de sa topologie habituelle.

Proposition 5. *Si $a \in \mathcal{S}^m$, et $u \in \mathcal{S}$, la formule*

$$\mathrm{Op}(a)u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\xi} a(x,\xi)\hat{u}(\xi)d\xi,$$

où $\hat{u}$ désigne la transformée de Fourier de u, définit une fonction de $\mathcal{S}$, et l'application

$$(a,u) \mapsto \mathrm{Op}(a)u$$

est continue. L'application linéaire Op *ainsi définie sur $\mathcal{S}^m$ dans les opérateurs linéaires de $\mathcal{S}$ est injective, et satisfait aux relations :*

$$\begin{cases} \mathrm{Op}(a)(\partial_{x_j} u) - \partial_{x_j}(\mathrm{Op}(a)u) = i\,\mathrm{Op}(\partial_{x_j} a)u, \\ \\ \mathrm{Op}(a)(x_j u) - x_j\,\mathrm{Op}(a)(u) = -i\,\mathrm{Op}(a)(\partial_{\xi_j} a). \end{cases}$$

Défintion 5. *Pour $a \in \mathcal{S}^m$, l'opérateur* $\mathrm{Op}(a)$ *est l'opérateur pseudo-différentiel de symbole a. On dit qu'un opérateur pseudo-différentiel est d'ordre m, si $a \in \mathcal{S}^m$. On utilisera par la suite, pour plus de clarté, la notation $A = \mathrm{Op}(a)$.*

On introduit également la notion suivante, inspirée de [Ral82]

Défintion 6. *Soit P, un opérateur pseudo-différentiel* linéaire *d'ordre m, agissant sur les fonctions définie pour $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Soit p le symbole de l'opérateur P. P est dit* **strictement hyperbolique** *si le polynôme*

$$f(s) = p(x,t,\xi,\tau),$$

possède m racines distinctes réelles pourvu que $\xi \neq 0$.

Notons qu'on peut définir de manière similaire des opérateurs pseudo-différentiels sur des variétés $\mathcal{C}^1$. Le symbole de tels opérateurs est alors défini sur le fibré cotangent défini ci-dessous :

3. C'est-à-dire les fonctions u telles que $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \forall \beta \in \mathbb{N}^n$, $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta u(x)| < \infty$.

Défintion 7. *Soit M une variété $\mathcal{C}^1$. On appelle* **fibré cotangent** *T^*M, l'ensemble des points (x, ξ), avec $x \in M$ et ξ une forme linéaire sur l'espace tangent à M en x, noté T_xM. On note alors $\pi : T^*M \to M$, la projection sur M, $\pi(x, \xi)$. On appelle* **fibre** *$\pi^{-1}(x)$, c'est-à-dire le dual de T_xM.*

A.4 Géométrie

Variétés stratifiées. Pour un certain nombre de résultats du premier chapitre on se placera sous l'hypothèse que l'ensemble $\partial\Omega$ constitue une variété stratifiée $(n-1)$-dimensionnelle. Précisons cette notion :

Soit S un espace topologique différentiel, et posons pour tout $x \in S$, T_x l'espace tangent à S en x. On notera alors, pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$S^i := \{x \in S,\ \dim(T_x) = i\}\,.$$

de sorte que S consiste en l'union disjointe des S^i, pour $i \in \mathbb{N}$. Les composantes connexes des S^i seront appelées strates de S. On définit enfin σ_r le r-squelette de S par

$$\sigma_r := \bigcup_{i \leqslant r} S^i.$$

Défintion 8 (Variété Stratifiée)**.** *Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit S un espace topologique différentiel locallement compact. S est une variété stratifiée k-dimensionnelle si*

1. *les r-squelettes de S sont fermés.*
2. *Pour tout $i \leqslant k$, S^i est une variété $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^i$. De sorte que pour tout $x \in S^i$, $\dim(S^i) = \dim(T_x) = i$.*
3. *Pour tout $x \in S$, $\dim(T_x) \leqslant k$.*

On pourra se référer à [Kre10] pour plus de précision sur cette notion.

Domaines ergodiques. Afin de pouvoir définir ce qu'est un domaine ergodique, il faut d'abord définir brièvement ce qu'est un système dynamique ainsi qu'un billiard dynamique.

Défintion 9 (Système dynamique)**.** *Soit X un espace topologique et $f = \{f^t : X \mapsto X\}_{t\in\mathbb{R}}$ une famille d'applications. On dit que (X, f) est un système dynamique si*

- $f^{t+s} = f^t \circ f^s$.
- $f^0 = \mathrm{Id}$.
- $f^{-t} = (f^t)^{-1}$.

f est alors appelé **flot** *du système.*

Défintion 10 (Billiard dynamique)**.** *Un billiard dynamique est un cas particulier de système dynamique. Soit Ω un domaine supposé fermé et de régularité Lipschitz. On définit alors l'espace topologique suivant :*

$$X := \{(x, \omega),\ x \in \Omega, w \in C_x(\Omega)\},$$

avec

$$C_x(\Omega) = \{\omega \in \mathbb{R}^n,\ \| \omega \| = 1, \exists \varepsilon > 0,\ x + \varepsilon\omega \in \Omega\}.$$

On définit alors le flot f par la relation

$$\forall (x, \omega) \in X, \quad f^t(x, \omega) = (x_t, \omega_t),$$

où x_t parcourt Ω à vitesse 1 suivant les lois de l'optique géométrique, et ω_t constante par morceaux consiste en la direction du rayon suivi par x_t. Dans ce cas f s'appelle **flot géodésique***. On pourra qualifier par extension Ω de billiard dynamique, sans redéfinir (X, f).*

Afin de pouvoir parler d'ergodicité on suppose X muni d'une mesure μ qui en fait un espace de probabilité.

Défintion 11 (Flot ergodique)**.** *Soit (X, f) un système dynamique. Le flot f est dit ergodique si*

1. *L'application*

$$\begin{array}{rccc} f: & X \times \mathbb{R} & \mapsto & X \\ & (x, t) & \to & f^t(x) \end{array}$$

   est une application mesurable pour les topologies d'espaces mesurés correspondantes.

2. *Pour tout $A \subset X$ mesurable, et pour tout $t \in \mathbb{R}$*

$$\mu\left((f^t)^{-1}(A)\right) = \mu(A).$$

3. *Pour tout $A \subset X$ mesurable, et pour tout $t \in \mathbb{R}$ tels que*

$$\mu\left((f^t)^{-1}(A) \setminus A \cup A \setminus (f^t)^{-1}(A)\right) = 0,$$

   alors $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$.

On dira d'un domaine borné Ω de régularité Lipschitz qu'il est ergdique si le billiard dynamique associé à $\overline{\Omega}$ est ergodique pour la mesure de Lebesgue (normalisée) sur X. En particulier on a la proposition suivante :

Proposition 6. *Si X est un espace métrique compact, et f un flot tel que pour tout t l'application $f^t : X \mapsto X$ est continue. Soit μ une mesure sur X qui soit f-invariante. Alors, si T est ergodique, l'orbite de μ-presque tout point de X est dense dans* $\mathrm{supp}(\mu)$.

Remarque 2. *Notons que le cas du billiard dynamique associé à un domaine Ω borné Lipschitz rentre dans le cadre de la proposition précédente. De sorte que, si l'on considère pour μ la mesure de Lebesgue (celle-ci est bien invariante par le flot géodésique), il s'ensuit que pour un domaine ergodique presque tout rayon se propageant suivant les lois de l'optique géométrique est dense dans Ω.*

Concernant ces notions d'ergodicité et de billiards dynamiques on pourra se référer à [BS02] pour plus de détails ou propriétés.

Annexe B

Preuve du théorème 2 et de la proposition 2

B.1 Preuve du théorème 2

Cette preuve suit le même principe celle du théorème 1, et s'inspire des travaux dans [PTZ12].

On considère ici le problème (1.32a), la résolution des deux problèmes (1.32a) et (1.32b) étant identique. Posons

$$J_1(\chi_{\Gamma_1}) = \inf_{n\geqslant 1} \int_{\Gamma_1} \sin(nx)^2 dx.$$

Montrons que $\sup_{\chi_{\Gamma_1}, |\Gamma_1 = 2\pi L|} J_1(\chi_{\Gamma_1}) = L\pi$.

Dans tout ce qui va suivre, et pour toute partie $\Gamma_1 \subset \Sigma_1$, on pose

$$I_j(\Gamma_1) = \int_{\Gamma_1} \sin^2(jx)\, dx \quad \text{et} \quad \overline{I}_j(\Gamma_1) = \int_{\Gamma_1} \cos^2(2jx)\, dx$$

pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, de sorte que

$$I_j(\Gamma_1) = L\pi - \frac{1}{2}\overline{I}_j(\Gamma_1). \tag{B.1}$$

On suivra dans la suite la preuve du théorème 1.

Dans ce qui suit, pour toute partie Γ_1 on notera $\#\Gamma_1$ le nombre de ses composantes connexes. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$J_p = \sup\left\{J_1(\Gamma_1) \mid \Gamma_1 \text{ partie ouverte de } \Sigma_1,\ |\Gamma_1| = 2\pi L,\ \#\Gamma_1 \leqslant p\right\}.$$

Puisque J_1 est semi-continue supérieurement et puisque l'ensemble des sous-parties ouvertes de Σ_1 de mesure $2L\pi$ composées d'un nombre p de composantes connexes est un ensemble compact on a que J_p est atteint pour un certain Γ_1^p. On a tout d'abord, par ce qui précède que $J_p \leqslant L\pi$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. Notons $\overline{\Gamma_1^p}$ la fermeture de Γ_1^p, et par $(\Gamma_1^p)^c$ le complémentaire de Γ_1^p dans Γ_1.

Considérons les subdivisions suivantes de $\overline{\Gamma_1^p}$ et $(\Gamma_1^p)^c$, qui seront précisées plus loin :

$$\overline{\Gamma_1^p} = \bigcup_{i=1}^{K} S_i \quad \text{et} \quad (\Gamma_1^p)^c = \bigcup_{i=1}^{M} T_i \tag{B.2}$$

avec S_i et T_i les segments $S_i = [a_i, b_i] \times \{0\}$ (ou $S_i = [a_i, b_i] \times \{\pi\}$ à partir d'un certain indice i), et respectivement $T_i = [c_i, d_i] \times \{0\}$ (ou $T_i = [c_i, d_i] \times \{\pi\}$).

D'après l'inégalité de Taylor,

$$\left| \int_{\Gamma_1^p} \cos(2jx)\, dx - \sum_{i=1}^{K} (b_i - a_i) \cos\left(2j \frac{a_i + b_i}{2}\right) \right| \leqslant 4j^2 \sum_{i=1}^{K} \frac{(b_i - a_i)^3}{24},$$

et

$$\left| \int_{(\Gamma_1^p)^c} \cos(2jx)\, dx - \sum_{i=1}^{M} (d_i - c_i) \cos\left(2j \frac{c_i + d_i}{2}\right) \right| \leqslant 4j^2 \sum_{i=1}^{M} \frac{(d_i - c_i)^3}{24},$$

pour tout $j \in \mathbb{N}^*$. Notons par ailleurs que $(\Gamma_1^p)^c$ est le complémentaire de Γ_1^p, donc

$$\int_{(\Gamma_1^p)^c} \cos(2jx)\, dx = -\int_{\Gamma_1^p} \cos(2jx)\, dx, \tag{B.3}$$

pour tout $j \in \mathbb{N}^*$. Posons alors $h_i = (1 - L)(b_i - a_i)\pi$, $\ell_i = L\pi(d_i - c_i)$, $x_i = \frac{a_i + b_i}{2}$, et $y_i = \frac{c_i + d_i}{2}$. Posons également $h = \max(h_1, \cdots, h_K, \ell_1, \cdots, \ell_M)$. Alors, puisque $\sum_{i=1}^{K} (b_i - a_i) = 2L\pi$,

$$\begin{aligned} (1 - L)\pi \overline{I}_j(\Gamma_1^p) &= \sum_{i=1}^{K} h_i \cos(2jx_i) + \mathrm{O}(j^2 h^2), \\ L\pi\, \overline{I}_j(\Gamma_1^p) &= -\sum_{i=1}^{M} \ell_i \cos(2jy_i) + \mathrm{O}(j^2 h^2), \end{aligned} \tag{B.4}$$

pour tout $j \in \mathbb{N}^*$.

Pour $\varepsilon \in]0, 1[$, définissons la perturbation Γ_1^ε de Γ_1^p par :

$$\Gamma_1^\varepsilon = \left(\Gamma_1^p \setminus \bigcup_{i=1}^{K} \left(x_i - \frac{\varepsilon}{2} h_i, x_i + \frac{\varepsilon}{2} h_i \right) \right) \quad \bigcup \quad \bigcup_{i=1}^{M} \left[y_i - \frac{\varepsilon}{2} \ell_i, y_i + \frac{\varepsilon}{2} \ell_i \right].$$

ce qui, par construction, impose $\#\Gamma_1^\varepsilon = p + K + M$ mais aussi $|\Gamma_1^\varepsilon| = 2L\pi - \varepsilon \sum_{i=1}^{K} h_i +$

$\varepsilon \sum_{i=1}^{M} \ell_i = 2L\pi$. Par ailleurs :

$$\overline{I}_j(\Gamma_1^\varepsilon) = \int_{\Gamma_1^\varepsilon} \cos(2jx)dx = \overline{I}_j(\Gamma_1^p) - \sum_{i=1}^{K} \int_{x_i-\frac{\varepsilon}{2}h_i}^{x_i+\frac{\varepsilon}{2}h_i} \cos(2jx)dx + \sum_{i=1}^{M} \int_{y_i-\frac{\varepsilon}{2}\ell_i}^{y_i+\frac{\varepsilon}{2}\ell_i} \cos(2jx)dx.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\varepsilon}\overline{I}_j(\Gamma_1^\varepsilon) &= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{K} h_i \left(\cos\left(2j\left(x_i+\frac{\varepsilon}{2}h_i\right)\right)+\cos\left(2j\left(x_i-\frac{\varepsilon}{2}h_i\right)\right)\right)\\ &\quad +\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M} \ell_i \left(\cos\left(2j\left(y_i+\frac{\varepsilon}{2}\ell_i\right)\right)+\cos\left(2n\left(y_i-\frac{\varepsilon}{2}\ell_i\right)\right)\right),\end{aligned}$$

En particulier, d'après (B.3) et (B.4), on a

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\varepsilon}\overline{I}_j(\Gamma_1^\varepsilon)_{|\varepsilon=0} &= -\sum_{i=1}^{K} h_i \cos(2jx_i) + \sum_{i=1}^{M} \ell_i \cos(2jy_i)\\ &= -(1-L)\pi\overline{I}_j(\Gamma_1^p) - L\pi\overline{I}_j(\Gamma_1^p) + \mathrm{O}(j^2h^2)\\ &= -\overline{I}_j(\Gamma_1^p) + \mathrm{O}(j^2h^2)\end{aligned} \tag{B.5}$$

et aussi,

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{d\varepsilon^2}\overline{I}_j(\Gamma_1^\varepsilon) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{K} jh_i^2 \left(\sin\left(2j\left(x_i+\frac{\varepsilon}{2}h_i\right)\right)-\sin\left(2j\left(x_i-\frac{\varepsilon}{2}h_i\right)\right)\right)\\ &\quad -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M} j\ell_i^2 \left(\sin\left(2j\left(y_i+\frac{\varepsilon}{2}\ell_i\right)\right)+\sin\left(2j\left(y_i-\frac{\varepsilon}{2}\ell_i\right)\right)\right),\end{aligned}$$

De sorte que,

$$\left|\frac{d^2}{d\varepsilon^2}\overline{I}_j(\Gamma_1^\varepsilon)\right| \leqslant 4L(1-L)\pi^2 jh. \tag{B.6}$$

Par (B.1), (B.5) et (B.6),

$$\begin{aligned}I_j(\Gamma_1^\varepsilon) &= I_j(\Gamma_1^p) + \varepsilon\frac{d}{d\varepsilon}I_j(\Gamma_1^\varepsilon)_{|\varepsilon=0} + \int_0^\varepsilon (\varepsilon-s)\frac{d^2}{ds^2}I_j(\Gamma_1^s)\,ds\\ &= I_j(\Gamma_1^p) + \varepsilon\left(L\pi - I_j(\Gamma_1^p)\right) + \mathrm{O}(\varepsilon j^2h^2) + \mathrm{O}(\varepsilon^2 jh),\end{aligned}$$

pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ et tout $\varepsilon \in]0,1[$. Ensuite, puisque par définition on a $J_p = J_1(\Gamma_1^p) = \inf_{j\in\mathbb{N}^*} I_j(\Gamma_1^p)$, on obtient l'inégalité

$$I_j(\Gamma_1^\varepsilon) \geqslant J_p + \varepsilon\left(L\pi - J_p\right) + \mathrm{O}(\varepsilon j^2h^2) + \mathrm{O}(\varepsilon^2 jh), \tag{B.7}$$

Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ et tout $\varepsilon \in]0,1[$.

D'autre part, d'après le lemme de Riemann-Lebesgue, $I_j(\Gamma_1^p)$ tend vers $L\pi$ quand j tend vers $+\infty$. Il existe donc un entier j_0 tel que

$$I_j(\Gamma_1^p) \geqslant L\pi - \frac{1}{4}\left(L\pi - J_p\right),$$

pour tout $j \geqslant j_0$.

Ensuite puisque

$$\begin{aligned} |I_j(\Gamma_1^\varepsilon) - I_j(\Gamma_1^p)| &= \left| \int_{\Sigma_1} \left(\chi_{\Gamma_1^\varepsilon}(x) - \chi_{\Gamma_1^p}(x)\right) \cos(2jx) dx \right| \\ &\leqslant \varepsilon \left(\sum_{i=1}^{K} h_i + \sum_{i=1}^{M} \ell_i \right) = 4\varepsilon L(1-L)\pi^2, \end{aligned}$$

pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, on en déduit

$$\forall \varepsilon \in \left(0, \min\left(1, \frac{\frac{1}{4}\left(L\pi - J_p\right)}{4L(1-L)\pi^2}\right)\right) \quad \forall j \geqslant j_0 \quad I_j(\Gamma_1^\varepsilon) \geqslant L\pi - \frac{1}{2}\left(L\pi - J_p\right). \quad \text{(B.8)}$$

Notons que l'inégalité obtenue ne dépend pas du choix des subdivisions (B.2), en particulier elle ne dépend pas du nombre de composantes connexes de Γ_1^ε.

Choisissons maintenant ces subdivisions (B.2) assez fines de sorte à obtenir $hj_0 \leqslant \frac{1}{2}\left(L\pi - J_p\right)$. Nous obtenons

$$\varepsilon^2 hj \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\left(L\pi - J_p\right),$$

Pour tout $\varepsilon \in]0,1[$ et tout $j \in \{1, \cdots, j_0\}$. Avec (B.7), ceci implique

$$I_j(\Gamma_1^\varepsilon) \geqslant J_p + \frac{\varepsilon}{2}\left(L\pi - J_p\right), \quad \text{(B.9)}$$

pour tout $j \in \{1, \cdots, j_0\}$.

Posons enfin $C_L = \frac{1}{16L(1-L)\pi^2}$, et

$$\varepsilon = \min\left(1, C_L\left(L\pi - J_p\right)\right).$$

D'après (B.8) et (B.9) on a

$$I_j(\Gamma_1^\varepsilon) \geqslant J_p + \frac{1}{2}\min\left(1, C_L\left(L\pi - J_p\right)\right)\left(L\pi - J_p\right),$$

pour tout $j \in \mathbb{N}^*$. Et passant à la borne inférieure sur j, on obtient

$$J(\Gamma_1^\varepsilon) \geqslant J_p + \frac{1}{2}\min\left(1, C_L\left(L\pi - J_p\right)\right)\left(L\pi - J_p\right).$$

Nous avons ainsi construit une partie ouverte Γ_1^ε ayant $q = p + K + M$ composantes connexes. On pose $\varphi(p) = q = p + K + M$ et $\Gamma_1^q = \Gamma_1^\varepsilon$ et l'on définit la suite $u_k = J(\varphi^k(p))$. On a donc

$$u_{k+1} \geqslant u_k + \frac{1}{2}\min\left(1, C_L\left(L\pi - u_k\right)\right)\left(L\pi - u_k\right),$$

pour tout k. Cette suite est donc croissante, majorée par $L\pi$, et converge vers $L\pi$.

Ce qui conclut la preuve.

B.2 Preuve de la proposition 2

Notons dans une permier temps qu'on a l'existence et l'unicité d'une solution au problème (2.4) pour $p_0 \in H_0^1(\Omega)$ (voir par exemple [Eva98]).

Soit $p_0 \in H_0^1(\Omega)$. Considérons dans un premier temps p^* la solution du système (2.4) dans le cas particulier où $c(x) = c_2$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $p^*(x,0) = p_0(x)$, et $\partial_t p^*(x,0) = 0$.

On introduit ici la transformation de Fourier en la variable d'espace $\mathcal{F}$, ainsi que le produit de convolution $*$ pour cette même variable.

Rappelons le résultat classique suivant (voir [Eva98] par exemple) :
Il existe une unique solution $E \in \Gamma'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ vérifiant :

$$\begin{cases} \partial_{tt}E(x,t) - c_2\Delta E(x,t) = \delta_{(t,x)=(0,0)} \quad \textit{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n) \\ \\ \text{supp}(E) \subset (\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n). \end{cases}$$

Par ailleurs la transformée de Fourier en la variable x de la distribution E est la distribution tempérée définie par

$$\mathcal{F}E(\xi,t) = \chi_{\mathbb{R}_+^*}(t)\frac{\sin(\sqrt{c_2}|\xi|t)}{\sqrt{c_2}|\xi|}, \quad (t,\xi) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \tag{B.10}$$

où ξ désigne la variable duale de x. E est appelée solution élémentaire tempérée du d'Alembertien $\Box$, défini ici par $\Box = \partial_{tt} - c_2\Delta$.

Ce théorème implique que p^* s'écrit

$$p^*(x,t) = \partial_t E(x,t) * (\delta_{t=0}(t) \otimes p_0(x)),$$

avec E définie par (B.10) et $\otimes$ est le produit tensoriel entre deux distributions. En particulier, puisque $\mathrm{supp}(E) = \{(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, |x| \leqslant c_2 t\}$ et
$\mathrm{supp}(\partial_t E * (\delta_{t=0} \otimes p_0)) \subset \mathrm{supp}(E) + \mathrm{supp}(\delta_{t=0} \otimes p_0)$ il vient directement que

$$\mathrm{supp}(p^*) = (\mathrm{supp}(p_0) \times \{0\} + \{(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, |x| \leqslant c_2 t\}).$$

En d'autres termes

$$\text{si} \quad \{s \in \mathbb{R}^n; |x-s| \leqslant c_2 t\} \cap \mathrm{supp}(p_0) = \emptyset \quad \text{alors} \quad p^*(x,t) = 0.$$

Enfin, si p est la solution du système (2.3) (dans le cas général où : $c = c_1 \chi_\Omega + c_2 \chi_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega}$), avec la même condition initiale p_0 que précédemment, par différence, le système suivant est satisfait :

$$\begin{cases} \partial_{tt}(p-p^*)(x,t) - c_2 \Delta (p-p^*)(x,t) = \mathrm{div}((c(x)-c_2)\nabla p(x,t)) & \text{sur } \mathbb{R}^n \times [0,T], \\ (p-p^*)(x,0) = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^n, \\ \partial_t (p-p^*)(x,0) = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{B.11}$$

Ainsi on a $(p-p^*) = E * f$, avec $f = \mathrm{div}((c-c_2)\nabla p)$, et E donnée par (B.10) (voir par exemple [Eva98]). Enfin puisqu'on a $\mathrm{supp}(f) \subset \Omega$, $\mathrm{supp}(E) = \{(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, |x| \leqslant c_2 t\}$ et $\mathrm{supp}(p^*) \subset \Omega \times \{0\} + \{(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, |x| \leqslant c_2 t\}$, on en déduit

$$\mathrm{supp}(p) \subset (\Omega \times \{0\} + \{(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, |x| \leqslant c_2 t\}).$$

Ainsi, de même que précédemment, on conclut que si $\{s \in \mathbb{R}^n; |x-s| \leqslant c_2 t\} \cap \Omega = \emptyset$ alors $p(x,t) = 0$.

Pour conclure, on a montré que si p_0 est à support dans Ω et que $\mathcal{B}$ est choisi de sorte à assurer $d(\partial\mathcal{B}, \Omega) > c_2 T$, alors pour tout x dans $\mathbb{R}^n \setminus \mathring{\mathcal{B}}$ et pour tout $t < T$, la solution p du système (2.4) vérifie $p(x,t) = 0$. Par unicité des solutions des systèmes (2.3) et (2.4), p coïncide sur $\mathcal{B} \times [0,T]$ avec la solution du système (2.3) (pour la même condition initiale p_0), ce qu'il fallait démontrer.

Bibliographie

[ABGW11] Habib Ammari, Elie Bretin, Josselin Garnier et Abdul Wahab : Time reversal in attenuating acoustic media. *Contemporary Mathematics*, 548:151–163, 2011.

[ABJK10] Habib Ammari, Emmanuel Bossy, Vincent Jugnon et Hyeonbae Kang : Mathematical modeling in photoacoustic imaging of small absorbers. *SIAM review*, 52(4):677–695, 2010.

[ABJW12] Habib Ammari, Elie Bretin, Vincent Jugnon et Abdul Wahab : Photoacoustic imaging for attenuating acoustic media. *In Mathematical modeling in biomedical imaging II*, pages 57–84. Springer, 2012.

[AC01] Charalambos Antoniades et Panagiotis D Christofides : Integrating nonlinear output feedback control and optimal actuator/sensor placement for transport-reaction processes. *Chemical Engineering Science*, 56(15):4517–4535, 2001.

[ACEJ01] Larbi Afifi, Abdelhakim Chafiai et Abdelhaq El Jai : Spatial compensation of boundary disturbances by boundary actuators. *APPLIED MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE*, 11(4):899–920, 2001.

[AD06] Antonios Armaou et Michael A Demetriou : Optimal actuator/sensor placement for linear parabolic pdes using spatial h^2 norm. *Chemical Engineering Science*, 61(22):7351–7367, 2006.

[AD07] Wolfgang Arendt et Daniel Daners : Uniform convergence for elliptic problems on varying domains. *Mathematische Nachrichten*, 280(1-2):28–49, 2007.

[AK06] Gilles Aubert et Pierre Kornprobst : *Mathematical problems in image processing : partial differential equations and the calculus of variations*, volume 147. Springer Science & Business Media, 2006.

[AKO03] Valery G Andreev, Alexander A Karabutov et Alexander A Oraevsky : Detection of ultrawide-band ultrasound pulses in op-

toacoustic tomography. *Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, IEEE Transactions on*, 50(10):1383–1390, 2003.

[Ali12] Serge ALINHAC : *Opérateurs pseudo-différentiels et théoreme de Nash-Moser*. EDP Sciences, 2012.

[All05] Grégoire ALLAIRE : *Analyse numérique et optimisation : Une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique*. Editions Ecole Polytechnique, 2005.

[AMP10] Grégoire ALLAIRE, Arnaud MÜNCH et Francisco PERIAGO : Long time behavior of a two-phase optimal design for the heat equation. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 48(8):5333–5356, 2010.

[Arr99] Simon R ARRIDGE : Optical tomography in medical imaging. *Inverse problems*, 15(2):R41, 1999.

[BBHP14] Maïtine BERGOUNIOUX, Xavier BONNEFOND, Thomas HABERKORN et Yannick PRIVAT : An optimal control problem in photoacoustic tomography. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 24(12):2525–2548, 2014.

[BBMG+07] P BURGHOLZER, J BAUER-MARSCHALLINGER, H GRÜN, M HALTMEIER et G PALTAUF : Temporal back-projection algorithms for photoacoustic tomography with integrating line detectors. *Inverse Problems*, 23(6):S65, 2007.

[BH11] AH BARNETT et Andrew HASSELL : Estimates on neumann eigenfunctions at the boundary, and the" method of particular solutions" for computing them. *arXiv preprint arXiv :1107.2172*, 2011.

[BLR92] Claude BARDOS, Gilles LEBEAU et Jeffrey RAUCH : Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary. *SIAM journal on control and optimization*, 30(5):1024–1065, 1992.

[BMA06] Giuseppe BUTTAZZO, Gérard MICHAILLE et Hedy ATTOUCH : *Variational analysis in Sobolev and BV spaces : applications to PDEs and optimization*, volume 6. Siam, 2006.

[BNO+03] Dimitri P BERTSEKAS, Angelia NEDI, Asuman E OZDAGLAR *et al.* : *Convex analysis and optimization*. Athena Scientific, 2003.

[Bon10] Xavier BONNEFOND : *Contributions à la tomographie thermoacoustique. Modélisation et inversion*. Thèse de doctorat, Université de Toulouse, Université Toulouse III-Paul Sabatier, 2010.

[BR95] Pierre BERNHARD et Alain RAPAPORT : On a theorem of danskin with an application to a theorem of von neumann-sion. *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications*, 24(8):1163–1181, 1995.

[BR11] Guillaume BAL et Kui REN : Multi-source quantitative photoacoustic tomography in a diffusive regime. *Inverse Problems*, 27(7):075003, 2011.

[Bre10] Haim BREZIS : *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer Science & Business Media, 2010.

[BS02] Michael BRIN et Garrett STUCK : *Introduction to dynamical systems*. Cambridge University Press, 2002.

[BT08a] Nicolas BURQ et Nikolay TZVETKOV : Random data cauchy theory for supercritical wave equations i : local theory. *Inventiones mathematicae*, 173(3):449–475, 2008.

[BT08b] Nicolas BURQ et Nikolay TZVETKOV : Random data cauchy theory for supercritical wave equations ii : A global existence result. *Inventiones mathematicae*, 173(3):477–496, 2008.

[Bur03] N BURQ : Quantum ergodicity of boundary values of eigenfunctions : A control theory approach, to appear in canadian math. *arXiv preprint math/03010349*, 2003.

[Bur11] Nicolas BURQ : Large-time dynamics for the one-dimensional schrödinger equation. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh : Section A Mathematics*, 141(02):227–251, 2011.

[CBdN08] Jean-Michel CORON, Georges BASTIN et Brigitte d'Andréa NOVEL : Dissipative boundary conditions for one-dimensional nonlinear hyperbolic systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 47(3):1460–1498, 2008.

[CCD13] Gilles CHARDON, Albert COHEN et Laurent DAUDET : Sampling and reconstruction of solutions to the helmholtz equation. *arXiv preprint arXiv :1301.0237*, 2013.

[CWPD12] Felipe CASTILLO, Emmanuel WITRANT, Christophe PRIEUR et Luc DUGARD : Dynamic boundary stabilization of linear and quasi-linear hyperbolic systems. *In Decision and Control (CDC), 2012 IEEE 51st Annual Conference on*, pages 2952–2957. IEEE, 2012.

[Dan67] John M DANSKIN : *Theory of Max-Min*. Springer-Verlag, 1967.

[DHH+12] Jérémi DARDÉ, Harri HAKULA, Nuutti HYVÖNEN, Stratos STABOULIS et Erkki SOMERSALO : Fine-tuning electrode information in electrical impedance tomography. *Inverse Probl. Imaging*, 6:399–421, 2012.

[DSL] Anabela DA SILVA et Amélie LITMAN : Communications personnelles.

[EFDC08] NH EL-FARRA, MA DEMETRIOU et PD CHRISTOFIDES : Actuator and controller scheduling in nonlinear transport-reaction processes. *Chemical Engineering Science*, 63(13):3537–3550, 2008.

[Eva98] Lawrence C EVANS : Partial differential equations. *Graduate studies in mathematics*, 19, 1998.

[FG00] Michel FORTIN et Roland GLOWINSKI : *Augmented Lagrangian methods : applications to the numerical solution of boundary-value problems*. Elsevier, 2000.

[FGK90] Robert FOURER, David M GAY et Brian W KERNIGHAN : A modeling language for mathematical programming. *Management Science*, 36(5): 519–554, 1990.

[FL07] Irene FONSECA et Giovanni LEONI : *Modern Methods in the Calculus of Variations : L^ p Spaces*. Springer Science & Business Media, 2007.

[Fol95] Gerald B FOLLAND : *Introduction to partial differential equations*. Princeton University Press, 1995.

[Han86] S-P HAN : On the augmented lagrangian. *Mathematics of operations research*, 11(1):161–168, 1986.

[Hec12] Frédéric HECHT : New development in freefem++. *Journal of Numerical Mathematics*, 20(3-4):251–266, 2012.

[HH03] Pascal HÉBRARD et Antoine HENROT : Optimal shape and position of the actuators for the stabilization of a string. *Systems & control letters*, 48(3):199–209, 2003.

[HH05] Pascal HÉBRARD et Antoine HENROT : A spillover phenomenon in the optimal location of actuators. *SIAM journal on control and optimization*, 44(1):349–366, 2005.

[Hir12] Morris W HIRSCH : *Differential topology*, volume 33. Springer Science & Business Media, 2012.

[HKN08] Yulia HRISTOVA, Peter KUCHMENT et Linh NGUYEN : Reconstruction and time reversal in thermoacoustic tomography in acoustically homogeneous and inhomogeneous media. *Inverse Problems*, 24(5):055006, 2008.

[HMW80] Th J HARRIS, JF MACGREGOR et JD WRIGHT : Optimal sensor location with an application to a packed bed tubular reactor. *AIChE Journal*, 26(6):910–916, 1980.

[Ho86] Lop Fat HO : Observabilité frontière de l'équation des ondes. *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique*, 302(12): 443–446, 1986.

[HP06] Antoine HENROT et Michel PIERRE : *Variation et optimisation de formes : une analyse géométrique*, volume 48. Springer Science & Business Media, 2006.

[Hri09] Yulia HRISTOVA : Time reversal in thermoacoustic tomography—an error estimate. *Inverse Problems*, 25(5):055008, 2009.

[HSS05] Markus HALTMEIER, Thomas SCHUSTER et Otmar SCHERZER : Filtered backprojection for thermoacoustic computed tomography in spherical geometry. *Mathematical methods in the applied sciences*, 28(16): 1919–1937, 2005.

[HZ04] Andrew HASSELL et Steve ZELDITCH : Quantum ergodicity of boundary values of eigenfunctions. *Communications in mathematical physics*, 248(1):119–168, 2004.

[Ing36] Albert Edward INGHAM : Some trigonometrical inequalities with applications to the theory of series. *Mathematische Zeitschrift*, 41(1):367–379, 1936.

[Joh58] Fritz JOHN : Plane waves and spherical means applied to partial differential equations, interscience, new york, 1955. *MR*, 17:746, 1958.

[JTZ97] Stéphane JAFFARD, Marius TUCSNAK et Enrique ZUAZUA : On a theorem of ingham. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 3(5): 577–582, 1997.

[JZLJ94] William T JOINES, Yang ZHANG, Chenxing LI et Randy L JIRTLE : The measured electrical properties of normal and malignant human tissues from 50 to 900 mhz. *Medical physics*, 21(4):547–550, 1994.

[Kat12] Tosio KATO : *Perturbation theory for linear operators*. Springer Science & Business Media, 2012.

[KKJM+00] Robert A KRUGER, William L KISER JR, Kathy D MILLER, Handel E REYNOLDS, Daniel R REINECKE, Gabe A KRUGER et Peter J HOFACKER : Thermoacoustic ct : imaging principles. *In BiOS 2000 The International Symposium on Biomedical Optics*, pages 150–159. International Society for Optics and Photonics, 2000.

[Kre10] Matthias KRECK : *Differential algebraic topology : From stratifolds to exotic spheres*, volume 110. American Mathematical Soc., 2010.

[KSKJ02] Robert A KRUGER, Keith STANTZ et William L KISER JR : Thermoacoustic ct of the breast. *In Medical Imaging 2002*, pages 521–525. International Society for Optics and Photonics, 2002.

[Kun08] Leonid A KUNYANSKY : Thermoacoustic tomography with detectors on an open curve : an efficient reconstruction algorithm. *Inverse Problems*, 24(5):055021, 2008.

[Lio88a] Jacques Louis LIONS : Contrôlabilité exacte perturbations et stabilisation de systèmes distribués(tome 1, contrôlabilité exacte. tome 2, perturbations). *Recherches en mathematiques appliquées*, 1988.

[Lio88b] Jacques-Louis LIONS : Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems. *SIAM review*, 30(1):1–68, 1988.

[Liu96] Pingyu LIU : Image reconstruction from photoacoustic pressure signals. *In Photonics West'96*, pages 285–296. International Society for Optics and Photonics, 1996.

[Liu07] Genqian LIU : Rellich type identities for eigenvalue problems and application to the pompeiu problem. *Journal of mathematical analysis and applications*, 330(2):963–975, 2007.

[Luk62] Yudell L LUKE : *Integrals of Bessel functions*. McGraw-Hill, 1962.

[Mor58] Charles B MORREY : On the analyticity of the solutions of analytic non-linear elliptic systems of partial differential equations : Part ii. analyticity at the boundary. *American Journal of Mathematics*, pages 219–237, 1958.

[Mor75] Cathleen S MORAWETZ : *Notes on time decay and scattering for some hyperbolic problems*, volume 19. SIAM, 1975.

[Mor11] Kirsten MORRIS : Linear-quadratic optimal actuator location. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 56(1):113–124, 2011.

[MP11] Arnaud MÜNCH et Francisco PERIAGO : Optimal distribution of the internal null control for the one-dimensional heat equation. *Journal of Differential Equations*, 250(1):95–111, 2011.

[MP14] Arnaud MÜNCH et Pablo PEDREGAL : Numerical null controllability of the heat equation through a least squares and variational approach. *European Journal of Applied Mathematics*, 25(03):277–306, 2014.

[MZ10] Arnaud MÜNCH et Enrique ZUAZUA : Numerical approximation of null controls for the heat equation : ill-posedness and remedies. *Inverse Problems*, 26(8):085018, 2010.

[MZI02] Fabricio MACIÀ et Enrique ZUAZUA IRIONDO : On the lack of observability for wave equations : a gaussian beam approach. *Asymptotic Analysis*, 32(1):1–26, 2002.

[PNHB07] Guenther PALTAUF, Robert NUSTER, Markus HALTMEIER et Peter BURGHOLZER : Photoacoustic tomography using a mach-zehnder interferometer as an acoustic line detector. *Applied optics*, 46(16):3352–3358, 2007.

[PS10] Yannick PRIVAT et Mario SIGALOTTI : The squares of the laplacian-dirichlet eigenfunctions are generically linearly independent. *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 16(03):794–805, 2010.

[PTZ12] Yannick PRIVAT, Emmanuel TRÉLAT et Enrique ZUAZUA : Optimal observability of the multi-dimensional wave and schrödinger equations in quantum ergodic domains. *arXiv preprint arXiv :1211.5655*, 2012.

[PTZ13a] Yannick PRIVAT, Emmanuel TRÉLAT et Enrique ZUAZUA : Optimal location of controllers for the one-dimensional wave equation. *In Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis*, volume 30-6, pages 1097–1126. Elsevier, 2013.

[PTZ13b] Yannick PRIVAT, Emmanuel TRÉLAT et Enrique ZUAZUA : Optimal observation of the one-dimensional wave equation. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 19(3):514–544, 2013.

[PTZ+13c] Yannick PRIVAT, Emmanuel TRÉLAT, Enrique ZUAZUA *et al.* : Complexity and regularity of maximal energy domains for the wave equation with fixed initial data. *To appear in Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 2013.

[PTZ15] Yannick PRIVAT, Emmanuel TRÉLAT et Enrique ZUAZUA : Optimal shape and location of sensors for parabolic equations with random initial data. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 216(3):921–981, 2015.

[Ral82] James RALSTON : Gaussian beams and the propagation of singularities. *Studies in partial differential equations*, 23:206–248, 1982.

[Rel40] Franz RELLICH : Darstellung der eigenwerte vonδu+λu= 0 durch ein randintegral. *Mathematische Zeitschrift*, 46(1):635–636, 1940.

[Rel69] Franz RELLICH : *Perturbation theory of eigenvalue problems*. CRC Press, 1969.

[S+58] Maurice SION *et al.* : On general minimax theorems. *Pacific J. Math*, 8(1):171–176, 1958.

[SGG+09] Otmar SCHERZER, Markus GRASMAIR, Harald GROSSAUER, Markus HALTMEIER et Frank LENZEN : Variational methods in imaging, volume 167 of applied mathematical sciences. *Springer*, 68:77–78, 2009.

[SK05] Andrey SMYSHLYAEV et Miroslav KRSTIC : Backstepping observers for a class of parabolic pdes. *Systems & Control Letters*, 54(7):613–625, 2005.

[Tey99] Mikhail TEYTEL : How rare are multiple eigenvalues ? *Communications on pure and applied mathematics*, 52(8):917–934, 1999.

[TW09] Marius TUCSNAK et George WEISS : *Observation and control for operator semigroups*. Springer Science & Business Media, 2009.

[WB06] Andreas WÄCHTER et Lorenz T BIEGLER : On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming. *Mathematical programming*, 106(1):25–57, 2006.

[WPPR00] Alain Vande WOUWER, Nicolas POINT, Stephanie PORTEMAN et Marcel REMY : An approach to the selection of optimal sensor locations in distributed parameter systems. *Journal of process control*, 10(4):291–300, 2000.

[XW02] Minghua XU et Lihong V WANG : Time-domain reconstruction for thermoacoustic tomography in a spherical geometry. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 21(7):814–822, 2002.

[XW03] Minghua XU et Lihong V WANG : Analytic explanation of spatial resolution related to bandwidth and detector aperture size in thermoacoustic or photoacoustic reconstruction. *Physical Review E*, 67(5):056605, 2003.

[XW05] Minghua XU et Lihong V WANG : Universal back-projection algorithm for photoacoustic computed tomography. *In Biomedical Optics 2005*, pages 251–254. International Society for Optics and Photonics, 2005.

[XW06] Minghua XU et Lihong V WANG : Photoacoustic imaging in biomedicine. *Review of scientific instruments*, 77(4):041101, 2006.

[Zel92] Steven ZELDITCH : Quantum ergodicity on the sphere. *Communications in mathematical physics*, 146(1):61–71, 1992.

[Zua07] Enrique ZUAZUA : Controllability and observability of partial differential equations : some results and open problems. *Handbook of differential equations : evolutionary equations*, 3:527–621, 2007.